Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
L. Larsson, A. Strömbergsson

Prov i matematik
Matematik MN2
2004-10-27

Skrivtid: 9–14
Hjälpmedel: Kort formelsamling (bifogad) och manuella skrivdon.

Varje problem ger 4 poäng.

Problem 1–5 svarar mot inlämningsuppgifterna, med samma nummer. *Om Du redan har godkänt på en viss inlämningsuppgift så ska Du inte göra motsvarande problem (bland 1–5) nedan, utan Du får automatiskt 4 poäng för detta problem.*

• 1. Bestäm alla komplexa tal z som uppfyller ekvationen

$$z^3 = \frac{8}{\sqrt{2}}(1+i).$$

• 2. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1} - \sqrt{x^2+x}\right)$.

• 3. Ange Taylorpolynomet $P_3(x)$ av grad 3 för funktionen

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

kring $x = 1$. Använd $P_3(x)$ för att ge ett ungefärligt värde av $f(0{,}9)$, och använd Lagranges felterm för att ange en övre begränsning på felet. (Svaren kan ges som korta uttryck, dvs Du behöver ej räkna ut i decimalform.)

• 4. Beräkna gradienten till $f(x,y,z) = \sin(x\cos y)\cdot\cos(z\cos y)$ och ange riktningsderivatan $D_{\mathbf{u}}f(x,y,z)$ i $(x,y,z) = (\pi,0,0)$ för $\mathbf{u} = \frac{1}{3}(1,2,2)$.

• 5. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & -2 & 9 \\ -4 & -8 & 16 \end{bmatrix}$$

och

$$\overline{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

(a) Visa att $\overline{x}_1$ är en egenvektor till A.
(b) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till A.
(c) Ange en inverterbar matris P och en diagonalmatris D sådana att

$$A = PDP^{-1}.$$

Problem 6–10 är inte tillgodoräknade för någon skrivande.

• 6. Lös följande differentialekvation fullständigt:

$$f''(t) + f'(t) - 6f(t) = t^2 - 3.$$

• 7. Vilka av följande serier konvergerar? Vilka konvergerar absolut?

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!}$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^{n+5}}{(n)^{2n}}$, c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+4}}$, d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+4n}{n^2+1}.$

• 8. Beräkna avståndet mellan linjerna

$$l_1 : \overline{x} = (-2, 1, 3) + s(2, 1, -2)$$

och

$$l_2 : \overline{x} = (-1, 6, 2) + t(4, -1, -1).$$

• 9. Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som projicerar alla punkter ortogonalt på det plan i $\mathbb{R}^3$ som ges av ekvationen

$$x - 4y + 2z = 0.$$

(a) Bestäm T:s avbildningsmatris i standardbasen.
(b) Ge en förklaring till varför matrisen är symmetrisk/osymmetrisk.

• 10. Bestäm det största och det minsta värde som funktionen

$$f(x, y) = \frac{xy}{(x + 2y)^2}$$

antar i det område som definieras av $x \geq 1$, $y \geq 1$, $x^3 + y^3 \leq 28$.

LYCKA TILL!

FORMELSAMLING till tentan 27/10-04, Matematik MN2

Standardgränsvärden och serier

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^p}{e^x} = 0, \qquad \text{för alla } p.$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0, \qquad \text{för alla } p > 0.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad \text{är} \quad \begin{cases} \text{divergent} & \text{om } p \leqq 1 \\ \text{konvergent} & \text{om } p > 1 \end{cases}$$

Taylorutvecklingar

Taylorpolynomet av grad n till $f(x)$ vid $x = a$:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

Lagranges felterm:

$$E_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(T)}{(n+1)!}(t-a)^{n+1},$$

där T är något tal mellan a och t.

Taylorutvecklingar som gäller då x är nära 0:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + O(x^{n+1})$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + O(x^{n+1})$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + +(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+3})$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O(x^{2n+3})$$

Övrigt

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0