UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Christer Kiselman
018-4713216 (a); 018-300708 (b); 0708-870708 (m)

PROV I MATEMATIK
Transformer för beräkningar
2000 08 23, 08:00–13:00
000823tent

Tillåtna hjälpmedel: Ordlista 2000 05 09. Formelsamling 2000 05 21. Skrivdon.
Svara på svenska eller annat språk.

1. Låt a och b vara två vektorer i $l^2(\mathbf{Z}_4)$; $a = (1, -i, -1, i)$ medan b är given av sin Fouriertransform $\hat{b} = (8, 7, 5, 0)$.

(a) Beräkna $\hat{a}$. (3)

(b) Beräkna $a * b$. (3)

2. Vi studerar två svarta lådor B och C, som definieras av $b, c \in l^2(\mathbf{Z}_3)$ och av relationerna $u = b * z$ och $v = c * z$ mellan insignalen $z \in l^2(\mathbf{Z}_3)$ och utsignalerna $u, v \in l^2(\mathbf{Z}_3)$. Antag att $b = (1, 1, -2)$ och $c = (1, 1, 1)$.

(a) Visa att kännedom om $u = b * z$ inte är tillräcklig för att rekonstruera insignalen z, dvs. visa att det finns en insignal $z \neq 0$ som ger utsignal u lika med noll. (3)

(b) Visa att kännedom om både $u = b * z$ och $v = c * z$ räcker för att rekonstruera z. Skriv upp en formel som ger $\hat{z}$ i termer av $\hat{u}$ och $\hat{v}$. (3)

3. Låt $u = (1, 0, 2, 0)$, $v = (0, 3, 5, 0)$, $z = (1, 0, 0, 3, 2, 5, 0, 0)$. Beräkna $\hat{u}$, $\hat{v}$ och sedan $\hat{z}$, till exempel med hjälp av den snabba Fouriertransformationen. (6)

4. Låt $u \in l^2(\mathbf{Z}_N)$, där $N = 2M$, och definiera $v \in l^2(\mathbf{Z}_M)$ genom $v(n) = u(n) + u(n + M)$, $n = 0, 1, ..., M - 1$. Bevisa att $\hat{v}(n) = \hat{u}(2n)$ för alla $n \in \mathbf{Z}_M$. (5)

5. Finn det polynom av grad 1 som bäst approximerar funktionen e^{-2x} i rummet $L^2(\mathbf{R}, e^{-x^2})$, dvs. det rum där man definierar Hermitepolynomen och som har inre produkt

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbf{R}} f(x)\overline{g(x)}e^{-x^2}\,dx.$$

Det får anses vara känt att $\langle 1, 1 \rangle = \sqrt{\pi}$. (6)

6. Definiera $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ genom $f(x) = 1$ då $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} < 1$, $f(x) = 0$ då $\|x\|_2 \geqslant 1$. Beräkna Radontransformen $\varphi = \mathcal{R}f$ av f, dvs. beräkna $\varphi(\omega, p)$ då $\omega \in S^2$, $p \in \mathbf{R}$. (5)

7. Betrakta en filterbanktransform av $z \in \mathbf{Z}_N$, där $N = 2^p$ och den grövsta nivån hos transformen har $N_0 = 2^q$ punkter, oberoende av N. Antag att filtren har samma antal element som inte är noll på alla nivåer. Visa att transformen kan beräknas med $O(N)$ aritmetiska operationer. (6)

Svar med korta anvisningar om hur man kan lösa uppgifterna

1. Man finner att $\hat{a} = (0,0,0,4)$. Därför blir den punktvisa produkten $\hat{a}\hat{b} = (0,0,0,0)$ och även $a * b = (0,0,0,0)$, eftersom dess Fouriertransform är $\hat{a}\hat{b}$.

2. Man finner att $\hat{b} = (3,0,0)$, $\hat{c} = (0, -3\omega^2, -3\omega)$, där $\omega = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$. Därför är $\hat{u}(0) = 3\hat{z}(0)$, $\hat{u}(1) = \hat{u}(2) = 0$ för alla z; man kan rekonstruera $\hat{z}(0)$ men inte $\hat{z}(1)$ eller $\hat{z}(2)$. Insignalen $z = (1, \omega, \omega^2)$ har Fouriertransform $(0,0,3)$ och ger alltså utsignal noll från den svarta lådan B. Vi har också $\hat{v}(1) = -3\omega^2\hat{z}(1)$ och $\hat{v}(2) = -2\omega\hat{z}(2)$. Vi kan rekonstruera $\hat{z}$ och därmed z genom formlerna $\hat{z}(0) = \frac{1}{3}\hat{u}(0)$, $\hat{z}(1) = -\frac{1}{3\omega^2}\hat{v}(1)$, $\hat{z}(2) = -\frac{1}{3\omega}\hat{v}(2)$.

3. Man finner lätt att $\hat{u} = (3, 2+i, 1, 2-i)$, $\hat{v} = (8, -2, 8, -2)$, varav följer att $\hat{z} = (11, 2+i-2\theta, 1+8\theta^2, 2-i-2\theta^3, -5, 2+i+2\theta, 1-8\theta^2, 2-i+2\theta^3)$, där $\theta = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$, således $z = (11, 2-\sqrt{2}+i+\sqrt{2}i, 1-8i, 2-i+\sqrt{2}(1+i), -5, 2+i+\sqrt{2}(1-i), 1+8i, 2-i-\sqrt{2}(1+i))$.

4. Inför $\omega = e^{-2\pi i/M}$ och $\theta = e^{-2\pi i/N}$, så att $\omega^M = 1$, $\theta^N = 1$, $\omega = \theta^2$. Då blir

$$\hat{v}(n) = \sum_0^{M-1} u(k)\omega^{kn} + \sum_0^{M-1} u(k+M)\omega^{kn} = \sum_0^{N-1} u(k)\theta^{2kn} = \hat{u}(2n), \qquad n \in \mathbf{Z}_M.$$

5. Man söker polynomet på formen $a + bx$ och undersöker när skillnaden $a + bx - e^{-2x}$ är ortogonal mot alla polynom av grad 1. Det inträffar precis då $a = \langle e^{-2x}, 1\rangle / \langle 1, 1\rangle$ och $b = \langle e^{-2x}, x\rangle / \langle x, x\rangle$. Man behöver därför beräkna de inre produkterna $\langle 1, 1\rangle = \sqrt{\pi}$, $\langle e^{-2x}, 1\rangle = e\sqrt{\pi}$, $\langle e^{-2x}, x\rangle = -e\sqrt{\pi}$ samt $\langle x, x\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. (Utgående från den första inre produkten beräknas den andra medelst translation och den tredje och fjärde medelst partiell integration.) Det följer att $a = e$, $b = -2e$. Svar alltså $e(1-2x)$.

6. Man ser att $\varphi(\omega, p)$ är oberoende av ω. Planet $\omega \cdot x = p$ skär ut en cirkelskiva med radien $r = \sqrt{1-p^2}$ av enhetsklotet om $|p| < 1$; skivans area $\pi r^2 = \pi(1-p^2)$ är just värdet hos Radontransformen. Då $|p| \geqslant 1$ blir förstås $\varphi(\omega, p) = 0$.

7. Antalet aritmetiska operationer är proportionellt mot $\sum_{k=q}^{p} N/2^k$, som kan uppskattas sålunda:

$$\sum_{k=q}^{p} \frac{N}{2^k} \leqslant \sum_{k=0}^{p} \frac{N}{2^k} = \sum_{k=0}^{p} 2^{p-k} = 2^{p+1} - 1 = O(N).$$