

Skrivtid: 8–13. Tillåtna hjälpmedel: Bara pennor, radergummi, linjal och papper (det sistnämnda tillhandahålles). *Betygsgränser:* Minst 16 poäng på del 1 och minst 20 poäng sammanlagt ger (minst) betyg 3; minst 16 poäng på del 1 och minst 30 poäng sammanlagt ger (minst) betyg 4; minst 18 poäng på del 1 och minst 37 poäng sammanlagt ger betyg 5.

Del 1

Varje uppgift, från 1 till 10, ger maximalt 2 poäng; alltså maximalt 20 poäng på denna del. Otydligt skrivna svar ger inte full poäng.

1. Bestäm om följande gränsvärden existerar och ange vad de är i så fall:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x \quad \text{och} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \cos x.$$

2. Beräkna derivatan av var och en av funktionerna

$$f(x) = \ln(x^2 + 1) \quad \text{och} \quad g(x) = (x^2 - 1)e^{3x}.$$

3. Vad har tangentlinjen till grafen till $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ för lutning i punkten $x = 2$?

4. Beskriv ett så stort intervall som möjligt där $f(x) = x^4$ är inverterbar (dvs. har en invers), och ange ett uttryck som beskriver inversen till f på detta intervall.

5. Man säger att en funktion f växer snabbare än en funktion g om $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$. Ordna följande funktioner från vänster till höger, så att funktioner som växer snabbare kommer till höger om funktioner som växer långsammare:

$$x, \quad 10^6\sqrt{x}, \quad \ln x, \quad 2^{3x+1}.$$

6. Gör en så bra skiss som möjligt av grafen till funktionen f med hjälp av informationen att f har följande egenskaper:

- f och f' är deriverbara i varje punkt $x \in \mathbb{R}$,
- $f'(0) = f'(2) = 0$, $f(0) = 2$,
- f' är positiv på intervallet $(0, 2)$,
- f' är negativ på intervallen $(-\infty, 0)$ och $(2, \infty)$,
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ och $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$.

7. Beräkna Taylor-polynomet av grad 2 för $f(x) = \cos x$ kring punkten $x = 0$.

8. Antag att f och g är kontinuerliga funktioner på intervallet $[a, b]$ (där $a < b$) och att $f(x) \geq g(x)$ för alla $a \leq x \leq b$. Hur beräknas, med hjälp av integraler, arean som innesluts av linjerna $x = a$ och $x = b$ och kurvorna $y = f(x)$ och $y = g(x)$?

9. Beräkna $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin(2x)) dx$.

10. Bestäm om $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ är konvergent och beräkna dess värde i så fall.

Del 2 på nästa sida

Del 2

Varje uppgift, från 11 till 15, ger maximalt 5 poäng; alltså maximalt 25 poäng på denna del. Utöver svar så krävs fullständiga och tydligt skrivna lösningar i denna del.

11. Vilka värden kan funktionen $f(x) = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$ anta? Beskriv det med hjälp av intervall.

12. Bestäm konstanten a så att ellipserna som beskrivs av ekvationerna $(x-a)^2 + 4y^2 = 1$ och $(x+a)^2 + 4y^2 = 1$ skär varandra i räta vinklar (90 grader); med andra ord, där de skär varandra skall kurvornas tangentlinjer vara vinkelräta mot varandra.

13. Beräkna gränsvärdena

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) - 1}{\sin(x^2)} \quad \text{och} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)^{752}}{\ln(1+x)}$$

(I den mån Taylor-utvecklingar är det lättaste sättet att lösa uppgiften så räcker det med att ta fram termer upp till högst grad 2.)

14. Ett observatorium skall ha en cylinderformad kropp vars (cirkelformade) botten har radien 5 meter och vars höjd är 5 meter; ovanpå detta skall ett tak finnas som har formen av ett halvklot med radien 5 meter. Beräkna byggnadens volym genom att använda integraler och rotationskroppar (och *inte* genom att använda färdiga formler för cylindrars eller klots volymer).

15. Om en kon med cirkulär bottenyta skall få plats inuti ett klot med radien 2, vilken är den största volym som konen kan ha? Det är tillåtet att använda faktumet att en kon vars bottenyta är cirkulär med radien r och vars höjd är h har volymen $\frac{\pi r^2 h}{3}$ (vilket för övrigt kan härledas med hjälp av integraler och rotationskroppar).

Lycka till!