UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Fredrik Strömberg och Leo Larsson

Prov i matematik
Fristående kurs
Matematik MN2
2003-08-21

Skrivtid: 8.00–13.00 Lösningar ska åtföljas av förklarande text.
Hjälpmedel: formelsamling och manuella skrivdon

1. Lös ekvationen $z^4 = -81i$.

(3)

2. Beräkna skärningslinjen mellan de två planen

$$\pi_1 : x + 2y + 3z = 4 \quad \text{och} \quad \pi_2 : 5x + 6y + 7z = 8.$$

(4)

3. Avgör huruvida de två linjerna

$$\ell_1 : (1,2,3) + t(4,5,6) \quad \text{och} \quad \ell_2 : (1,1,1) + t(1,2,3).$$

har en skärningspunkt eller ej.

(4)

4. Bestäm matrisen i standardbasen för den linjära avbildningen $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som ges av ortogonal projektion på planet

$$\pi : (x,y,z) = s(3,0,-1) + t(4,-2,0)$$

(5)

5. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} xf'_y - yf'_x = 0 \\ f(x,0) = x^2 \end{cases}$$

genom att införa polära koordinater.

(5)

6. Vilka av följande serier konvergerar? Vilka konvergerar absolut?

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^n}, \text{ b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}}{n!+n^2}, \text{ c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n!)} \text{ d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+n^2+1}{3^n}$$

(4)

7. Undersök om följande gränsvärden existerar eller inte och beräkna dem om de existerar.

$$\text{a) } \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)-x^2}{x^4} \quad \text{b) } \lim_{T\to\infty} \frac{\log T}{\log(\log T)}$$

$$\text{c) } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(\ln(1+x^2y^2))}{\cos(xy)-1} \quad \text{d) } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{y+1}}{x-y}$$

(5)

8. Taylorutveckla t o m termer av ordning 2 funktionerna nedan i de angivna punkterna:

a) $f(x,y,z) = e^{xyz}(1-\arctan(x^2+y^2+2z^2))$ kring punkten $(0,0,0)$

b) $f(x,y) = \ln(2x^2+y^2)-2y$ kring punkten $(0,1)$.

(5)

9. Hitta maximum och minimum för funktionen

$$f(x,y) = (x+y)^3$$

då (x,y) har samma avstånd till linjen $x=0$ (y-axeln) som till punkten $(1,0)$.

(5)

Lösningar till tentamen i Matematik MN2 2003-08-21

Lösning till problem 1. Skriv om på polär form $-16i = re^{i\theta}$ med $r = 16$ och $\theta = \theta_n = \pi + \frac{\pi}{2} + 2n\pi = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$, där $n = 0, 1, 2, 3$ (övriga värden ger samma punkter) $z = \rho e^{\phi_k}$ ges då av $\rho = \sqrt[4]{16} = 2$, och $\phi_k = \frac{1}{4}\theta_n = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} = \frac{3+4k}{8}\pi$, där $k = 0, 1, 2, 3$.

Lösning till problem 3. På skärningslinjen måste båda ekvationerna gälla, dvs den första ger att $x = 3y - 2z$, stoppa in det i den andra ekvationen ger $0 = 2(3y-2z) + y + 5z = 7y + z$, dvs skärningslinjen har ekvationen $7y + z = 0$. Låt nu z vara parametern $z = t$. Då blir $y = -\frac{1}{7}t$ och $x = 3y - 2z = -\frac{3}{7}t - 2t = -\frac{17}{7}t$ och om vi bryter ut $\frac{1}{7}$får vi en parameterframställning $(x, y, z) = t(-17, -1, 7)$, där $t \in \mathbb{R}$.

Lösning till problem 4. Som bas kan vi använda vektorerna $u = (1, -1, 1)$, $v = (0, 1, 1)$ i planet som du vet fixeras av projektionen (och de är redan ortogonala) samt $w = u \times v = (-2, -1, 1)$, deras kryssprodukt som är normal till planet och därmed avbildas på $(0, 0, 0)$. Ställ sedan upp ekvationssystemet $F(u) = u$, $F(v) = v$ och $F(w) = 0$. Använd lineariteten hos F för att göra om det till ett ekvationssystem i de obekanta $F(e_1), F(e_2)$ samt $F(e_3)$ där e_1, e_2, e_3 betecknar standardbasen i $\mathbb{R}^3$. Du får då en matrisekvation med $X = (F(e_1)F(e_2)F(e_3))^t$ $AX = B$, lös denna på lämpligt sätt, t.ex. genom att bara lösa det som ett vanligt ekvationssystem eller genom matrisräkning vilket slutligen resulterar i

$$(F(e_1)F(e_2)F(e_3)) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Lösning till problem . Derivera och använd kedjeregeln leder till ekvationen

$$f'_\theta = 0$$

dvs $f(x, y) = h(r)$och $f(x, 0) = h(|x|) = x^2$ ger $h(x) = x^2$ och alltså $f(x, y) = x^2 + y^2$