UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Christer Kiselman
018-4713216 (a); 018-300708 (b); 0708-870708 (m)

PROV I MATEMATIK
Transformer för beräkningar
2000 05 22, 09:00–14:00
000522tent

Tillåtna hjälpmedel: Ordlista 2000 05 09 (eller senare version).
Formelsamling 2000 05 17 (eller senare version). Skrivdon.

Svara på svenska eller annat språk.

1. Let a and b be two vectors in $l^2(\mathbf{Z}_3)$, a given by its Fourier transform $\hat{a} = (1, 2, 0)$, and $b = (1, \omega, \omega^2)$, where $\omega = e^{-2\pi i/3} = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}$.

(a) Calculate $\hat{b}$. (3)

(b) Calculate $a * b$. (3)

2. Study the convolution equation $b * z = w$, where b is a given vector in $l^1(\mathbf{Z})$ (the black box), z is the input signal and w is the output signal. The problem is to decide which output signals w are possible with certain black boxes b.

(a) Let $b = \delta_0 + \delta_1 + \delta_2$, $w = \delta_0 + \delta_1$. Prove that there is no solution z to the equation $b * z = w$ such that $z(j) = 0$ for all large $|j|$. (2)

(b) Now let $b = \delta_0 + \delta_1$, $w = \delta_0 + 2\delta_1 + \delta_2$. Prove that there exists an input signal z such that $b * z = w$ and such that $z(j) = 0$ for all large values of $|j|$. (2)

(c) Finally let $b = \delta_0 + \delta_1$, $w = \delta_0$. Find all solutions $z \in l^\infty(\mathbf{Z})$ to $b * z = w$. (2)

3. Suppose we know that $b \in l^2(\mathbf{Z}_6)$ satisfies $\hat{b}(0) = 0$, $\hat{b}(k) \neq 0$, $k = 1, ..., 5$.

(a) What is the dimension of the space of input signals producing the zero output signal, in other words, what is the dimension of the space

$$\{z \in l^2(\mathbf{Z}_6);\ b * z = 0\}? \qquad (3)$$

(b) Determine the dimension of all possible output signals, i.e., the dimension of the space

$$\{b * z;\ z \in l^2(\mathbf{Z}_6)\}. \qquad (3)$$

4. Let $u = (2, 0, 1)$, $v = (0, 4, 3)$, $z = (2, 0, 0, 4, 1, 3)$. Compute $\hat{u}$, $\hat{v}$ and then $\hat{z}$ using the fast Fourier transform. (5)

Var god vänd. *Please turn over.* $\to \to \to$

5. Let $u, v \in l^2(\mathbf{Z}_8)$ be the vectors

$$u = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \quad v = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0, 0, 0, 0, 0, 0).$$

(The first-stage Haar basis.)

(a) Prove that the vectors $R_{2k}u, R_{2k}v$, $k = 0, 1, 2, 3$, form an orthonormal system in $l^2(\mathbf{Z}_8)$. (3)

(b) Define

$$P(z) = \sum_{k=0}^{3} \langle z, R_{2k}u \rangle R_{2k}u, \qquad Q(z) = \sum_{k=0}^{3} \langle z, R_{2k}v \rangle R_{2k}v.$$

Calculate $P(z)$ and $Q(z)$ when $z = (1, 2, 4, 6, 10, 12, 10, 8)$. (3)

6. Suggest an $O(N \log N)$ algorithm for computing matrix-vector multiplication, assuming the matrix to be Toeplitz. (Recall that the elements of a Toeplitz matrix are constant along diagonals. A circulant matrix is Toeplitz but not necessarily conversely.) (6)

7. Define $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ by $f(x) = 1 - \|x\|_2^2$ when $\|x\|_2 < 1$, $f(x) = 0$ when $\|x\|_2 \geqslant 1$. Calculate the Radon transform $\varphi = \mathcal{R}f$ of f, i.e., calculate $\varphi(\omega, p)$ for $\omega = (\cos\theta, \sin\theta) \in S^1$, $p \in \mathbf{R}$. (5)

Svar med korta anvisningar om hur man kan lösa uppgifterna

1. Man finner att $\hat{b} = (0, 0, 3)$. Därför blir den punktvisa produkten $\hat{a}\hat{b}$ av $\hat{a}$ och $\hat{b}$ noll. Och därför även $a * b = 0$ eftersom dess Fouriertransform är just $\hat{a}\hat{b}$.

2. I (a) vet man att $z(n) + z(n-1) + z(n-2) = 0$ för alla $n \neq 0, 1$. Om man startar med ett stort n och går nedåt så ger detta $z(n) = 0$ för alla $n \geqslant 0$. Om man startar med ett stort negativt index och går uppåt, så får man $z(n) = 0$ för alla $n \leqslant -1$. Alltså skulle $z = 0$, vilket motsäger ekvationen för $n = 0, 1$.

I (b) gissar man lätt att $z = \delta_0 + \delta_1$ ger en lösning.

I (c) ser man att en godtycklig lösning kan skrivas som en summa $z = x + cy$, där $x(n) = 0$, $n \leqslant -1$, $x(n) = (-1)^n$, $n \geqslant 0$, där $y(n) = (-1)^n$ och där c är ett godtyckligt komplext tal. (Vektorn x löser ekvationen $b * x = \delta_0$ medan y löser den homogena ekvationen $b * y = 0$.)

3. Man ser att det första rummet har dimensionen 1 (ekvationen $\hat{b}\hat{z} = 0$ bestämmer $z(1), z(2), z(3), z(4), z(5)$ men inte $z(0)$), det andra dimensionen 5 ($\hat{b}(n)\hat{z}(n)$ kan anta godtyckliga värden för $n = 1, 2, 3, 4, 5$ men inte för $n = 0$).

4. Man räknar ut att $\hat{u} = (3, 2 + \omega^2, 2 + \omega)$ och $\hat{v} = (7, 4\omega + 3\omega^2, 3\omega + 4\omega^2)$, där ω är som i uppgift 1. Med tekniken från den snabba Fouriertransformen ger detta att

$$\begin{aligned}
\hat{z}(0) &= \hat{u}(0) + \hat{v}(0) = 10,\\
\hat{z}(1) &= \hat{u}(1) + \theta\hat{v}(1) = -2 - 3\omega + \omega^2 = -3 - 4\omega,\\
\hat{z}(2) &= \hat{u}(2) + \omega\hat{v}(2) = 6 + \omega + 3\omega^2 = 3 - 2\omega,\\
\hat{z}(3) &= \hat{u}(0) - \hat{v}(0) = -4,\\
\hat{z}(4) &= \hat{u}(1) - \theta\hat{v}(1) = 6 + 3\omega + \omega^2 = 5 + 2\omega,\\
\hat{z}(5) &= \hat{u}(2) - \omega\hat{v}(2) = -2 + \omega - 3\omega^2 = 1 + 4\omega,
\end{aligned}$$

där $\theta = e^{-i\pi/3} = -\omega^2$; $\theta^2 = \omega$, $\theta^3 = -1$, $\theta^4 = \omega^2$, $\theta^5 = -\omega$. (Man kan förstås beräkna $\hat{z}$ direkt också.)

5. Att visa (a) är rutin. För (b) så vet man (eller räknar ut) att $P(z)$ ges av medelvärdena av talen två och två, alltså $P(z) = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 5, 5, 11, 11, 9, 9)$, medan $Q(z)$ är den information som behöver läggas till för att få z, alltså $Q(z) = z - P(z) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, 1, -1, 1, 1, -1)$.

6. Man kan bygga ut en $N \times N$ Toeplitzmatris A till en $2N \times 2N$ cyklisk matris C genom att dra ut diagonalerna. Och för en cyklisk matris vet man att produkten med en vektor är en faltning, som i sin tur kan beräknas medelst den snabba Fouriertransformationen, varvid det räcker med $O(N \log N)$ multiplikationer.

7. Man ser att $\varphi(\omega, p)$ är oberoende av ω. Det handlar om att integrera den positiva delen av en parabel som eventuellt sticker upp ovanför planet $z = 0$. Man vet att ett sådant parabelsegment fyller ut två tredjedelar av den omskrivna rektangeln. Basen är $2\sqrt{1 - p^2}$ och höjden är $1 - p^2$. Alltså blir svaret $\mathcal{R}f(\omega, p) = \varphi(\omega, p) = \frac{4}{3}(1 - p^2)^{3/2}$ då $|p| < 1$; $\varphi(\omega, p) = 0$ då $|p| \geqslant 1$.