1. $\lim_{x \to 0} \underbrace{(1+x)}_{\downarrow \atop 1} \underbrace{e^x}_{\downarrow \atop 1} = 1$

$$\frac{x^2 + 4x + 4}{x+2} = \frac{(x+2)^2}{x+2} = x+2,$$

så $\lim_{x \to -2} \frac{x^2+4x+4}{x+2} = \lim_{x \to -2} x+2 = 0$

2. $f'(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{produkt-} \\ \text{regeln}}}{=} 2x e^x + (x^2+1)e^x = (x^2+2x+1)e^x$

$g'(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{kedje-} \\ \text{regeln}}}{=} \frac{1}{\sin(x)} \cdot \cos(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$

3. $f'(x) = -\sin(x) + 2x$, så tangentlinjen genom punkten $(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2}))$ har lutning $f'(\frac{\pi}{2}) = -\sin(\frac{\pi}{2}) + 2 \cdot \frac{\pi}{2} =$

$= \pi - 1$

4. $f'(x) = 2e^x > 0$ för alla x, så

$f(x)$ är strikt växande på $(-\infty, \infty)$.

Därför är $f(x)$ inverterbar på

hela $\mathbb{R}$.

$y = 2e^x + 1 \iff y - 1 = 2e^x$

$\iff \frac{y-1}{2} = e^x \iff x = \ln\left(\frac{y-1}{2}\right)$,

så $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x-1}{2}\right)$

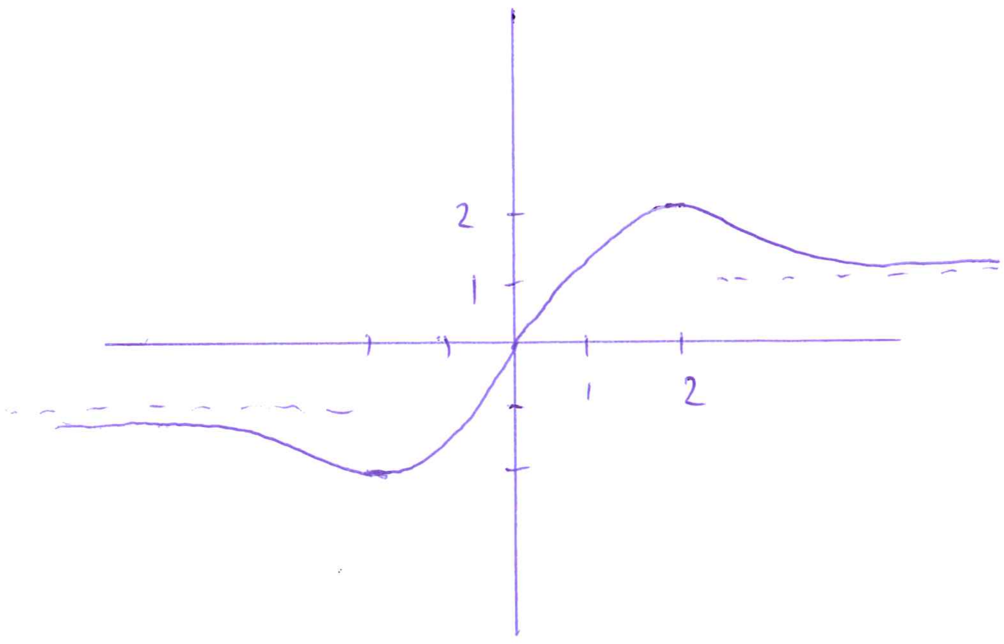
5. $|\sin(x)| < x^7 < e^x < e^{5x}$

$|\sin(x)| \leq 1$

x^7 polynom,
men e^x exponentialfunktion

$\frac{e^{5x}}{e^x} = e^{4x} \to \infty$ då $x \to \infty$.

6.



7. $f(x) = x^2 + \cos(x)$ $\quad f(0) = 1$

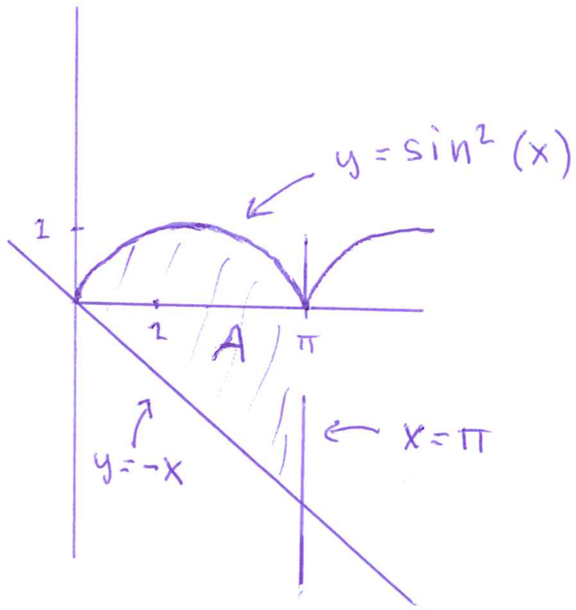
$f'(x) = 2x - \sin(x)$ $\quad f'(0) = 0$

$f''(x) = 2 - \cos(x)$ $\quad f''(0) = 1$

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2$$

8.



$$A = \int_0^{\pi} \left(\sin^2(x) - (-x)\right) dx =$$

$$= \int_0^{\pi} \left(\sin^2(x) + x\right) dx$$

9. $\int (\cos(2x) - e^x)\,dx = \frac{\sin(2x)}{2} - e^x + C$

$$\int_0^\pi (\cos(2x) - e^x)\,dx = \left[\frac{\sin(2x)}{2} - e^x\right]_0^\pi =$$

$$= \left(\frac{\sin(2\pi)}{2} - e^\pi\right) - \left(\frac{\sin(2\cdot 0)}{2} - \underbrace{e^0}_{=1}\right) =$$

$$= -e^\pi + 1 = 1 - e^\pi$$

10. $\lim\limits_{a\to 0+} \int_a^1 \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{= x^{-1/2}}\,dx = \lim\limits_{a\to 0+} \left[2 \underbrace{x^{1/2}}_{= \sqrt{x}}\right]_a^1 =$

$$= \lim_{a\to 0+} (2 - 2\underbrace{\sqrt{a}}_{\to 0}) = 2$$

11. $f(x)$ är kontinuerlig och deriverbar på $[0, 2]$, så max/min antas

i endpunkter eller eventuella kritiska punkter.

<u>kritiska punkter:</u>

$$f(x) = xe^{-x} \Rightarrow f'(x) = e^{-x} + (-xe^{x}) = (1-x)e^{-x},$$

produkt-regeln

så $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$. $\quad f(1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$

<u>Endpunkter:</u>

$f(0) = 1$, $f(2) = 2 \cdot e^{-2} = \frac{2}{e^2}$

$0 < \frac{2}{e^2} < \frac{1}{e}$, så det största

eftersom $e > 2$

värde $f(x)$ antar är $f(1) = \frac{1}{e}$.

Det minsta värde $f(x)$ antar är $f(0) = 0$.

12. $y = 4x$ har lutning "k-värde" 4.

Vi bestämmer ett värde på a så att

$f'(0) = 4$.

$$f'(x) = a\cos(ax) + a + 2ax$$

$$\Rightarrow f'(0) = 2a \Rightarrow a = 2.$$

13. $$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1 + \cos(x)}{x^2 + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - 1/x^2 + \frac{\cos(x)}{x^2}}{1 + 1/x^2} = 1$$

$$\left.\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3) \\ \sin(x) &= x + \mathcal{O}(x^3) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - \sin(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + x + x^2/2 - 1 - x + \mathcal{O}(x^3)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2/2 + \mathcal{O}(x^3)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{2} + \mathcal{O}(x)\right) = \frac{1}{2}.$$

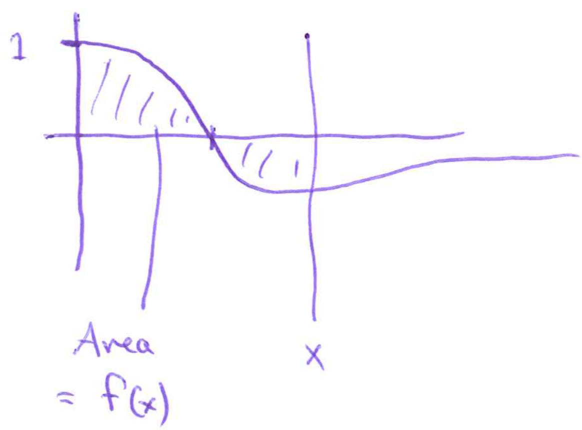
14. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{\sin(x)} \cos(x)\,dx =$

$$\left[\text{sätt } u = \sin(x) \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos(x) \Rightarrow du = \cos(x)\,dx\right]$$

$$x = 0 \Rightarrow u = 0 \qquad x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 1$$

$$= \int_0^1 e^u\,du = \left[e^u\right]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$$

15. $\displaystyle f(x) = \int_0^x \underbrace{(1-t^2)e^{-t^2}}_{\substack{\text{positivt då } t<1, \\ \text{men negativt då } t>1}} dt$



Därför antar $f(x)$ sitt största värde då $x = 1$