Matematik MN2, analysdelen, HT 05.
Bonusövning 1 (gränsvärden och relaterat material)

• 1. Gränsvärden, räkneuppgifter. (4 x 2p = 8p)
Beräkna följande gränsvärden (om de existerar, eller visa att de inte existerar)

(a) $\displaystyle\lim_{u\to 4} \frac{u^2+u-20}{u-4}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}$

(c) $\displaystyle\lim_{v\to\infty} \frac{1}{\sqrt{v^2-v}-v}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2}{x+1}-\frac{4x^2+1}{2x-1}\right)$

• 2. Bevis mha. definitionen av gränsvärde. (4p)
Låt $f(x)$ och $g(x)$ vara funktioner. Antag att $f(x)$ är kontinuerlig i $x = L$ och att $\lim_{x\to c} g(x) = L$. Bevisa *endast med hjälp av definitionen av gränsvärde* att

$$\lim_{x\to c} f(g(x)) = f(L).$$

• 3. Kontinuerliga funktioner. (3p+3p=6p)
(a) Visa att ekvationen $e^x = x^3$ har minst en rot i intervallet $1 < x < 2$ och minst en rot i intervallet $4 < x < 5$.
(b) Om

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 2 \\ \sqrt{x+a} & x \geq 2, \end{cases}$$

bestäm ett värde på a så att $f(x)$ blir kontinuerlig i punkten $x = 2$.

• 4. Gränsvärden för följder, räkneuppgifter (4 x 2p=8p).
Beräkna följande gränsvärden (om de existerar, eller visa att de inte existerar)

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-5n-12}{2n^2-1}$ (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (-1)^n (n+2)^{100} 2^{-n}$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n-5}\right)$, (d) (svår!) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^{n!}}{n^{n^n}}$

(Angående nämnaren i (d), observera att " a^{b^c} " alltid betyder $a^{(b^c)}$, och *ej* $(a^b)^c$; detta är naturligt eftersom $(a^b)^c$ ju ändå kan skrivas på ett enklare sätt: $(a^b)^c = a^{bc}$.)

För godkänt: Minst 16p (av totalt 26p).

Inlämnas senast: 13 september, på föreläsningen. (Lösningarna kan även lämnas tidigare i mitt postfack, tredje våningen hus 3 på Polacksbacken.)

Matematik MN2, analysdelen, HT 05.
Lösningar till bonusövning nr 2

• 1. (a)

$$\frac{u^2+u-20}{u-4} = \frac{(u-4)(u+5)}{u-4} = \frac{(u+5)}{1} \to 9 \qquad \text{då } u \to 4.$$

Svar: 9.

(b). Insättning av $x = 0$ ger täljaren $\sqrt{1+0} = 1$ och nämnaren $\sqrt{1+0^2} - \sqrt{1-0^2} = 0$; alltså är gränsvärdet av typen $\frac{1}{0}$. Detta betyder att gränsvärdet inte existerar.

Svar: Existerar ej.

(c).

$$\frac{1}{\sqrt{v^2-v}-v} = \frac{\sqrt{v^2-v}+v}{(\sqrt{v^2-v}-v)\cdot(\sqrt{v^2-v}+v)} = \frac{\sqrt{v^2-v}+v}{(v^2-v)-v^2}$$
$$= -\frac{\sqrt{v^2-v}+v}{v} = -\sqrt{1-1/v}-1 \to -2 \qquad \text{då } v \to \infty.$$

Svar: -2.

(d).

$$\left(\frac{2x^2}{x+1} - \frac{4x^2+1}{2x-1}\right) = \frac{2x^2(2x-1)-(4x^2+1)(x+1)}{(x+1)(2x-1)}$$
$$= \frac{4x^3-2x^2-4x^3-4x^2-x-1}{(x+1)(2x-1)} = \frac{-6x^2-x-1}{2x^2+x-1}$$
$$= \frac{-6-1/x-1/x^2}{2+1/x-1/x^2} \to -3 \qquad \text{då } x \to \infty.$$

Svar: -3.

• 2. Låt talet $\epsilon > 0$ vara givet. Eftersom $f(x)$ är kontinuerlig i $x = L$ så gäller $\lim_{x\to L} f(x) = f(L)$. Alltså finns det ett tal $\delta > 0$ så att

$$(*) \qquad 0 < |x-L| < \delta \quad \text{implicerar} \quad |f(x)-f(L)| < \epsilon.$$

Eftersom $f(L)$ existerar så ser vi att undantagsfallet $|x-L| = 0$ inte är något problem; där gäller ju $|f(x)-f(L)| = 0 < \epsilon$. Alltså kan (**)

nu omformuleras lite, till:

$$(**) \qquad |x-L|<\delta \quad \text{implicerar} \quad |f(x)-f(L)|<\epsilon.$$

Vidare, eftersom $\lim_{x\to c} g(x) = L$ så finns ett tal $\nu > 0$ så att

$$0<|x-c|<\nu \quad \text{implicerar} \quad |g(x)-L|<\delta.$$

Men observera att enligt (**) gäller att $|g(x) - L| < \delta$ implicerar $|f(g(x)) - f(L)| < \epsilon$. Sammantaget ger detta:

$$0<|x-c|<\nu \quad \text{implicerar} \quad |f(g(x))-f(L)|<\epsilon.$$

Ovanstående resonemang fungerar för alla $\epsilon > 0$.

Alltså gäller

$$\lim_{x\to c} f(g(x)) = f(L),$$

V.S.B.

• 3. (a) Sätt $f(x) = e^x - x^3$. Då är $f(x)$ en kontinuerlig funktion. Vi beräknar:

$$\begin{aligned} f(1) &= e^1 - 1^3 = 1.718... > 0; \\ f(2) &= e^2 - 2^3 = -0.610... < 0; \\ f(4) &= e^4 - 4^3 = -9.401... < 0; \\ f(5) &= e^5 - 5^3 = 23.413... > 0. \end{aligned}$$

Enligt satsen om mellanliggande värde finns det alltså ett $x \in (1, 2)$ för vilket $f(x) = 0$, och det finns ett $x \in (4, 5)$ för vilket $f(x) = 0$. Med andra ord; ekvationen $e^x - x^3 = 0$ har minst en rot i intervallet $1 < x < 2$ och minst en rot i intervallet $4 < x < 5$, VSB.

(b) Observera att för $x = 2$ är $x^2 = 4$ och $\sqrt{x+a} = \sqrt{2+a}$. Vi väljer alltså a så att $\sqrt{2+a} = 4$, dvs $a = 14$. Då blir

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2-} f(x) &= \lim_{x\to 2-} x^2 = 4; \\ \lim_{x\to 2+} f(x) &= \lim_{x\to 2+} \sqrt{x+14} = \sqrt{16} = 4; \end{aligned}$$

och därmed

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4.$$

Vidare är $f(2) = \sqrt{2+14} = \sqrt{16} = 4$. Alltså blir $f(x)$ kontinuerlig i punkten $x = 2$ då vi har valt $a = 14$.

Svar: $a = 14$.

• 4. (a)

$$\frac{3n^2-5n-12}{2n^2-1}=\frac{3-5/n-12/n^2}{2-1/n^2}=\frac{3}{2}\qquad \text{då } n\to\infty.$$

Svar: $\frac{3}{2}$.

(b) Byt variabel $m=n+2$ (så $n=m-2$). Då blir gränsvärdet:

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n(n+2)^{100}2^{-n}=\lim_{m\to\infty}(-1)^{m-2}m^{100}2^{2-m}=\lim_{m\to\infty}4(-1)^m\cdot\frac{m^{100}}{2^m}=0,$$

eftersom $\lim_{m\to\infty}\frac{m^{100}}{2^m}=0$ (standardgränsvärde).
Svar: 0.

(c)

$$\sqrt{n+5}-\sqrt{n-5}=\frac{(\sqrt{n+5}-\sqrt{n-5})(\sqrt{n+5}+\sqrt{n-5})}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n-5}}$$
$$=\frac{(n+5)-(n-5)}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n-5}}=\frac{10}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n-5}}\to 0\qquad \text{då } n\to\infty.$$

Svar: 0.

Alternativ lösning: Skriv $a_n=\sqrt{n+5}$ och $b_n=\sqrt{n-5}$. Då är $a_n\to\infty$ och $b_n\to\infty$ medan $a_n^2-b_n^2=(n+5)-(n-5)=10$ hela tiden! Vi ska utnyttja detta för att visa att $a_n-b_n\to 0$.

För detta kan vi använda konjugatregeln:

$$a_n-b_n=\frac{(a_n-b_n)(a_n+b_n)}{a_n+b_n}=\frac{a_n^2-b_n^2}{a_n+b_n}=\frac{10}{a_n+b_n}\to 0\quad \text{då}\quad n\to\infty,$$

eftersom $a_n\to\infty$ och $b_n\to\infty$.
Alltså:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+5}-\sqrt{n-5})=\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0.$$

Klart!
(Man kan anmärka att den andra lösningen är precis samma som första lösningen, förutom att vi har infört lite andra beteckningar. Men det är nog en annan idé som ledde fram till den andra lösningen.)

(d) Vi har $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1 \leq n \cdot n \cdot n \cdots n = n^n$, alltså

$$(*) \qquad 0 \leq \frac{(n!)^{n!}}{n^{n^n}} \leq \frac{(n^n)^{n!}}{n^{n^n}} = \frac{n^{n \cdot n!}}{n^{n^n}} = n^{n \cdot n! - n^n}.$$

Men vi har

$$\begin{aligned} n \cdot n! &= n \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1 \qquad &(n+1 \text{ faktorer}) \\ &= n \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \qquad &(n \text{ faktorer}) \\ &\leq n^{n-1} \cdot 2 = 2n^{n-1}. \end{aligned}$$

Alltså:

$$n \cdot n! - n^n \leq 2n^{n-1} - n^n = (2-n) \cdot n^{n-1} \to -\infty \qquad \text{då } n \to \infty.$$

Alltså $n \cdot n! - n^n \to -\infty$ då $n \to \infty$, och därmed

$$n^{n \cdot n! - n^n} \to 0 \qquad \text{då } n \to \infty.$$

Nu kan vi använda instängningssatsen (boken s.523, stora blå rutan, nedersta raden. Jfr även s.69 Theorem 4): Vår uträkning (*) ovan säger att vi har stängt in $\frac{(n!)^{n!}}{n^{n^n}}$ mellan två talföljder (0 och $n^{n \cdot n! - n^n}$) som båda går mot 0. Alltså:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(n!)^{n!}}{n^{n^n}} = 0.$$

Svar: Talföljden konvergerar mot 0.