

Skrivtid: 14-19

Tillåtna hjälpmedel: Penna, radergummi, linjal och papper.

Betygsgränser: För betyget 3 krävs 15 poäng på den första delen. För betyget 4 krävs 15 poäng på den första delen, samt 30 poäng sammanlagt. För betyget 5 krävs 15 poäng på den första delen, samt 37 poäng sammanlagt. Varje uppgift på del 1 ger maximalt 2 poäng. Varje uppgift på del 2 ger maximalt 5 poäng. Otydligt skrivna svar ger ej full poäng.

Samtliga lösningar på den andra delen skall vara försedda med utförliga förklaringar.

Del 1

1. Bestäm om följande gränsvärden existerar och ange vad de är i sådana fall:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x e^x \quad \text{och} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + \frac{1}{x}\right).$$

2. Beräkna derivatan av följande funktioner:

$$f(x) = x \cos(x) \quad \text{och} \quad g(x) = e^{\sin(x)}.$$

3. Vad har tangentlinjen till grafen till funktionen $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ för lutning i punkten $(\pi, f(\pi))$?
4. Ange ett så stort intervall som möjligt där funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ är inverterbar (dvs. har en invers), och ange ett uttryck som bestämmer inversen till $f(x)$ på detta intervall.
5. Man säger att en funktion f växer snabbare än en funktion g om $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$. Ordna följande funktioner från vänster till höger, så att funktioner som växer snabbare kommer till höger om funktioner som växer långsammare:

$$e^x, \quad \ln(x), \quad \sqrt{x}, \quad \sqrt[3]{x}.$$

(VÄND!)

6. Gör en så bra skiss som möjligt av grafen till funktionen f med hjälp av följande information:

- $f(x)$ är definierad för alla x och $f(x)$ är kontinuerlig och deriverbar för alla x .
- $f(x)$ är en jämn funktion.
- Derivatans enda nollställen är $f'(-1) = 0$, $f'(0) = 0$ och $f'(1) = 0$.
- $f(-1) = 2$ och $f(0) = -1$.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$.

7. Beräkna Taylorpolynomet av grad 2 för $f(x) = x^3 + \sin(x)$ kring punkten $x = 0$.

8. Beskriv med hjälp av en integral arean av området som begränsas av kurvorna $y = e^{x^2}$, $y = 1 - x^2$ och linjen $x = 1$. Obs: man behöver ej räkna ut integralen.

9. Beräkna

$$\int (e^{2x} - \sin(x)) dx \quad \text{och} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{2x} - \sin(x)) dx.$$

10. Funktionen $f(x) = \frac{1}{x^2}$ är definierad på intervallet $(0, \infty)$, men inte i $x = 0$. Så den generaliserade integralen $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$ betyder samma sak som $\lim_{a \rightarrow 0+} \int_a^1 \frac{1}{x^2} dx$. Avgör om integralen är konvergent och bestäm dess värde i så fall.

Del 2

11. Vad är det största respektive minsta värde funktionen $f(x) = e^{x+\cos(x)}$ antar på intervallet $[0, \pi]$?

12. I vilka punkter på cirkeln med radie 1 och medelpunkt i origo, har tangentlinjen lutning $-\sqrt{3}$?

13. Bestäm gränsvärdena

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x - 2} \quad \text{och} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - x) - x}{x^2}.$$

För att bestämma det andra gränsvärdet kan man Taylorutveckla $\ln(1 - x)$ upp till ordning 2.

14. Bestäm integralen $\int_0^1 x^2 e^x dx$.

15. Bestäm det minsta avståndet mellan grafen till $f(x) = x^2$ och punkten $(3, 0)$. Kom ihåg att linjen som realiserar det minsta avståndet från en kurva till en punkt är vinkelrät mot kurvan!

Lycka till!