Lösningsförslag

Derivator och integraler
2012-08-20

1.

$$\lim_{x \to 0} \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{x} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{e^x} = 0 \cdot 1 = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \Big(\underset{\substack{\downarrow \\ \infty}}{x} + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{1}{x}} \Big) = \infty$$

(divergerar mot ∞)

2.

$$f'(x) = 1 \cdot \cos(x) + x \cdot (-\sin(x)) =$$

$$= \cos(x) - x\sin(x) \quad \text{(Produktregeln)}$$

$$g'(x) = \cos(x) e^{\sin(x)} \quad \text{(kedjeregeln)}$$

3.

$$f'(x) \underset{\substack{\nearrow \\ \text{kvotregeln}}}{=} \frac{\cos(x) \cdot x - \sin(x) \cdot 1}{x^2},$$

så tangentlinjens lutning i $(\pi, f(\pi))$ är

$$f'(\pi) = \frac{-1 \cdot \pi - 0 \cdot 1}{\pi^2} = -\frac{1}{\pi}$$

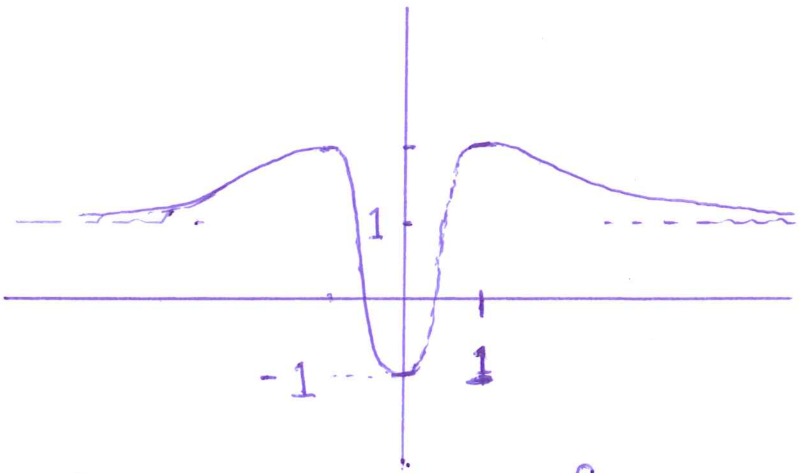
4. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ då $x \in (0, \infty)$,

så $f(x)$ är strängt växande på $[0, \infty)$, och därför även inverterbar på $[0, \infty)$.

$y = \sqrt{x} \Rightarrow x = y^2$, så $f^{-1}(x) = x^2$.

5. $\ln(x) < \sqrt[3]{x} = x^{1/3} < \sqrt{x} = x^{1/2} < e^x$

6.



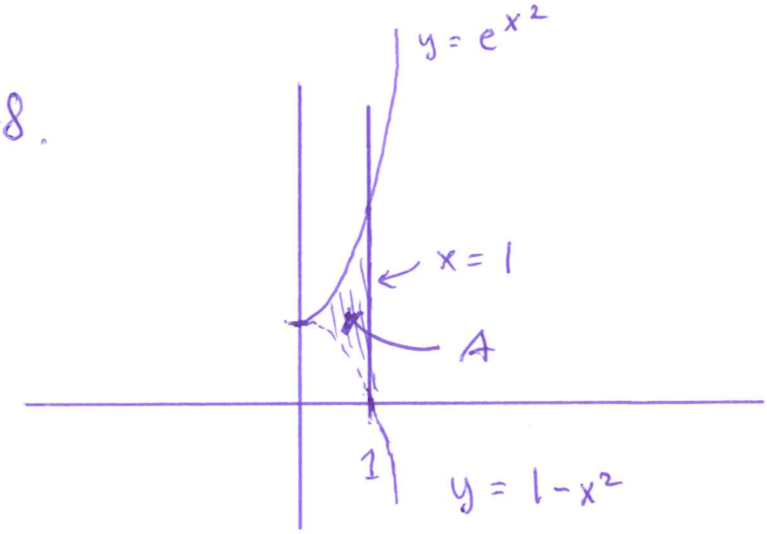
7. $f(x) = x^3 + \sin(x)$ $\quad f(0) = 0$

$f'(x) = 3x^2 + \cos(x)$ $\quad f'(0) = 1$

$f''(x) = 6x - \sin(x)$ $\quad f''(0) = 0$

$P_2(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)x^2}{2} = x$

8.



$$A = \int_0^1 \left(e^{x^2} - (1-x^2)\right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(e^{x^2} + x^2 - 1\right) dx$$

9. $$\int (e^{2x} - \sin(x))\, dx = \frac{e^{2x}}{2} + \cos(x) + C$$

$$\int_0^{\pi/2} (e^{2x} - \sin(x))\, dx = \left[\frac{e^{2x}}{2} + \cos(x)\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{e^{\pi}}{2} + 0 - \underbrace{\left(\frac{e^0}{2} + 1\right)}_{\frac{3}{2}} = \frac{e^{\pi} - 3}{2}$$

10. $$\int_a^1 \frac{1}{x^2}\, dx = \int_a^1 x^{-2}\, dx = \left[-x^{-1}\right]_a^1 = \left[-\frac{1}{x}\right]_a^1 =$$

$$= -1 - \left(-\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a} - 1 \to \infty, \text{ då } a \to 0+$$

så integralen divergerar mot $+\infty$

11. $f(x)$ kont. och deriverbar på $[0, \pi]$,
så vi behöver kontrollera endpunkter
och stationära punkter
(där $f'(x) = 0$).

$$f(x) = e^{x+\cos(x)}$$

$$f'(x) = (1-\sin(x))\underset{\neq 0}{e^{x+\cos(x)}}, \quad \text{så}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \sin(x) = 0 \underset{x \in [0,\pi]}{\Rightarrow} x = \frac{\pi}{2}$$

$$f(0) = e \quad \leftarrow \text{min}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\pi/2}$$

$$f(\pi) = e^{\pi} \quad \leftarrow \text{Max}$$

12. Cirkeln kan beskrivas med ekvationen $x^2 + y^2 = 1$. $(*)$

Implicit derivering ger

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = -y\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{= -\sqrt{3}} = \sqrt{3}\,y \qquad (**)$$

Insättning i $(*)$ $\Rightarrow$ $3y^2 + y^2 = 1$

$$\Leftrightarrow \quad y^2 = \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm\frac{1}{2}$$

$(**) \Rightarrow$ $\quad y = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\quad y = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

så punkterna på cirkeln med en ~~tangent~~ med lutning $-\sqrt{3}$ är

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ och $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

13. $$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x - 2} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x^2+1)}{\cancel{(x-2)}} = 5$$

polynom-
division

$$f(x) = \ln(1-x) \qquad f(0) = \ln(1) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1-x} \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad f''(0) = 1 \quad , \quad \text{så}$$

$$\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3).$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1-x) - x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3) - x}{x^2} =$$

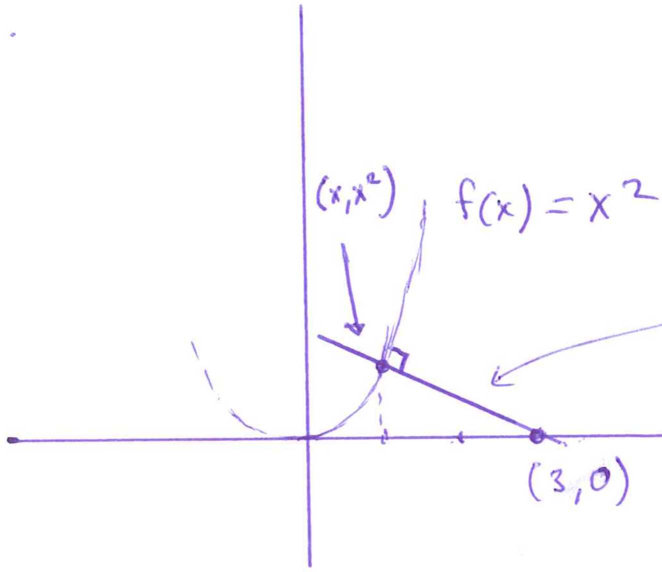
$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2} + \frac{\mathcal{O}(x^3)}{x^2}}{1} = \frac{1}{2}$$

14. $$\int_0^1 x^2 e^x \, dx = \underbrace{\left[x^2 e^x\right]_0^1}_{e - 0 = e} - \int_0^1 2x e^x \, dx =$$

$$= e - \left(\underbrace{\left[2x e^x\right]_0^1}_{2e - 0 = 2e} - \int_0^1 2 e^x \, dx \right) =$$

$$= -e + \int_0^1 2 e^x \, dx = -e + \underbrace{\left[2e^x\right]_0^1}_{2e - 0 = 2e} = e$$

15.



lutning $-\frac{1}{x^2}$, men också $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x^2-0}{x-3}$

$f'(x) = 2x$. $\Rightarrow$

lutning för normallinje genom (x, x^2) är $-\frac{1}{2x}$. Vi vill

hitta normallinjen som går genom $(3,0)$.

Ekv. för lutning enl. bild

$$\Rightarrow \frac{x^2}{x-3} = -\frac{1}{2x}$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 = 3 - x \Leftrightarrow 2x^3 + x - 3 = 0$$

$$2x^2+2x+3 = 2(x^2+x)+3 = 2\left(\left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{4}\right)+3 = 2\left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}$$

En lösn. är $x = 1$, så vi faktoriserar

$$2x^3+x-3 = (x-1)\underbrace{(2x^2+2x+3)}_{\neq 0 \text{ för alla } x} \Rightarrow x=1 \text{ enda lösningen}$$

Så $(1,1)$ är närmaste punkt. Avståndsformeln

ger: $d = \sqrt{(1-3)^2+(1-0)^2} = \underline{\underline{\sqrt{5}}}$