

Skrivtid: 8–13. Tillåtna hjälpmedel: Bara pennor, radergummi, linjal och papper (det sistnämnda tillhandahålles). *Betygsgränser:* Minst 16 poäng på del 1 och minst 20 poäng sammanlagt ger (minst) betyg 3; minst 16 poäng på del 1 och minst 30 poäng sammanlagt ger (minst) betyg 4; minst 18 poäng på del 1 och minst 37 poäng sammanlagt ger betyg 5.

Del 1

Varje uppgift, från 1 till 10, ger maximalt 2 poäng; alltså maximalt 20 poäng på denna del. Otydligt skrivna svar ger inte full poäng.

1. Bestäm om följande gränsvärden existerar och ange vad de är i så fall:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \sin \frac{1}{x} \quad \text{och} \quad \lim_{x \rightarrow 0+} x \sin \frac{1}{x}.$$

2. Beräkna derivatan av

$$f(x) = e^{(x^2)} \sin x \quad \text{och} \quad g(x) = \frac{1}{\sin x}.$$

3. Antag att f är deriverbar på intervallet $[0, 2]$ och att tangentlinjen till kurvan $y = f(x)$ i punkten $(x, y) = (1, f(1))$ har lutning -5 . Bestäm värdet $f'(1)$? (Alltså, vilket tal är $f'(1)$ lika med?)

4. Antag att funktionen f är injektiv på hela den reella tallinjen. Beskriv med ord och figur hur kurvan $y = f^{-1}(x)$ (där f^{-1} betecknar inversen till f) förhåller sig till kurvan $y = f(x)$.

5. Man säger att en funktion f växer snabbare än en funktion g om $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$. Ordna följande funktioner från vänster till höger, så att funktioner som växer snabbare kommer till höger om funktioner som växer långsammare:

$$3^x, \quad x^2, \quad \log_5 x, \quad x^3.$$

6. Antag att funktionen f är deriverbar överallt och att f har följande egenskaper:

- $f'(1) = f'(2) = f'(3) = 0$,
- f' är positiv på intervallen $(1, 2)$ och $(3, \infty)$,
- f' är negativ på intervallen $(-\infty, 1)$ och $(2, 3)$, och
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ och $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

Ange om f har något lokalt maximivärde, något globalt maximivärde, lokalt minimivärde och/eller något globalt minimivärde.

7. Beräkna Taylor-polynomet av grad 2 för $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ kring punkten $x = 1$.

8. Beräkna

$$\int (x - \frac{1}{x}) dx \quad \text{och} \quad \int_1^2 (x - \frac{1}{x}) dx.$$

Fortsätter på nästa sida

9. Värdet av integralen $\int_1^2 (x - \frac{1}{x}) dx$ är lika med arean av ett område i xy -planet. Beskriv detta område genom att ange hur det begränsas av kurvor och/eller linjer.

10. Funktionen $g(x) = \frac{1}{x^{1/3}}$ är definierad på intervallet $(0, \infty)$, men inte i $x = 0$. Så den generaliserade integralen $\int_0^1 \frac{1}{x^{1/3}} dx$ betyder samma sak som $\lim_{a \rightarrow 0+} \int_a^1 \frac{1}{x^{1/3}} dx$. Avgör om integralen (nedan) är konvergent och bestäm dess värde i så fall:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{1/3}} dx.$$

Del 2

Varje uppgift, från 11 till 15, ger maximalt 5 poäng; alltså maximalt 25 poäng på denna del. Utöver svar så krävs fullständiga och tydligt skrivna lösningar i denna del.

11. Betrakta kurvan $y = x^4$. För varje punkt på kurvan (x, y) , $x \neq 0$, så har kurvan en normallinje som skär y -axeln i exakt en punkt $(0, p)$. Vad är det kortaste möjliga avståndet mellan $(0, 0)$ och $(0, p)$?

12. Kurvan $y = -x^2 + 3$, linjen $y = 2x$ och y -axeln innesluter ett begränsat område i xy -planet. Beräkna volymen av den (syl-liknande) rotationskropp som uppstår då detta område roterar kring y -axeln.

13. Beräkna gränsvärdena

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^3 + 3x^2 - x - 3} \quad \text{och} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x^2) - e^{(x^2)}}{x \sin x}$$

(I den mån Taylor-utvecklingar är till hjälp så kan man först ta fram termer av högst grad 2 för möjligen något enklare funktioner, och sedan eventuellt substituera.)

14. Låt $f(x) = x^2 e^{-x^2}$.

(a) Skissa grafen till f .

(b) Beskriv mängden av alla värden som f kan anta?

15. Följande är känt om den överallt deriverbara funktionen h och kurvan $y = h(x)$:

- $h(0) = 1$, $h(1) = -1$, och

- det finns en konstant k så att i varje punkt $(x, y) = (x, h(x))$ på kurvan $y = h(x)$ så är tangentlinjens lutning lika med kx .

Bestäm funktionen h fullständigt.

Lycka till!