

Skrivtid: 14-19

Tillåtna hjälpmedel: Penna, radergummi, linjal och papper.

Betygsgränser: För betyget 3 krävs 15 poäng på den första delen. För betyget 4 krävs 15 poäng på den första delen, samt 30 poäng sammanlagt. För betyget 5 krävs 15 poäng på den första delen, samt 37 poäng sammanlagt. Varje uppgift på del 1 ger maximalt 2 poäng. Varje uppgift på del 2 ger maximalt 5 poäng. Otydligt skrivna svar ger ej full poäng.

Samtliga lösningar på den andra delen skall vara försedda med utförliga förklaringar.

Del 1

1. Bestäm om följande gränsvärden existerar och ange vad de är i sådana fall:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{och} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$$

2. Beräkna derivatan av följande funktioner:

$$f(x) = e^{x^2+1} \quad \text{och} \quad g(x) = x^4 \ln(x).$$

3. Vad har tangentlinjen till grafen till funktionen $f(x) = x^4 + 1$ för lutning i punkten $(1, f(1))$?
4. Ange ett så stort intervall som möjligt där funktionen $f(x) = x^2 + 1$ är inverterbar (dvs. har en invers), och ange ett uttryck som bestämmer inversen till $f(x)$ på detta intervall.
5. Man säger att en funktion f växer snabbare än en funktion g om $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$. Ordna följande funktioner från vänster till höger, så att funktioner som växer snabbare kommer till höger om funktioner som växer långsammare:

$$e^{x^2}, \quad \cos(x) + 2, \quad \sqrt{x}, \quad x^2.$$

(VÄND!)

6. Gör en så bra skiss som möjligt av grafen till funktionen f med hjälp av följande information:

- f är definierad för alla x , utom $x = 0$, och f är deriverbar i alla punkter där f är definierad.
- Derivatans enda nollställen är $f'(-1) = 0$ och $f'(1) = 0$.
- $f(-1) = 0$ och $f(1) = -2$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$, och $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$.

7. Beräkna Taylorpolynomet av grad 2 för $f(x) = x + \sin(x)$ kring punkten $x = 0$.

8. Värdet av integralen $\int_2^4 (x^2 - x) dx$ är lika med arean av ett område i xy -planet. Beskriv detta område genom att ange hur det begränsas av kurvor och/eller linjer.

9. Beräkna

$$\int \left(\frac{1}{x} - \sin(x)\right) dx \quad \text{och} \quad \int_1^\pi \left(\frac{1}{x} - \sin(x)\right) dx.$$

10. Bestäm om $\int_1^\infty \frac{1}{x^3} dx$ är konvergent och om den är det, beräkna dess värde.

Del 2

11. Vad är det största respektive minsta värde funktionen

$$f(x) = \frac{e^{x^2-1}}{x^2+1}$$

antar på intervallet $[0, 1]$.

12. Bestäm konstanten m så att linjen $y = 2x + m$ skär grafen till funktionen $f(x) = x^4 + 1$ vinkelrät i någon punkt.

13. Bestäm gränsvärdena

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^3 - x} \quad \text{och} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}.$$

För att bestämma det andra gränsvärdet kan man Taylorutveckla $\ln(1+x)$ upp till ordning 2.

14. Bestäm integralen $\int_0^\pi \cos(x)e^x dx$, förslagsvis genom att använda partiell integration två gånger.

15. Vad är minsta arean av ett triangulärt område, som begränsas av x -axeln, y -axeln och ytterligare en linje, och som innehåller delen av grafen till $f(x) = 1 - x^2$, där $x \in [0, 1]$. Grafen $y = f(x)$ ska alltså ligga innanför triangeln då $x \in [0, 1]$.

Lycka till!