

Skrivtid: 8-13

Tillåtna hjälpmedel: Penna, radergummi, linjal och papper.

Betygsgränser: För betyget 3 krävs 15 poäng på den första delen. För betyget 4 krävs 15 poäng på den första delen, samt 30 poäng sammanlagt. För betyget 5 krävs 15 poäng på den första delen, samt 37 poäng sammanlagt. Varje uppgift på del 1 ger maximalt 2 poäng. Varje uppgift på del 2 ger maximalt 5 poäng. Otydligt skrivna svar ger ej full poäng.

Samtliga lösningar på den andra delen skall vara försedda med utförliga förklaringar.

Del 1

1. Bestäm om följande gränsvärden existerar och ange vad de är i sådana fall:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)e^x \quad \text{och} \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2}.$$

2. Beräkna derivatan av följande funktioner:

$$f(x) = (x^2 + 1)e^x \quad \text{och} \quad g(x) = \ln(\sin(x)).$$

3. Vad har tangentlinjen till grafen till funktionen $f(x) = \cos(x) + x^2$ för lutning i punkten $(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2}))$?
4. Ange ett så stort intervall som möjligt där funktionen $f(x) = 2e^x + 1$ är inverterbar (dvs. har en invers), och ange ett uttryck som bestämmer inversen till $f(x)$ på detta intervall.
5. Man säger att en funktion f växer snabbare än en funktion g om $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$. Ordna följande funktioner från vänster till höger, så att funktioner som växer snabbare kommer till höger om funktioner som växer långsammare:

$$e^{5x}, \quad |\sin(x)|, \quad e^x, \quad x^7.$$

(VÄND!)

6. Gör en så bra skiss som möjligt av grafen till funktionen f med hjälp av följande information:

- $f(x)$ är definierad för alla x och $f(x)$ är kontinuerlig och deriverbar för alla x .
- $f(x)$ är en udda funktion.
- Derivatans enda nollställen är $f'(-2) = 0$ och $f'(2) = 0$.
- $f(2) = 2$.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$.

7. Beräkna Taylorpolynomet av grad 2 för $f(x) = x^2 + \cos(x)$ kring punkten $x = 0$.

8. Beskriv med hjälp av en integral arean av området som begränsas av kurvan $y = \sin^2(x)$ och linjerna $y = -x$, $x = \pi$. Obs: man behöver ej räkna ut integralen.

9. Beräkna

$$\int (\cos(2x) - e^x) dx \quad \text{och} \quad \int_0^\pi (\cos(2x) - e^x) dx.$$

10. Funktionen $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ är definierad på intervallet $(0, \infty)$, men inte i $x = 0$. Så den generaliserade integralen $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ betyder samma sak som $\lim_{a \rightarrow 0+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$. Avgör om integralen är konvergent och bestäm dess värde i så fall.

Del 2

11. Vad är det största respektive minsta värde funktionen $f(x) = xe^{-x}$ antar på intervallet $[0, 2]$?

12. Bestäm konstanten a så att linjen $y = 4x$ blir tangent till funktionen

$$f(x) = \sin(ax) + ax + ax^2$$

i punkten $x = 0$.

13. Bestäm gränsvärdena

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1 + \cos(x)}{x^2 + 1} \quad \text{och} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - \sin(x)}{x^2}.$$

För att bestämma det andra gränsvärdet kan man Taylorutveckla e^x och $\sin(x)$ upp till ordning 2.

14. Bestäm integralen $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin(x)} \cos(x) dx$.

15. Funktionen $f(x)$ definieras som $f(x) = \int_0^x (1-t^2)e^{-t^2} dt$ på intervallet $[0, \infty)$. För vilket x antar $f(x)$ sitt största värde?

Lycka till!