

Digita geometrio, matematika morfologio kaj diskreta optimumado

Tridekkvara Sanmarineca Universitata Sesio (SUS 34) de
Akademio Internacia de la Sciencoj San Marino (AIS)
Varsovio, 2017 septembro 10–15
Warszawska Szkoła Zarządzania, Szkoła Wyższa

Christer Oscar Kiselman
Dekano de la Sekcio por Struktursciencoj de AIS

Enhavo

Ĉapitro 1. Teleskopo kaj mikroskopo por la intelekto	2
Ĉapitro 2. Unuaj klarigoj	4
2.1. Geometrio eŭklida	4
2.2. Geometrio digita	6
2.3. Morfologio matematika	9
2.4. Optimumado diskreta	12
2.5. Konvekseco	13
Ĉapitro 3. Modeloj bazitaj sur la reelaj nombroj kompare al modeloj diskretaj	18
3.1. Meĥaniko ĉiela	18
3.2. La diskreta estas plurmiljara	19
3.3. Diskreteco en la fiziko	20
3.4. Koloroj	20
3.5. Digita telefonio, muziko kaj televido	21
3.6. Ĉu diskreta tempo?	21
3.7. Fonologio	23
3.8. Komparo de du kalkuloj	30
3.9. Ekzemploj de diskretigoj de rektoj	32
Ĉapitro 4. Tri problemoj en diskreta optimumado	33
4.1. Enkonduko	33
4.2. Difinoj	34
4.3. Problemo unua: lokaj minimumoj ne estas ĉieaj	36
4.4. Problemo dua: mankanta konvekseco de marĝenaj funkcioj	36
4.5. Problemo tria: ĉu ekzistas disigantaj hiperebenoj?	37
4.6. Solvo de la unua problemo: iuj lokaj minimumoj estas ĉieaj ...	37
4.7. Solvo de la dua problemo: konvekseco de marĝenaj funkcioj ...	37
4.8. Solvo de la tria problemo: ekzisto de disigantaj hiperebenoj ...	38
Ĉapitro 5. Kiel rekoni rektojn kaj strekojn inter ĉiuj kurboj kaj aliaj bildoj sur la komputila ekrano?	39
Ĉapitro 6. La teoremo de Jordan en digita geometrio	51
Ĉapitro 7. Diskretigo kaj tropikigo: kiel ili rilatas?	54
Ĉapitro 8. Postparolo	65
Referencoj	66

1. Ĉapitro unua: Teleskopo kaj mikroskopo por la intelekto

1.1. Teleskopo kaj mikroskopo ... kaj granda kultura trezoro

Laŭ la vortoj de Jan Boman (1991:23) la matematiko estas por la intelekto kio estas la teleskopo por la okulo: ĝi plivastigas la atingokapablon de la intelekto; ĝi ebligas al ni kompreni pli longe kaj pli profunde. Oni povas kompari ĝin ankaŭ al la mikroskopo — vidi la plej etajn detalojn, distingi inter alimaniere nerimarkeblaj logikaj nuancoj.

Multo en la nin ĉirkaŭanta mondo estas konstruita surbaze de matematiko, sed tiu ĉi estas ofte nevidebla en siaj multaj aplikoj, kaj ĝia rolo tial ofte forgesita. Kun Tosun Terzioğlu (1942–2016) ni povas aserti ke la matematiko estas granda riĉo, kiu meritas esti pli bone konata:

We should strive to increase the awareness of our young people, that throughout history we have created a tremendous amount of human wealth—in music, literature, architecture, philosophy and in mathematics. These human values, when taught properly, will infuse a new sense of pride and confidence in ourselves, a new hope for a better and peaceful life on our planet. We should revise the unfulfilled dream of von Humboldt and try to make it come true. (Terzioğlu 2002)

^(T)¹ Ni strebu al kresko de la konscio ĉe niaj junaj homoj ke, tra la tuta historio, ni estis kreantaj nekredeble grandan trezoron de homa riĉo — en muziko, literaturo, arkitekturo, filozofio kaj en matematiko. Tiuj homaj valoroj, se taŭge instruataj, infuzos en nin novan senton de fiero kaj konfido, novan esperon por pli bona kaj paca vivo sur nia planedo. Ni reviziu la neplenumitan revon de von Humboldt kaj klopodu fari ĝin vera.

Tiu ĉi aserto de li kompreneble enhavas opinion pri la malnova demando ĉu la matematiko estas malkovrita aŭ inventita.

1.2. La matematiko estas neŭtrala ... sen limoj ... kaj sen rasoj

La matematikistoj okupas multajn ĉambrojn kaj multajn spacojn, sed ili havas ankaŭ proprajn sociajn ĉambrojn. Ili staras iom flanke de la cetera scienco, kaj eĉ pli fore de multaj aliaj sociaj aktivecoj. Mi povas bedaŭri tion, sed eble necesas ke tiel estu: por vidi klare kaj povi kritiki oni devas stari iom for de la rigardataĵo.

La matematiko estas neŭtrala: ĝi povas esti uzata same por malbonaj kaj bonaj celoj. Tial ĉiuj kiuj kreas aŭ uzas matematikon havas apartan respondecon.

Tute ne gravas ĉu la suno iras ĉirkaŭ la tero aŭ male — tiom longe kiom oni pritraktas nur tiujn ĉi du korpojn: simpla transformo de koordinatoj konektas la du aspektojn. La matematiko estas neŭtrala tiom longe. Sed se oni atentigas ankaŭ aliajn planedojn, tiam unu el la hipotezoj fariĝas multe pli simpla ol la alia, kaj simpleco estas forta gvidanto en la serĉado.

¹La simbolo ^(T) indikas tradukon fare de mi.

Same ne tre gravas se la tero estas fiksa meze de rotacianta ĉielo aŭ rotacias — se oni ne bezonas fari ian iom pli malfacilan kalkulon. Sed la forto de Coriolis, nomata pro Gaspard-Gustave Coriolis (1792–1843), kiu influas ĉiujn ventojn sur la tero, fariĝas nekomprenebla sur tero kiu ne rotacias. Komprenebleco same estas fidela gvidanto.

Tiel la matematiko kapablas montri al ni la vojon per simpleco kaj komprenebleco kiel gvidaj steloj. Iom malprecize oni kutime resumas tiujn ecojn kiel belon. Ni sekvu belon!

Ekzistas aliaj matematikoj nomataj etnomatematikoj. Ili havas kulturalan valoron, sed en la nuna scienco ili ne tre gravas. Mi nun ne pritraktas tiun temon.

1.3. La veroj de la matematiko estas universalaj kaj eternaj ... aŭ?

La rezultoj de la matematiko havas vastan atingopovon en la tempospaco:

Our conclusions are true, unconditionally and eternally. The Babylonians' quadratic formula and the Greeks' proof of the irrationality of $\sqrt{2}$ are true even in the Large Magellanic Cloud. (Nathanson 2008:773)

^(T) Niaj konkludoj estas veraj, senkondiĉe kaj eterne. La kvadrata formulo de la babilonanoj² kaj la pruvo de la neracionaleco³ de $\sqrt{2}$ veras eĉ en la Granda magelana nubo.

Sed eble ŝtele eniras dubeto:

Still, there is a nagging worry about this belief in mathematical certitude.

[...]

The reason is that many great and important theorems don't actually have proofs. They have sketches of proofs, outlines of arguments, hints and intuitions that were obvious to the author (at least, at the time of writing) and that, hopefully, are understood and believed by some part of the mathematical community. (Nathanson 2008:773)

^(T) Tamen, ekzistas riproĉanta zorgo pri tiu kredo en la matematika certo.

[...]

La kaŭzo estas ke multaj grandaj kaj gravaj teoremoj fakte ne havas pruvojn. Ili havas skizojn de pruvoj, siluetojn de argumentoj, sugestojn kaj intuiciaĵojn kiuj estis evidentaj por la verkinto (almenaŭ dum la tempo de verkado) kaj kiuj, espereble, estas komprenataj kaj kredataj de iu parto de la matematika komunumo.

Jes, tiel estas. Sed laŭlonge de la skalo inter ŝanĝemo kaj konstanteco la matematiko, inter ĉiuj sciencoj, kredeble estas tiu kiu situas plej proksime al la dua finpunkto.⁴

Dankesprimoj

Małgorzata Komarnicka, Reinhard Fößmeier kaj Probal Dasgupta sendis al mi komentojn kaj korektojn, kaj Tsvi Sadan helpis min pri japanaj terminoj. Pro tiu grava helpo mi estas tre danka.

²La babilonanoj trovis la laterojn x_1 kaj x_2 de rektangulo kun perimetro $2a$ kaj areo b . Tiu problemo estas egalvalora al la ekvacio de dua grado $x^2 - ax + b = 0$.

³Se ni havus $(p/q)^2 = 2$ por iuj pozitivaj entjeroj p kaj q , ne ambaŭ paraj, tiam $p^2 = 2q^2$, kaj oni vidas ke tio ne eblas.

⁴Tiu ĉi ĉapitro estas iom modifita traduko de parteto de mia artikolo (2015b).

2. Ĉapitro dua: Unuaj klarigoj

2.1. Geometrio eŭklida

Kio estas geometrio? La origina signifo de la greka vorto γεωμετρία estas ‘termezurado’, farita el la vortoj γῆ(ς) ‘tero’ kaj μετρεῖν ‘mezuri’ aŭ μέτρον⁽ⁿ⁾ ‘mezuro’. Laŭ vaste konata klarigo oni bezonis tiun arton aŭ teĥnikon por trovi la limojn inter la kampoj post la ĉiujaraj inundoj de la rivero Nilo. Sed nun ni pensas pli pri la geometrio de Eŭklido (greke Εὐκλείδης), aktiva inter proksimume 325 kaj proksimume 265 a.K. aŭ eble poste⁵ en Aleksandrio, en Μουσεῖον (Muséjon), kredeble la plej bona esplorinstituto iam ekzistanta. Li verkis la plej sukcesan lernolibron de ĉiuj epokoj, Στοιχεῖα (Stojhėja) ‘Elementoj’, pli konatan kiel *Elementa* laŭ sia traduko en latinon. Li estis majstro de la aksioma metodo: el aksiomoj oni per rigora rezonado sekvigas teoremojn.

Ni povas studi geometrion en du, tri, kvar, . . . , dimensioj — eĉ en nefiniaj dimensioj. Temas pri punktoj, rektoj, kurboj, ebenaĵoj, surfacoj, . . . , plurlateroj, pluredroj, . . . , cirkloj, diskoj, sferoj, globoj, . . .

Kartezio (René Descartes, Cartesius), vivanta inter 1596 kaj 1650, faris revolucion en la traktado de geometriaj figuroj: li provizis la punktojn per koordinatoj; oni povas diri ke li nombrizis la geometrion. Ĉiu punkto en la ebenaĵo ricevas dank’ al li adreson, kiu estas paro de nombroj. Ni do havas en la ebenaĵo du koordinatojn, la *abscison* x_1 kaj la *ordinaton* x_2 . La origino havas la adreson $(0, 0)$, kio signifas ke $x_1 = 0$ kaj $x_2 = 0$. En la tri-dimensia spaco oni bezonas tri koordinatojn (x_1, x_2, x_3) kaj en n -dimensia spaco n koordinatojn (x_1, x_2, \dots, x_n) . Ĉi tie la koordinatoj estas reelaj nombroj, t.e. la nombroj kiuj povas esti donitaj per ciferoj kaj decimaloj, kiel

$$3,141592653589793238462643383279502884197 \dots,$$

kie la tri finaj punktoj indikas ke ne estas fino. Tiuj tri punktoj estas potencega skribmaniero, ĉar temas pri nefinie longa daŭrigo. Neniu komputilo en la mondo povas pritrakti tian nombron — komputiloj ja laboras nur per finia nombro de statoj.

Rekto estas donita per rilato inter la koordinatoj, ekzemple $x_2 = ax_1 + b$. Tiu estas la ekvacio por la rekto kiu trapasas la punktojn $(0, b)$ kaj $(1, a + b)$.⁶

Cirklo estas donita per ekvacio de dua grado: $x_1^2 + x_2^2 = 1$ estas la ekvacio por la cirklo kies centro estas en la origino kaj kies radiuso estas 1. Pli ĝenerale

$$(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 = r^2,$$

⁵Waschies (1998:367) skribas ke ne ekzistas fidindaj fontoj laŭ kiuj Eŭklido estus vivinta antaŭ Arĥimedo (kiu vivis de proksimume 285 ĝis 212). Kune kun aliaj indikoj tio malfermas la eblon ke Arĥimedo dum sia vizito al Aleksandrio estus povinta renkonti ne nur disĉiplojn de Eŭklido aŭ disĉiplojn de tiuj disĉiploj, sed eble ankaŭ Eŭklidon mem.

⁶Jam nun ni povas atenti ke mi skribas “la punkto $(0, b)$ ” kiam mi devus esti pli zorga kaj skribi “la punkto kies koordinatoj estas $(0, b)$ ”. Tiu mallongigo apartenas al la matematika slango, kaj estas tiel ofta ke oni eĉ ne pensas pri tiu simpligo de la lingvaĵo.

kie r estas pozitiva nombro, estas la ekvacio de la cirklo kun centro en la punkto $c = (c_1, c_2)$ kaj kun radiuso r .

Per tio oni povas transformi multajn geometriajn demandojn en kalkuladon per nombroj. Ekzemple, se oni demandas ĉu du rektoj $x_2 = ax_1 + b$ kaj $x_2 = cx_1 + d$ havas komunan punkton, oni per facila kalkulado trovas ke, se $a \neq c$, komuna punkto estas

$$x = (x_1, x_2) = \left(\frac{d - b}{a - c}, \frac{ad - bc}{a - c} \right).$$

Ĝi estas la sola komuna punkto. Se $a = c$ kaj $b = d$, tiam la rektoj egalas kaj sekve havas nefinie multajn komunajn punktojn; se $a = c$ kaj $b \neq d$, tiam ne ekzistas komuna punkto.

2.2. Matematikaj simboloj

Mi uzos la simbolon \mathbf{N} por la aro de ĉiuj naturaj nombroj, $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$; \mathbf{Z} por la aro de ĉiuj entjeraj nombroj, $\mathbf{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$; \mathbf{Q} por la aro de ĉiuj racionalaj nombroj; \mathbf{R} por la aro de ĉiuj reelaj nombroj; kaj \mathbf{C} por la aro de ĉiuj kompleksaj nombroj. Per punkto ni indikas forigon de nulo: $\dot{\mathbf{N}} = \mathbf{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Per indico \dagger ni indikas aldonon de du nefiniaj elementoj. Al ajna subaro Y de \mathbf{R} ni aldonas du elementojn, la nefiniojn $-\infty$ kaj $+\infty$: ni difinu

$$Y_{\dagger} = Y \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Speciale ni havas $\mathbf{R}_{\dagger} = [-\infty, +\infty] = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, la aro de la **etenditaj reelaj nombroj**, kaj $\mathbf{Z}_{\dagger} = [-\infty, +\infty]_{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$, la aro de la **etenditaj entjeroj**.

Se X estas aro kaj A subaro de ĝi, mi skribos χ_A por la **karakteriza funkcio de A** . Ĝi alprenas la valoron 1 en A kaj la valoron 0 en la komplemento

$$X \setminus A = \{x \in X; x \notin A\}$$

de A . Simile mi skribos \mathbf{ind}_A por la **indika funkcio de A** , kiu alprenas la valoron 0 en A kaj la valoron $+\infty$ en ties komplemento. Ni havas $\chi_A = e^{-\mathbf{ind}_A}$ kaj $\mathbf{ind}_A = -\log \chi_A$.

Mi skribos $f: X \rightarrow Y$ se f estas bildigo de aro X en aron Y . Tio signifas ke, se $x \in X$, tiam $f(x)$ estas difinita elemento de Y . Mi skribos $\mathcal{F}(X, Y)$ por la aro de ĉiuj bildigoj de aro X en aron Y .

Mi uzos la terminojn *rekto*, *radio* (sinonimo *duonrekto*) kaj *streko* (sinonimo *rekta segmento*, *segmento de rekto*), ĉiuj laŭ PIV 2005. Rekto estas nebarita en ambaŭ direktoj; radio estas nebarita en unu direkto; kaj streko estas barita.



Figuro 2.1. Streko difinita per du punktoj a kaj b .

Matematike oni povas difini **rekton**, kiam du punktoj a kaj $b \neq a$ estas donitaj, kiel la aron

$$(2.1) \quad \{(1-t)a + tb; t \in \mathbf{R}\}$$

(ĝi enhavas a kaj b); **radion** kiel la aron

$$(2.2) \quad \{(1-t)a + tb; t \in \mathbf{R}, t \geq 0\}$$

(ĝi enhavas la punktojn $a, b, 2b - a, 3b - 2a, \dots$); kaj **strekon** kiel la aron

$$(2.3) \quad [a, b] = [b, a] = \{(1-t)a + tb; t \in \mathbf{R}, 0 \leq t \leq 1\};$$

la finpunktoj de $[a, b]$ estas a kaj b .

2.3. Geometrio digita

La geometriajn nociojn de rekto kaj streko oni studis jam dum pli ol du mil jaroj. En la klasika geometrio de Eŭklido oni ekzemple scias ke inter du malsamaj punktoj ĉiam troviĝas tria punkto. Sed sur komputila ekrano ekzistas nur finia nombro da punktoj: ili estas lumpunktoj, nomataj *bilderoj*, *pikseloj* (angle *pixels*, kuntiraĵo de *picture elements* ‘bildelementoj’). Tial povas esti ke inter du bilderoj ne ekzistas iu tria bildero (ili povas esti najbaroj sen iu bildero inter si). Sekve la logiko estas tute malsama en tiu digita⁷ geometrio kompare al la klasika, eŭklida geometrio.

Tapiŝoj, brodaĵoj kaj mozaikoj estas ekzemploj de artefaritaĵoj kiuj estas diskretaj.

Tapiŝo povas konsisti el miloj da nodoj, sed ties nombro estas nur finia.

⁷Mi uzas la adjektivon *digita* en tiu ĉi kunteksto. PIV 2005 markas la adjektivon *diĝita* per “(evi)”, kio signifas ‘evitinda’. Oni rekomendas anstataŭe *cifereca*, adjektivon derivitan de *cifero* ‘skriba simbolo por nombro’. Tiu vorto taŭgas por ciferecaj horloĝoj, sed ne por la geometrio: la digita geometrio ne estas pli cifereca ol la eŭklida. La vorto *cifereca* kaptas nur unu el la multaj sencoj de la angla *digital*. PIV 2005 listigas kvar kapvortojn devenantajn el la latina *digitus* ‘fingro, piedfingro’, nome *digitalo*, *digitalario*, *digitoksino*, *digitopunkturo*. Estas tial nature plu uzi la radikon *digit*. Ni notu ke Vilmos Benczik uzis la vorton *digita* en sia artikolo (2011:39). Krome ni havas la kapvortojn *daktilo*, *daktiliso*, *daktilografi*, *daktiloskopia* kun origino en la klasik-greka δάκτυλος_(n) ‘fingro’, ‘daktilo’.

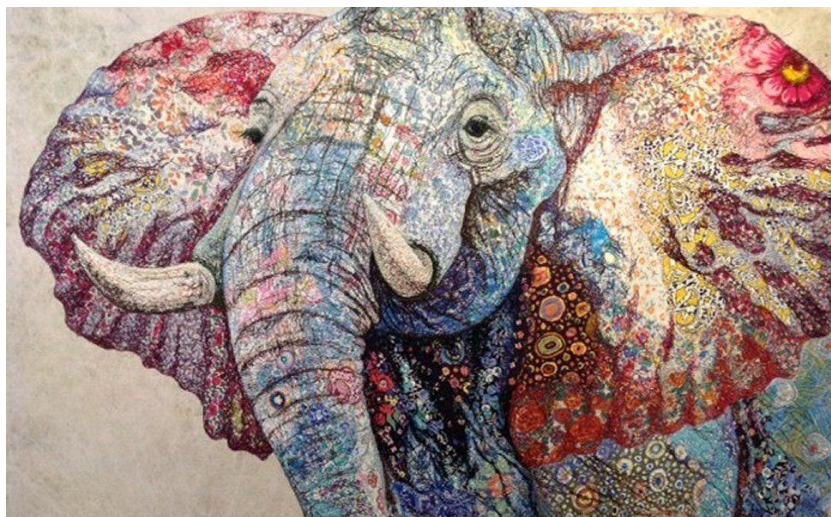


Figuro 2.2. Persa tapiŝo.

Mozaiko estas farita kun finia nombro de ŝtonetoj, teseloj.



Figuro 2.3. Mozaiko en Ravenna.



Figuro 2.4. Brodaĵo.

Ĉiuj tri povas prezenti bildojn tute bone.

Tiuj objektoj ekzistas jam tre longan tempon, sed nun, kun komputiloj kaj fotiloj, ili estas ĉie. Foto konsistas el multegaj pikseloj, sed nur finie multaj.

Tio ĉi faras ke la digita geometrio estas de kreskanta intereso. La diskretigo de aroj kaj funkcioj estas studata el multaj vidpunktoj.

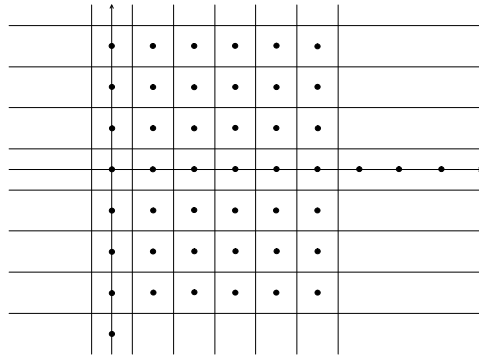
Ni rigardu unuan diskretan objekton: la aron de la entjeroj. Inter 5 kaj 6 ekzistas la mezpunkto 5,5, kaj do ne estas problemo trovi ĝin se ni estas ĉe la reelaj nombroj. Sed se ni estas ĉe la entjeroj, la nombro 5,5 ne estas entjero, kaj sekve tute ne ekzistas. Simile, se ni konsideras du rektojn: L_1 kun la ekvacio $x_2 = x_1$ kaj L_2 kun la ekvacio $x_2 = 1 - x_1$ (do kun $a = 1$, $b = 0$, $c = -1$, $d = 1$ en la ekzemplo menciita en sekcio 2.1), tiam ni vidas ke ili intersekcas en la punkto $(1/2, 1/2)$ en la eŭklida ebena, sed ne en la ebena de la entjeroj. Kion do fari? Ĉu akcepti ke du ne-paralelaj rektoj ne intersekcas?

Sur la komputila ekrano oni povas doni al la pikseloj entjerajn koordinatojn. La ideo de Kartezio do daŭre taŭgas, t.e. ke ni povas uzi nombrojn kiel koordinatojn, sed nun temas pri entjeroj, ne pri aliaj reelaj nombroj. Ni ĉiam povas uzi parojn de entjeroj kiel adresojn de la pikseloj, sed la pikseloj mem povas havi plurajn formojn . . . ili estas nur lumaj makuloj sur la ekrano.

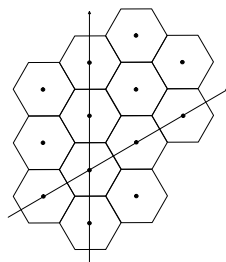
2.3.1. Teselado de la ebena; bilderoj kaj ties adresoj

Por lokigi bilderojn ni bezonas provizi ilin per adresoj. Kiel menciite oni povas uzi parojn de entjeroj kiel adresojn, koordinatojn. La aron de tiuj paroj oni signas per $\mathbf{Z}^2 = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$. Ties punktoj do ne estas bilderoj, sed adresoj al bilderoj. Estas konate ke la eŭklida ebena povas esti teselita⁸ laŭ tri malsamaj manieroj se oni rajtas uzi nur unu figuron. Tiam tiu figuro estas aŭ kvadrato aŭ heksagono aŭ triangulo. Ni rigardu.

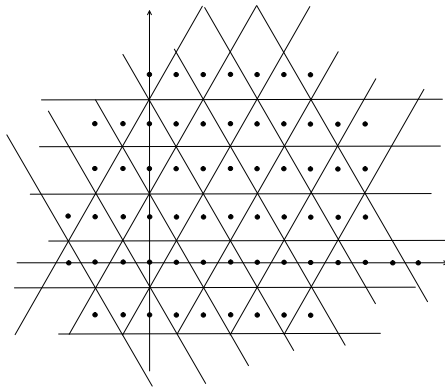
⁸Mi enkondukas verbon *teseli* ‘disdividi spacon en pecojn kiuj kovras la tutan spacon kaj renkontiĝas nur en siaj randoj kaj kiuj ĉiuj estas kongruaj al malgranda nombro da figuroj’. Ĝi estas verbo derivita de *teselo* ‘regula peco’, formita el la latina *tessella* ‘eta kvadrata ŝtono celita al mozaiko’.



Figuro 2.5. Kvadrataj bilderoj en la reela ebena



Figuro 2.6. Heksagonaj bilderoj en la reela ebena



Figuro 2.7. Triangulaj bilderoj en la reela ebena

Notu ke en ĉiuj okazoj oni povas uzi karteziajn koordinatojn el \mathbf{Z}^2 . En la okazo de kvadrataj teseloj la koordinatsistemo estas ortonorma; en la okazo de heksagonoj ĝi estas oblikva; kaj en la okazo de triangulaj teseloj ĝi estas orta sed ne ortonorma.

2.4. Morfologio matematika

Unue mi devas klarigi kio estas ordo, minimumo kaj maksimumo.

Difino 2.1. Se X estas ajna aro, ni diras ke rilato \leq inter paroj de elementoj de X estas **ordo**, se

(2.1.1) ĉiam validas $x \leq x$;

(2.1.2) se $x \leq y$ kaj $y \leq x$, tiam $x = y$; kaj

(2.1.3) se $x \leq y$ kaj $y \leq z$, tiam $x \leq z$.

Ordo estas nomata **totala** se por ajnaj elementoj x kaj y oni havas aŭ $x \leq y$ aŭ $y \leq x$. \square

Ni skribas mallonge $x < y$ por la aserto de $x \leq y$ kaj $x \neq y$. Ni skribas $y \geq x$ se kaj nur se $x \leq y$. Same $y > x$ se kaj nur se $x < y$.

Difino 2.2. La **minimumo** aŭ **infimo** de du elementoj x kaj y estas elemento v tia ke

(2.2.1) $v \leq x$ kaj $v \leq y$; kaj

(2.2.2) se $z \leq x$ kaj $z \leq y$, tiam $z \leq v$.

Oni notas ĝin per $x \wedge y$.

La **infimo** de familio $(x_j)_{j \in J}$ de elementoj analoge estas elemento v tia ke

(2.2.3) $v \leq x_j$ por ĉiuj $j \in J$; kaj

(2.2.4) se $z \leq x_j$ por ĉiuj $j \in J$, tiam $z \leq v$.

Oni notas ĝin per $\bigwedge_{j \in J} x_j$. \square

Povas esti ke infimo ne ekzistas. El la difino sekvas ke ne povas ekzisti pli ol unu infimo.

Difino 2.3. La **maksimumo** aŭ **supremo** de du elementoj x kaj y estas elemento w tia ke

(2.3.1) $x \leq w$ kaj $y \leq w$; kaj

(2.3.2) se $x \leq z$ kaj $y \leq z$, tiam $w \leq z$.

Oni notas ĝin per $x \vee y$.

La **supremo** de familio $(x_j)_{j \in J}$ de elementoj analoge estas elemento w tia ke

(2.3.3) $w \geq x_j$ por ĉiuj $j \in J$; kaj

(2.3.4) se $z \geq x_j$ por ĉiuj $j \in J$, tiam $z \geq w$.

Oni notas ĝin per $\bigvee_{j \in J} x_j$. \square

Difino 2.4. **Latiso**⁹ estas matematika strukturo kun ordo tia ke la minimumo de du elementoj kaj la maksimumo de du elementoj ĉiam ekzistas.

Kompleta latiso estas ordita strukturo tia ke la supremo kaj la infimo de ajna familio de elementoj ĉiam ekzistas. \square

Simplaj ekzemploj estas la aro \mathbf{Z} de ĉiuj entjeroj kaj la aro \mathbf{R} de ĉiuj reelaj nombroj. Ni ja scias ke $\min(x, y) = x \wedge y$ kaj $\max(x, y) = x \vee y$ estas bone difinitaj nombroj. Sed ili ne estas kompletaj latisoj, ĉar la supremo de ĉiuj reelaj nombroj ne estas nombro.

Ni povas mallonge diri ke la matematika morfologio estas aplika latisteorio; pli ĝuste teorio kaj praktiko pri kompletaj latisoj. Ĝia ĉefa kampo de apliko estas la pritrakto de bildoj. Tiun nun tre aktivan sciencobranĉon kreis en la sesdekaj jaroj Georges Matheron

⁹En la angla *lattice*; en la franca *treillis*_(m); en la rusa *структура*_(f); en la pola *krata*_(f); en la germana *Verband*_(m).

(1930–2000) kaj Jean Serra. Oni organizis jam plurfoje Internaciajn simpoziojn pri matematika morfologio (ISMM): la unua okazis en 1993, la dektria en 2017 (el tiuj dek tri mi partoprenis en kvin).

Pri matematika morfologio vidu plie ĉe ekzemple Serra (1982), Serra, red. (1988) kaj Najman & Talbot, red. (2008).

Ni komparu la ekvaciojn $a + x = b$ kaj $a \vee x = b$, kie a kaj b estas konataj grandoj kaj x nekonata, trovenda grando. Se ni estas en \mathbf{Z} aŭ \mathbf{R} , tiam la unua ĉiam havas unikan solvon: $x = b - a$. Tiel oni lernas subtrahon. Sed la alia povas malhavi solvon, nome kiam $b < a$: tiam $a \vee x \geq a > b$, kaj egaleco ne eblas. Kiam $b > a$, la ekvacio havas unikan solvon, nome $x = b$, kaj kiam $a = b$, ĝi havas nefinie multajn solvojn: ĉiu $x \leq b$ taŭgas. Tiel la dua ekvacio pli similas al la problemoj el la reala vivo: foje problemo havas pli ol unu solvon, foje neniun; ne tiel ofte unu kaj nur unu solvon. Sed en la lernejo oni (tro) ŝatas problemojn kun ekzakte unu solvo.

Ĉiuokaze ni povas konkludi ke la ekvacio $a \vee x = b$ estas interesa. Etaj infanoj lernas ke $5 + 3 = 8$, sed eĉ antaŭ ol fari tion ili lernas ke 3 venas antaŭ 5, kaj do ke $5 \vee 3 = 5$. Tiel la operacio de maksimumo ne estas fremda al ili, kvankam oni en la lernejo ne multe parolas pri ĝi.

Ekzemplo 2.5. La aroj \mathbf{Z} kaj \mathbf{R} de entjeraj kaj reelaj nombroj estas totale orditaj. Gravaj estas aroj kiuj ne estas totale orditaj, ekzemple la familio $\mathcal{P}(X)$ de ĉiuj subaroj de iu donita aro X . Se X enhavas du malsamajn elementojn a kaj b , tiam ni ja ne havas $\{a\} \subset \{b\}$, nek $\{b\} \subset \{a\}$. Por $\mathcal{P}(X)$ la minimumo $A \wedge B$ de du elementoj estas ilia **komunaĵo**

$$A \cap B = \{x; x \in A \text{ kaj } x \in B\},$$

kaj la maksimumo estas ilia **kunigaĵo**

$$A \cup B = \{x; x \in A \text{ aŭ } x \in B\}.$$

Tiuj estas la **buleaj operacioj**, tiel nomataj pro George Boole (1815–1864). La sama validas por nefiniaj familioj:

$$\bigwedge_{j \in J} A_j = \bigcap_{j \in J} A_j; \quad \bigvee_{j \in J} A_j = \bigcup_{j \in J} A_j.$$

Sekve $\mathcal{P}(X)$ estas kompleta latiso. □

2.4.1. Aŭdi kaj vidi orkestron

Iom simpligite ni povas diri ke matematika morfologio estas ilo por vidado, dum la furiera analizo kaj sintezo estas ilo por aŭdado. Mi klarigos.

Se orkestro ludas, vi povas aŭdi la tonon elsendatan de muzikisto eĉ se li aŭ ŝi estas kaŝita malantaŭ alia muzikisto. Male, vi ne povas vidi la kaŝitan muzikiston. La klarigo estas ke la ondolongo de sono estas multe pli granda ol la ondolongo de lumo.

La rapido de sono en ĉambro estas, ni diru, 343 m/s, kio implicas ke la ondolongo de la referenca tono de 440 Hz¹⁰ estas

$$\frac{343 \text{ ms}^{-1}}{440 \text{ s}^{-1}} \approx 0,78 \text{ m.}$$

Flava lumo havas ondolongon de 580 nm = $5,8 \times 10^{-7}$ m. Sekve la tono ĵus menciita havas ondolongon

$$\frac{0,78 \text{ m}}{580 \text{ nm}} \approx 1\,340\,000$$

fojojn pli granda ol la ondolongo de la lumo. La ondoj de sono povas iri ĉirkaŭ homo, kaj cetere ankaŭ resalti de la muroj, dum lumo povas ĉirkaŭiri nur tre etan objekton.

Sekve de tiu komparo ni povas diri ke la vidkapablo similas al la egalaĵo $a \vee b = a$, kie $b \leq a$, kaj kie oni ne povas trovi la grandon b se $b \leq a$, eĉ se a estas konata, ĉar b estas kaŝita malantaŭ a . Male, el la sumo $a + b$ oni povas trovi la grandon b , se a estas konata, ĉar ĝi egalas al $(a + b) - a$. Simile, se oni aŭskultas la sumon de du tonoj, oni povas aŭdi ambaŭ.

Per tio mi volas diri ke la operacioj \wedge kaj \vee estas pli gravaj por la vidkapablo ol la operacioj $+$ kaj $-$, kaj motivas la studon de latisoj.

2.5. Optimumado diskreta

Optimumado estas grava branĉo de la matematiko. La vorto signifas ‘serĉado de la plej bona’, de la latina *optimum* ‘optimumo, plej bona’. Por trakti optimumoproblemon oni devas tute unue decidi kio estas bona: por vendanto la plej bona prezo estas la plej alta; por aĉetanto la plej malalta. Due oni devas decidi pri la akcepteblaj statoj aŭ valoroj. Ekzemple oni kutime ne povas aĉeti duonan pomon, aŭton aŭ domon: oni devas aĉeti neniun aŭ unu, du, ...; nur entjeraj valoroj eblas. Male, optimuma longo povas esti 3,14 metroj aŭ $\pi = 3,14159265 \dots$ metroj: en tia situacio ĉiuj reelaj nombroj eblas. Mi prezentos kelkajn gravajn diferencojn inter entjera kaj reela optimumado, kaj montros kiel oni povas difini taŭgajn klasojn de funkcioj kun entjeraj variabloj por kiuj validas dezirindaj rezultoj.

Sed, se optimumado signifas ‘serĉadon de la plej bona’, kio estas la plej bona?

Tiu ĉi estas la unua demando. Oni devas unue decidi pri tio.

Kio estas optimuma kontribuo al AIS?

Kio estas optimuma organizado de riparoj de stratoj?

Pli bona el kiuj?

Tiu ĉi estas la dua demando. Kiuj estas la eblaj valoroj aŭ statoj kiuj rajtas aŭ povas ekzisti? Ĉu ni uzu reelajn nombrojn aŭ entjerajn nombrojn?

¹⁰La mallongigo Hz signifas hertz, herco, unuo egala al la inverso de sekundo, $\text{s}^{-1} = 1/\text{s}$, kaj tiel nomata pro Heinrich Hertz (1857–1894).

La verdikto de reĝo Salomono: “Dishaku la vivantan infanon en du partojn, kaj donu duonon al unu kaj duonon al la alia.” (Biblio, Reĝoj, Libro Unua 3:25)



Figuro 2.8. La verdikto de reĝo Salomono

La reĝo Salomono komprenis la diferencon inter reela kaj diskreta optimumado antaŭ pli ol 2900 jaroj.

2.6. Konvekseco

2.6.1. Difinoj

Ni bezonas difinojn de konveksaj aroj kaj konveksaj funkcioj.

Estas plej facile difini konveksajn funkciojn helpe de konveksaj aroj. Tio havas krome la avantaĝon ke ni povas senprobleme trakti funkciojn kun nefiniaj valoroj.

Difino 2.6. Subaro A de \mathbf{R}^n estas nomata **konvekseca** se

$$\{a, b\} \subset A \text{ implicas } [a, b] \subset A,$$

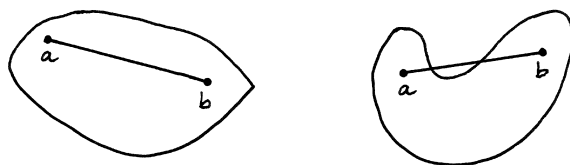
kie

$$[a, b] = \{(1 - t)a + tb; t \in \mathbf{R}, 0 \leq t \leq 1\}$$

estas la **streko** kun a kaj b kiel finpunktoj. Streko $[a, b]$ kun finpunktoj a, b en A estos nomata **ŝnuro de** A , kaj ni difinas la **ŝnuraron de** A kiel la kunigaĵon de ĉiuj ŝnuroj, do

$$\hat{\text{ŝnur}}(A) = \bigcup_{a, b \in A} [a, b] \subset \mathbf{R}^n.$$

Sekve aro estas konvekseca se kaj nur se $\hat{\text{ŝnur}}(A) \subset A$. □



Figuro 2.9. Konvekso aro en la eŭklida ebena; nekonvekso aro.

Estas pravigite, mi pensas, nomi tiun econ la *ŝnura eco de Eŭklido*. Verdire la difino 4 en lia libro *Στοιχεῖα*, *Stoiĥeía* ‘Elementoj’ tekstas laŭ la traduko de Heath: “A straight line is a line which lies evenly with the points on itself.” (Heath 1926:165); *Rekto estas linio kiu kuŝas egale*¹¹ kun la punktoj sur si. Tion oni rajtas interpreti kiel $\hat{\text{ŝnuro}}(A) \subset A$, kio, kune kun la eco de linio kiel senlarĝa longo (angle *breadthless length*, difino 2; Heath 1926:158) implicas ke la aro estas εὐθεῖα γραμμή, *eutheía grammé*, mallonge εὐθεῖα, la greka termino de Eŭklido por streko, radio aŭ rekto. Por la diversaj signifoj de εὐθεῖα vidu Kiselman (2015a).¹²

Difino 2.7. Por ĉiu subaro A de \mathbf{R}^n oni difinas ĝian **konveksan tegaĵon**, notitan per $\text{kteg}(A)$, kiel la plej malgrandan konveksan aron kiu enhavas ĝin. \square

La konvekso tegaĵo estas bone difinita, ĉar ĉiu komunaĵo de konveksaj aroj estas konvekso.

¹¹En la greka originalo ἴσος (*ísou*); en la latina traduko *æquo*.

¹²Anglalingve *chord*, franclingve *corde*_(f), kies origino estas la greka χορδή_(f) kun la signifoj ‘kordo de muzikinstrumento’ kaj ‘ŝnuro en la geometrio’.

Estas notinde ke tri fenomenoj iom similaj ricevas malsamajn pritraktojn en diversaj lingvo. Ekzistas tri nocioj:

- (A) la kordo de muzikinstrumento;
- (B) la ŝnuro de pafarko; kaj
- (C) ŝnuro en la geometrio.

En esperanto kiel ni vidas oni uzas la saman vorton por (B) kaj (C) kaj alian por (A). En la germana same. Male, en la angla, pola kaj sveda oni uzas la saman vorton por (A) kaj (B) kaj alian por (C). La franca kaj la japana uzas nur unu vorton. La rusa havas por (B) du vortojn.

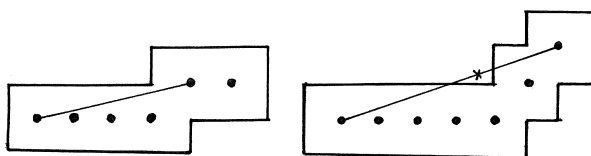
Lingvo	(A)	(B)	(C)
Franca	chorde _(f)	chorde _(f)	chorde _(f)
Japana	gen	gen	gen
Esperanto	kordo	ŝnuro	ŝnuro
Germana	Saite _(f)	Sehne _(f) , Bogensehne _(f)	Sehne _(f)
Angla	string	string	chord
Pola	cięciwa _(f)	ceciwa _(f)	struna _(f)
Sveda	sträng _(u)	sträng _(u)	korda _(u)
Rusa	струна́ _(f)	тетива́ _(f) , струна́ _(f)	хорда _(f)

Ĉar la ŝnura eco de Eŭklido estas stranga en digita situacio, Azriel Rosenfeld (1931–2004) malfortigis ĝin al nova difino, kiu montriĝis sukcesa: ni diros ke aro $A \subset \mathbf{R}^2$ havas la **ŝnur**an econ de **Rosenfeld** (1974) se

$$\hat{\text{snur}}(A) \subset A + U = \{a + x; a \in A \text{ kaj } x \in U\},$$

kie U estas la malfermita unuoglobo en \mathbf{R}^2 por la normo l^∞ :

$$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|), \quad U = \{x \in \mathbf{R}^2, \|x\|_\infty < 1\}.$$



Figuro 2.10. Aro (kun ses elementoj) kiu havas la ŝnur

2.6.2. Grafeoj kaj epigrafeoj

Al ĉiu bildigo $f: X \rightarrow Y$ de aro X en aron Y ni asocias ĝian **grafeon**,¹³

$$\text{grafe}(f) = \{(x, y) \in X \times Y; y = f(x)\}.$$

La rilato inter funkcioj kaj aroj estas donita per la nocio de finia epigrafeoj. Al ĉiu funkcio $f: X \rightarrow Y_!$, kie $Y \subset \mathbf{R}$ kaj $Y_! = Y \cup \{-\infty, +\infty\}$, ni asocias ĝian **epigrafeon**

$$\text{epi}(f) = \{(x, y) \in X \times Y_!; f(x) \leq y\} \subset X \times \mathbf{R}_!,$$

kaj ĝian **finian epigrafeon**

$$\text{epi}^{\text{finia}}(f) = \{(x, y) \in X \times Y; f(x) \leq y\} = \text{epi}(f) \cap (X \times Y) \subset X \times \mathbf{R}.$$

Ni bezonos ankaŭ la **striktan finian epigrafeon**:

$$\text{epi}_s^{\text{finia}}(f) = \{(x, y) \in X \times Y; f(x) < y\}.$$

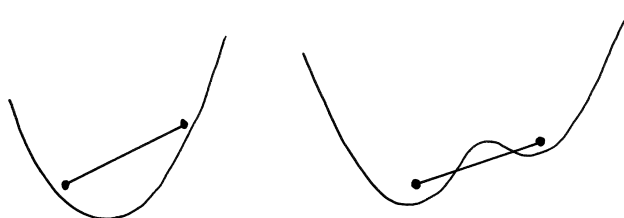
Alidirekte la tri epigrafeoj de ajna funkcio determinas ties valorojn: por ĉiu funkcio $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_!$ validas la egalaĵoj $f(x) =$

$$\inf_{y \in \mathbf{R}_!} (y; (x, y) \in \text{epi}(f)) = \inf_{y \in \mathbf{R}} (y; (x, y) \in \text{epi}^{\text{finia}}(f)) = \inf_{y \in \mathbf{R}} (y; (x, y) \in \text{epi}_s^{\text{finia}}(f)).$$

¹³En PIV 2005 aperas *grafo* en tiu matematika senco (kaj ankaŭ en alia matematika senco); mi nun revenas al la formo *grafeo*, kiun mi proponis en Kiselman (1990: piednoto 1) kaj kiun Sergio Pokrovskij (1995:125–127) akceptis. Ĝia origino estas la klasik-greka $\gamma\rho\alpha\phi\eta$, *grafé*, kiu signifas i.a. ‘skribaĵo’.

2.6.3. Konveksaj funkcioj

Difino 2.8. Funkcion $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_l$ oni nomas *konvekse* se ĝia finia epigrafejo estas konvekse subaro de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$. \square



Figuro 2.11. Konvekse funkcio; nekonvekse funkcio.

Funkcio $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ nomiĝas *afina* se ĝi havas la formon

$$f(x) = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n + c, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n,$$

por reelaj konstantoj $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ kaj c . Por tia funkcio la finia epigrafejo estas duospaco en \mathbf{R}^{n+1} . Ĝi nomiĝas *lineara* se c egalas al nulo. Ĉiuj afinaj funkcioj estas konveksaj.

Difino 2.9. Al ĉiu funkcio $f: A \rightarrow \mathbf{R}_l$, difinita sur subaro A de \mathbf{R}^n , oni difinas ĝian *konveksan envelopon*, notitan per $\mathbf{kenv}(f)$, la plej grandan konveksan funkcion $g: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_l$ tia ke $g|_A \leq f$. \square

La konvekse envelopo estas bone difinita, ĉar la supremo de ajna familio de konveksaj funkcioj estas konvekse.

Ĝenerale ni havas

$$\mathbf{kenv}(f)(x) = \inf_{y \in \mathbf{R}} (y; (x, y) \in \mathbf{kteg}(\text{epi}^{\text{finia}}(f))), \quad \text{kaj}$$

$$(2.4) \quad \text{epi}_s^{\text{finia}}(\mathbf{kenv}(f)) \subset \mathbf{kteg}(\text{epi}^{\text{finia}}(f)) \subset \text{epi}^{\text{finia}}(\mathbf{kenv}(f)).$$

2.6.4. Lokaj minimumoj ne estas ĉieaj

Baza eco de konveksaj funkcioj de reelaj variabloj estas ke loka minimumo de konvekse funkcio aŭtomate estas ĉiea (globala) minimumo. Vidu pli pri tio en sekcio 4.1, difinoj 4.1 kaj 4.2.

Alivorte, se F estas konvekse en la ebena kaj validas la neegalajo $F \geq F(a)$ proksime al a , tiam validas $F \geq F(a)$ ĉie.

Sed rigardu la funkcion

$$f(x, y) = x + |x - 2my|, \quad (x, y) \in \mathbf{Z}^2,$$

kie m estas pozitiva entjero, kiom ajn granda.

Tiam $f(x, y) \geq f(0, 0) = 0$ kiam $x \geq -m$, do kiam (x, y) apartenas al granda aro kiu enhavas la originon, sed

$$f(-m - 1, -1) = -2 < f(0, 0).$$

Tamen f estas la malvastigaĵo al \mathbf{Z}^2 de konvekso funkcio sur \mathbf{R}^2 :

$$F(x, y) = x + |x - 2my|, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

Kion fari? Ekzistas tri ebloj.

- Ni povas rifuzi nomi f konvekso.
- Ni povas klopodi uzi grandegajn ĉirkaŭaĵojn.
- Ni simple rezignu pri la rezulto.

Tio estas esplorado! Ni devas elekti.

La solvo kiun mi proponos estas ke ni fortigu la kondiĉojn sur f .

2.6.5. Sovagaĵaj margenaj funkcioj

Estas geometrie evidente ke la ombro de konvekso aro en \mathbf{R}^3 sur \mathbf{R}^2 estas konvekso.

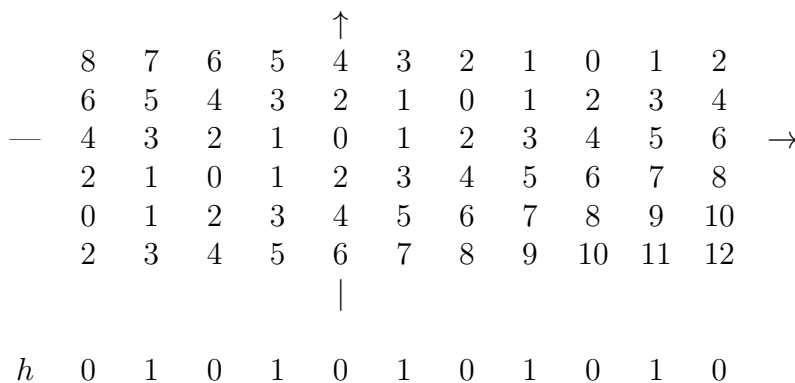
Oni kutime esprimas tion parolante pri margenaj funkcioj.

Difino 2.10. Al donita funkcio $F: \mathbf{R}^2 \rightarrow [-\infty, +\infty]$ ni difinas ĝian ***margenan funkcion*** per

$$H(x) = \inf_{y \in \mathbf{R}} F(x, y), \quad x \in \mathbf{R}. \quad \square$$

Oni vidas ke la strikta epigrafeo de H tutsimple estas la projekciaĵo (la ombro) de la strikta epigrafeo de F sub la projekcio $(x, y, t) \mapsto (x, t)$, la projekcio kiu forgesas y . Ni ja havas $H(x) < t$ se kaj nur se ekzistas y tia ke $F(x, y) < t$.

Sed en la digita situacio povas okazi ke la margena funkcio estas funkcio kun tre grandaj segildentoj — en neniu senco eblas nomi ĝin konvekso. En la figuro 2.12 mal-supre h havas malgrandan segildenton.



Figuro 2.12. Ni difinu $f(x, y) = |x - 2y|$, $(x, y) \in \mathbf{Z}^2$, funkcio kiu estas malpli-vastigaĵo de konvekso funkcio. Estu $h(x) = \inf_{y \in \mathbf{Z}} f(x, y)$, $x \in \mathbf{Z}$, ĝia margena funkcio. Ni vidas ke h ne estas konvekso en iu ajn senco de la vorto.

Ni revenos al diskreta optimumado en ĉapitro 4; vidu pri margenaj funkcioj sekcion 4.4 kaj sekcion 4.7.

3. Ĉapitro tria: Modeloj bazitaj sur la reelaj nombroj kompare al modeloj diskretaj

Mi volas ion diri pri diskretaj matematikaj modeloj kontraste al tiuj kiuj uzas reelajn aŭ kompleksajn nombrojn. Por rigardi antaŭen ni tamen devas komenci per rigardo malantaŭen.

3.1. Meĥaniko ĉiela

Isaac Newton (1642–1727) kaj Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716) kreis la sciencan metodon kion ni nuntempe nomas *diferenciala* kaj *integra kalkulo*. Tiu kalkulo liveras eksterordinare sukcesan matematikan modelon por multaj studoj de la nin ĉirkaŭanta mondo.

Johannes Kepler (1571–1630) formulis tri leĝojn por la movo de la planedoj en la suna sistemo. Temas pri tri sendependaj asertoj. Per tiu eldiro mi volas diri ke ni povas imagi ok malsamajn universojn kie aŭ neniu, aŭ unu el la leĝoj (tri okazoj), aŭ du el ili (tri okazoj) aŭ ĉiuj tri validas ($1 + 3 + 3 + 1 = 8$). Neniu el la leĝoj devigas alian validi.

La unua leĝo diras ke planedo moviĝas en elipso ĉirkaŭ la suno kun tiu ĉi en unu el la fokuso. Kometoj povas movi sin en orbitoj kiuj estas elipsoj, parabloj aŭ hiperbloj, tiel ke ĉiuj duagradaĵoj kurboj fakte aperas en la suna sistemo.

La dua leĝo diras ke la rapido de planedo varias kun la distanco, tiel ke la areo kiun la streko inter la suno kaj la planedo kovras dum determinita tempointervalo estas konstanta. Tio sekvigas ke la planedo moviĝas pli rapide kiam ĝi estas pli proksima al la suno. La tero estas plej proksima al la suno ĉirkaŭ la 4-a de januaro; tial la rapido de la tero tiam estas pli granda ol komence de julio. Por kompreni la duan leĝon oni devas kompreni la nocion de areo de sektoro en elipso, kiu estas donita per duobla integraĵo, sed sufiĉas elturni sin per la areo de triangulo pro tio ke sektoro dum mallonga tempo estas proksima al triangulo.

La tria leĝo estas la sola kiu komparas du malsamajn planedojn. Ĝi diras ke la tempo de unu rondiro estas proporcia al la potenco $3/2$ de la meza distanco inter la planedo kaj la suno. Ju pli fora iu planedo estas, des pli malrapida ĝi moviĝas en sia orbito: la longo de la orbito estas proksimume proporcia al la meza distanco, dum la rondirtempo kreskas pli rapide. Sekve oni devas ion kompreni pri potencoj. Kaj kiel oni komprenu la mezan distancon, se la orbito ne estas cirklo?

Newton povis ekde unu sola leĝo, tiu pri la gravito, dedukti la tri leĝojn de Kepler, kiu sekve estis konektitaj kaj ne plu estis izolitaj unu de la alia. Por tion fari, necesis novaj matematikaj iloj, ĝuste tiuj kiujn konstruis Newton kaj Leibniz.

Por dedukti la leĝojn de Kepler el la leĝo pri gravito oni bezonas kvanton da matematiko. Montriĝas tiam ke la meza distanco menciita devas esti interpretata kiel la longo de la duono de la granda akso de la elipso, kiu estas la meza valoro de la plej malgranda

distanco (la perihelia distanco) kaj la plej granda distanco (la apohelia distanco)¹⁴ – kaj kiu neniel estas la sola pensebla meza distanco.

Plue: la tria leĝo ne estas ekzakta se la planedoj havas malsamajn masojn: planedo kun pli granda maso rondiras pli rapide ol planedo kun malpli granda maso. Por vidi tion ni rigardu la pli ekzaktan formon kiun la tria leĝo ricevas de Newton:

$$\frac{P_2^2}{P_1^2} = \frac{M + m_1}{M + m_2} \cdot \frac{a_2^3}{a_1^3},$$

kie P_1 kaj P_2 estas la rondiraj tempoj (la periodoj) por du planedoj, M la maso de la suno, m_1 kaj m_2 la masoj de la du planedoj kaj a_1 kaj a_2 iliaj mezaj distancoj al la suno (Strömngren & Strömngren 1945:192). Se nun la planedoj havas la saman mason, $m_2 = m_1$, tiam la faktoro $(M + m_1)/(M + m_2)$ egalas al 1 kaj ni ricevas ekzakte la trian leĝon de Kepler. Sed se la planedoj estas ekzemple la tero kun maso m_1 kaj Jupitero kun maso $m_2 > m_1$, tiam tiu faktoro estas iom malpli ol 1. Kun la havigeblaj donitaĵoj pri m_1/M kaj m_2/M (sufiĉas koni tiujn ĉi kvocientojn), tiam la faktoro

$$\frac{M + m_1}{M + m_2} = \frac{1 + m_1/M}{1 + m_2/M}$$

egalas proksimume al 0,999049.

Se ni konsideras ke la rondirtempoj estas konataj, tiam la kvociento inter la distancoj por Jupitero kaj la tero estas

$$\frac{a_2}{a_1} = \sqrt[3]{\frac{M + m_2}{M + m_1}} \cdot \frac{P_2^{2/3}}{P_1^{2/3}} \approx 1,00032 \frac{P_2^{2/3}}{P_1^{2/3}} > \frac{P_2^{2/3}}{P_1^{2/3}}.$$

Tiom malgrandan eraron en la distanco al Jupitero, nur 0,3 promiloj, oni ne povis malkovri en la tempo de Kepler.

La leĝoj de Kepler estas empiriaj: li alvenis al ili per studado de observoj. Newton kunnodis ilin per teorio. Lia modelo estas bazita sur la ideo ke la tempo kaj la spaco povas esti priskribitaj per la helpo de reelaj nombroj; kiam temas pri la tempo, per unu sola reela nombro por ĉiu tempopunkto; kiam temas pri la spaco, per triopo de nombroj, la karteziaj koordinatoj de la punkto. Inter du malsamaj tempopunktoj ĉiam ekzistas tria, ekzemple ilia mezpunkto, kaj responda aserto validas por la spaco.

3.2. La diskreta estas plurmiljara

Spite al la sukcesoj de la modeloj bazitaj sur reelaj aŭ kompleksaj nombroj, ni ne forgesu ke ekzistas aliaj modeloj, eĉ pli aĝaj: tiuj bazitaj sur la entjeroj. Tiuj ĉi konsistigas diskretan aron: oni saltas de unu entjero al alia per salto unu unuon longa. Ne eblas salti malpli grandan strekon. La mezpunkto inter 5 kaj 6 ne estas entjero; ĝi ne ekzistas.

Ni parolas pri *diskretigo*, vorto kiu signifas ke oni faras operacion. Ofta tia operacio estas preno de la entjera parto de reela nombro: $\pi = 3,14159 \dots$ rondiĝas al 3: $\lfloor \pi \rfloor = 3$.

¹⁴PIV 2005 mencias la terminojn *perihelio* kaj *afelio*. Ilia origino estas la klasik-grekaj περί (*perí*) ‘ĉirkaŭ’, ἀπό (*apó*) ‘for’ kaj ἥλιος (*hélíos*) ‘suno’. La kunfandiĝo de *p* kaj *h* al *f* en *ap-helio* ne estas etimologie pravigita. Pro tio mi preferas konservi la literon *o*, kiel en *apokalipso*.

Pli ĉiutaga faro estas rondigi monsumon supren aŭ malsupren. Ni bildigas la racionalajn aŭ la reelajn nombrojn sur la entjerajn. Sed ne nepre estas tiel ke oni ekas ĉe la reelaj nombroj kaj ekde ilin konstruas ion diskretan: ĉio povas esti diskreta ekde la komenco.

Tapiŝo estas nodita per finia nombro de nodoj, kaj la bildoj kiujn ĝi prezentas estas la rezulto de finia nombro de informpunktoj.

Mozaiko simile estas diskreta: per finia nombro de etaj ŝtonoj oni povas montri vizaĝojn, homojn kaj kiajn ajn bildojn. Ĉiuj elementoj estas teseloj, etaj ŝtonoj, per kiuj la tuta mozaiko estas konstruita.

Foto en gazeto redonas grizon kiel apudigitajn nigrajn kaj blankajn rastrumerojn. La nuntempaj fotiloj kreas foton helpe de finie multaj pikseloj. Sed la ideo, kiel dirite, ekzistis jam antaŭ pluraj jarmiloj — ili antaŭiris la digitan geometrion. Vidu sekcion 2.3 kaj la bildojn tie.

3.3. La diskreta en la fiziko

Ekzistas du modeloj por la lumo: ĝi povas esti priskribita kiel onda movo aŭ kiel partikloj. Kiel la unua Albert Einstein (1879–1955) en 1905 konsideris lumajn kvantumojn, poste nomatajn fotonojn.

Niels Bohr (1885–1962) en la jaro 1913 prezentis modelon por atomoj laŭ kiuj la elektronoj povas troviĝi nur je difinitaj diskretaj energiniveletoj. Elektrono povas salti al pli alta orbito per absorbo de fotono, difinita kvanto de lumo.

Lige al tiu kvantumado mi menciis ke la modelo de Newton ĉesas havi sencon por mallongegaj tempoj kaj mallongegaj distancoj, nome por tiuj kiuj estas pli mallongaj ol la tempo de Planck,¹⁵ respektive ol la longo de Planck, kiam la tempospaco perdas sencon pro la kvantumaj fluktuoj de la gravito. Sed dum pluraj jarcentoj la modelo de Newton estis eksterordinare uzebla — kaj ĝi ja daŭre estas, en taŭgaj cirkonstancoj.

3.4. Koloroj

La por homa okulo videbla lumo havas ondolongojn inter 380 nm kaj 750 nm, respondaj al frekvencoj inter 789 THz kaj 400 THz. Se ni konsideras nur purajn spektrajn liniojn, kiom da malsamaj nuancoj povas percepti homo? Laŭ iu informo 150 nuancojn. Aldoniĝas 200 gradoj de helo kaj 150 gradoj de saturiteco. Teorie do temas pri

$$150 \times 200 \times 150 = 4\,500\,000$$

kombinaĵoj. (Gunilla Borgefors, persono informo 2017-08-29.)

Eĉ se oni ne povas distingi inter tiom da kombinaĵoj, la nombro de malsamaj koloroj estas granda, konsiderante ne nur la ondolongon, sed ankaŭ la helon kaj la saturitecon.

Sed kiom da nomoj de koloroj posedas ĉiutaga homa lingvo? Ni ja havas *ruĝa*, *oranĝkolora*, *flava*, *verda*, *blua*, *bruna*, *purpura*, *rozkolora*, *violkolora* kaj kelkaj aliaj, kiel *blanka*, *nigra*, *griza*. Ilona Koutny en sia artikolo (2013:38) mencias dek unu kolornomojn kaj la ordon en kiu ili aperas en pluraj lingvoj — lingvo ne povas posedi la kolornomon *blua* se ĝi ne ankaŭ posedas la kolornomon *ruĝa*. Ĉiuokaze temas pri multe

¹⁵Max Planck (1858–1947).

malpli ol la 150 nuancoj percepteblaj per la okulo. Tio signifas ke la lingvoj enhavas diskretigon, sed ne ekirante el modelo bazita sur la reelaj nombroj, sed ekirante el unu fajna diskretigo kun 150 elementoj aŭ pli kaj alvenante al pli kruda diskretigo kun nur dekono da elementoj kompare al la antaŭa.

3.5. Digita telefonio, muziko kaj televido

Digita teĥniko nuntempe estas uzata en multaj situacioj por transigo de sono kaj lumo. La sonondoj en la aero konsistas el variado de la premo, kiujn mikrofono transformas en analogan signalon. Tiun ĉi oni samplas, farante digitan signalon, kiun oni povas registri sur kompaktdiskon, sendi tra elektra drato aŭ sendi per elektromagnetaj ondoj (radioondoj). Kiam oni aŭskultas la muzikon, la digita signalo transformiĝas reen en analogan signalon. Tio ŝajnas esti kromvojo — kaj estas kromvojo. La avantaĝo estas ke la digitaj signaloj povas esti transigitaj per malpli granda sendadkapacito, respektive povas esti storitaj per malpli granda memorkapacito ol la analogaj. Kun digita registro oni ankaŭ estas liberigita de la ĝena brueto kiun oni ofte aŭdas de vinildisko, kie polvo perturbas la vibradon de la kudrilo en ties spuro.

Aliflanke, ĉar la digita signalo estiĝas per samplado, t.e. per elekto de valoroj en finie multaj punktoj, la digite transigita muziko havas limigojn, kiujn oni kompreneble metu en rilato kun la limigoj de la kapablo percepti de la homa orelo.

3.6. Ĉu diskreta tempo?

La komputiloj laboras per diskretaj tempoŝtupoj kaj ilia evoluigado faris ke diskretaj strukturoj estas pli kaj pli aktualaj. Tio nature starigas demandon: ĉu la tempo mem povas esti diskreta, aŭ diskretigita?

Ni povas reiri al Zenono el Elea (Ζήνων ὁ Ἐλεάτης; proksimume 490 – proksimume 430). Li formulis kvar paradoksojn pri movo, kiujn Segelberg (1945) kaj Ferber (1981) detale pridiskutas. Unu el ili nomiĝas la *duonigo-paradokso*, ĉar ĝi rezonas pri la duonigo de streko. Ĝi diras ke movo estas neeblo, ĉar objekto kiu moviĝas devas unue trairi duonon de la vojo. Se ni diras ke ĝi devas movi sin de 0 al 1, ĝi do devas unue alveni al unu duono, kaj antaŭ tiu al unu kvarono, kaj tiel plu. Ni vidas ke, per pluaĵ duonigoj, ĝi devas alveni al ĉiuj punktoj kun koordinatoj $k/2^m$, $k = 1, \dots, 2^m - 1$, $m = 1, 2, \dots$, do al nefinie multaj. Ni povas pensi pri tiuj punktoj kiel *potenciala nefinio*, pro tio ke ni en konstruado unue povas preni la finie multajn punktojn $k/2^m$ por malsamaj k kaj fiksita m , kaj poste plui al $m + 1$. Tiel Eŭklido konstruis la mezpunktojn. Sed la objekto ne kapablas movi sin en tiu ordo. Tial la punktoj prezentas *faktan nefinion* por la objekto, kaj de tio la asertita neeblo de movo (vidu ekzemple White 1992:147).

Ni scias ke la distingo inter potenciala kaj fakta nefinio estis grava por la grekaj filozofoj kaj matematikistoj. Ekzistas nefinie multaj primoj, sed laŭ Eŭklido ili formas potencialan nefinion, kio signifas ke, se oni havas determinitan aron da primoj, oni ĉiam povas konstrui unu plian. Oni ne estas devigita pensi ke ĉiuj primoj ekzistas samtempe. Vidu diskuton pri tio en mia artikolo (2015a).

Alia el la paradoksoj de Zenono temas pri la sago kiu ne povas moviĝi, kaj kiu povas esti konsiderata kiel antaŭulo al teorio pri diskreta tempo, kaj tial ankaŭ pri diskreta

rekto.

Estus interese scii kion Eŭklido pensis pri tiuj paradoksoj. Kiel mi komprenas liaj rektoj estas neŭtralaj rilate al la sekvoj de la diskreta tempo aŭ diskreta rekto de Zenono.

Nuntempe ni kutime pensas pri rekto kiel aro de punktoj. Ekde la enkonduko de koordinatoj de Kartezio estas nature tiel fari. Rekto tiam havas nefinie multajn elementojn. Sed por Eŭklido ne estis tiel: rekto ĉe li estas memstara, unueca objekto. Ĝi ne konsistas el punktoj; la punktoj menciitaj estas specialaj markiloj sur la linio, france *repères* (Federspiel 1992:389, 1998:67; Kiselman 2015a). Kaj en finia geometria konstruado ni povas havi nur finie multajn *repères*, kontraste al la potenciale nefinie multajn kiuj estiĝas dum senlime ripetitaj dividoj de la orbito de la sago.

Ni havas du konkurencajn ideojn: la rekto laŭ Eŭklido dividebla kiom ajn da fojoj, dum la tempo konsistas el nedivideblaj momentoj. Ili kontraŭdiras unu la alian: ni ne povas atingi atomojn per divido de streko se tiu ĉi estas senlime dividebla.

Ke la tempo estas diskreta estis teorio evoluigita en Hispanio dum la mezepoko:

As regards the theoretical and philosophical analysis of time, the most important and original contribution of medieval Islamic thinkers was their theory of discontinuous, or atomistic, time. (Whitrow 1990:79)

^(T) Kiam temas pri teoria kaj filozofia analizo de la tempo la plej grava kaj originala kontribuado de la mezepokaj islamaj pensuloj estis ilia teorio pri nekontinua, aŭ atomeca, tempo.

Ili faris kompromison per tio ke ili faris la tempon dividebla ĝis iu alta grado, sed rezignis pri nefinia divideblo. Ke ekzistas rilato al la paradoksoj de Zenono estas kredeble. Moshe ben Maimun (naskita en 1135 aŭ 1138 en Córdoba kaj mortinta en 1204 proksime al Kairo), juda filozofo aktiva en islamaj kulturaj rondoj kaj pli konata per sia greka nomo Maimonides, Μαϊμωνίδης, skribis pri la ideoj de islamaj filozofoj:

Time is composed of time-atoms, i.e. of many parts, which in account of their short durations cannot be divided. [...] An hour is, e.g. divided into sixty minutes, the second into sixty parts and so on; at last after ten or more successive divisions by sixty, time-elements are obtained which are not subject to division, and in fact are indivisible. (Whitrow 1990:79)

^(T) La tempo konsistas el tempo-atomoj, t.e. de multaj partoj, kiuj pro sia mallonga daŭro ne povas esti dividitaj. [...] Horo estas, ekzemple, dividita en sesdek minutojn, la sekundo en sesdek partojn kaj tiel plu; finfine, post dek aŭ pli da sinsekvaj dividoj per sesdek, temperoj estas atingitaj kiuj ne estas submetitaj al dividado, kaj fakte estas nedivideblaj.

Tiel ni atingas la atomojn de la tempo! Post du dividoj ni alvenas al 60^{-2} horoj, kiu estas unu sekundo, kaj post dek al 60^{-10} horoj, proksimume 6 femtosekundoj, dum 60^{-11} horoj estas proksimume 100 atosekundoj. Ni per tio estas ĉe la temposkalo por iuj ĥemiaj reakcioj, kiujn oni nuntempe studas en la femtoĥemio 800 jarojn poste. Unu el la plej rapidaj komputiloj povas fari $3.386 \cdot 10^{16}$ glitkomajn aritmetikajn operaciojn en ĉiu sekundo, kio signifas ke ĉiu operacio rajtas uzi maksimume 30 atosekundojn. Do Maimonides pravis en tio ke li skribis ne dek fojojn, sed dek fojojn aŭ pli. La Planck-tempo estas pli mallonga, nur $5,391 \cdot 10^{-44}$ sekundoj.

Ni aldonu ke la atomisma teorio de la materio kutime estas atribuata al Leŭkippos Λεύκιππος (n. ĉirkaŭ 480 a.Kr.) kaj Demokritos Δημόκριτος (ĉirkaŭ 460 – ĉirkaŭ 370).

3.7. Fonologio

3.7.1. Fonemoj estas la rezulto de diskretigo

Diskretigo ekzistas ankaŭ kiel pli ĉiutaga sperto, kiun ĉiu plenkreskulo iam travivis: la transiro de sonoj al fonemoj. Eta infano povas almenaŭ potenciale krei milojn da sonoj, sed baldaŭ lernas fonemojn, kiuj ne estas tre multaj, eble kelkaj dekoj. Tio ĉi estas diskretigo. Proksimume je la pubereco ĉe plej multaj homoj ĉesas la kapablo krei sonojn inter la fonemoj – la diskretigo estas finita.

Por trakti sonojn ni bezonos scii ion pri ondoj, pri kunmeto de ondoj kaj pri analizo de signaloj.

3.7.2. Furiera analizo kaj sintezo

Ĉiuj longedaŭra signalo povas esti priskribita kiel sintezo de puraj ondoj, per matematika formulo

$$(3.1) \quad \alpha(t) = \int_{\mathbf{R}} f(\tau)e^{2\pi i\tau t} d\tau, \quad t \in \mathbf{R},$$

kie la signalo estas notita per α kaj estas funkcio de la tempo t , kaj kie la funkcio f (kun variablo τ , la frekvenco) estas nomata ties **spektro**. La **puraj ondoj** estas la signaloj $t \mapsto e^{2\pi i\tau t}$ por diversaj elektoj de la frekvenco τ .

Se la signalo estas donita, oni povas trovi ĝian spektron f ; la proceduro nomiĝas *analizo* (etimologie ‘dissolvo’, laŭlitere ‘suprensolvo’). Alidirekte, el donita spektro f oni povas trovi la signalon per *sintezo* (etimologie ‘kunmeto’). Matematike oni parolas pri *furiera analizo* och *furiera sintezo* laŭ Joseph Fourier (1768–1830), kiu analizis la disvastiĝon de varmo en materio per metodoj kreitaj de li mem – poste furiera analizo kaj furiera sintezo fariĝis ege gravaj iloj.

La puraj ondoj aŭ osciloj $f(\tau)e^{2\pi i\tau t}$ povas esti skribitaj

$$f(\tau)e^{2\pi i\tau t} = |f(\tau)|(\cos 2\pi\tau(t - t_\tau) + i \sin 2\pi\tau(t - t_\tau)), \quad t \in \mathbf{R},$$

kie t_τ estas ŝovo de la fazo. Ĝi estas determinita per la ekvacioj

$$\cos(2\pi\tau t_\tau) = \operatorname{Re} f(\tau)/|f(\tau)|, \quad \sin(2\pi\tau t_\tau) = -\operatorname{Im} f(\tau)/|f(\tau)|.$$

Se la signalo havas reelajn valorojn, validas

$$(3.2) \quad \alpha(t) = \operatorname{Re} \alpha(t) = \int_{\mathbf{R}} |f(\tau)| \cos 2\pi\tau(t - t_\tau) d\tau, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Tiu ĉi estas la ĝenerala formo de signalo kun reelaj valoroj, sed por la sintezo de lingvaj sonoj ni rajtas simpligi pro tio ke la orelo de homo ne povas percepti la faz-ŝovojn. Tiu rimarkiginda fakto permesas al ni preni la grandon t_τ egalan al nulo. Tio

validas almenaŭ por longaj vokaloj, kiuj povas esti modeligitaj per malgranda nombro de puraj ondoj:

The astonishing fact is that our ears can hear no difference between all these wave forms. (Ladefoged 1973:41)

^(T) La surpriza fakto estas ke niaj oreloj ne povas aŭdi iun diferencon inter ĉiuj tiuj ondoformoj.¹⁶

La laboro per analizo kaj sintezo de vokaloj estus vana se la homo povus percepti tiajn faz-ŝovojn. La homaj aŭdorganoj faras specon de furiera analizo de la sonoj, kaj la cerbo ricevas informon pri frekvencoj kaj amplitudoj, sed ne pri la fazoj. Tio sekvigas redukton de la aro de signaloj kiuj estas sintezablaj, sed estas sensignife se ni volas nur studi la lingvajn sonojn (ĉiuokaze aliajn ol la plozivojn).

Por longaj vokaloj krome validas ke ni povas proksimumigi la integraĵon en (3.2) per finia sumo, do per

$$(3.3) \quad \alpha(t) \approx \sum_{j=1}^N g(\tau_j) \cos 2\pi\tau_j t, \quad t \in \mathbf{R},$$

kie ni nun prenas nur finie multajn frekvencojn τ_1, \dots, τ_N kaj skribas g por $|f|$. Ĉi tie la dekstra flanko prezentas signalon kiu neniam silentas; ĝi daŭras eterne. Tio ŝajnas esti malbona modelo por homa parolado, kiu ja nepre devas fini post iu tempo. Sed en la nuna kunteksto tio ne estas problemo, ĉar ni povas senprobleme prononci vokalon dum 15 sekundoj, kaj tio estas eterne kompare al la plozivoj [b, p, d, t] — la laste menciitaj devas esti analizitaj kaj sintezitaj alimaniere.

Iuj konsonantoj, kiel [s, f, v], povas esti prononcataj dum 15 sekundoj, sed por ili oni devas uzi pli grandan valoron de N por ekhavi taŭgan modelon. Por la longaj vokaloj validas ke malgranda valoro de N , ekzemple $N = 2$ eller 3, sufiĉas por distingi ilin.

Montriĝas ke la vokaloj de la homa voĉo havas spektron kun du aŭ tri pintoj, nomataj **formantoj**. Tiu sekvigas ke oni povas konsideri signalojn kiuj konsistas el nur du aŭ tri puraj ondoj kaj sekve ke ĉiu vokalo povas esti reprezentita per funkcio α donita per

$$(3.4) \quad \alpha(t) \approx v_1 \cos 2\pi\tau_1 t + v_2 \cos 2\pi\tau_2 t + v_3 \cos 2\pi\tau_3 t, \quad t \in \mathbf{R},$$

kie τ_1 , τ_2 kaj τ_3 estas la frekvencoj de la plej laŭtaj sonkomponentoj kaj $v_1 = g(\tau_1)$, $v_2 = g(\tau_2)$ kaj $v_3 = g(\tau_3)$ estas ties laŭtoj.

Ĉi tie ni vidas ke la modelo por la vokalo α estas determinita per ses reelaj nombroj:

$$(\tau_1, \tau_2, \tau_3, v_1, v_2, v_3) \in \mathbf{R}^6.$$

Desegni la vokalojn en ses-dimensia spaco estus iom tro postulite. Sed ni povas iom redukti la nombron. Unue ni povas, anstataŭ rigardi la triopon (v_1, v_2, v_3) kontentiĝi per rigardo de la paro $(v_2/v_1, v_3/v_1)$, t.e. nur konsideri la relativajn fortojn de la puraj ondoj. Oni ja kapablas aŭdi kion diras homoj eĉ se ili ne ĉiam parolas per la sama laŭto.

¹⁶Nome kiam oni varias la fazojn ĉe la konstituantaj ondoj dum ties frekvencoj kaj amplitudoj estas fiksitaj.

3.7.3. Fonemoj

En la plejmulto de la aŭstralaj lingvoj ekzistas nur tri vokalfonemoj: /i/, /a/ kaj /u/. Ili estas la vokaloj kiuj havas maksimuman distancon inter si; pro tio ni povas nomi ilin *ekstremaj*. Tiuj tri estas la plej oftaj en la lingvoj de la planedo. Iam oni aldonas kvaran al tiuj ekstremaj: /α/.

La kvar menciitaj ekstremaj vokaloj formas kvarlateron diagramo kiun ni nun priskribos. Ĉiuj vokaloj en ĉiuj lingvoj havas lokon ene de tiu kvarlatero aŭ troviĝas nur iomete ekster ĝi.

En esperanto ni havas kvin: krom la tri menciitaj ekzistas /e/ (inter /i/ kaj /a/) kaj /o/ (inter /α/ kaj /u/). En la persa lingvo oni skribas la ekstremajn vokalojn, sed kutime ne /e/ kaj /o/. Ekzemple la vorto *telefono* estas skribata (transskribite) *tlfn*, kvankam oni prononcas ĝin /telefon/. Tio montras ke oni iam konsideris la ekstremajn vokalojn gravaj, la du aliajn malpli gravaj. Lingvoj kun multe da vokaloj, ekzemple la franca kaj la sveda, aldonas plurajn.

Kial mi skribis “maksimuman distancon” kaj “inter /i/ kaj /a/”? La klarigo estas ke ni povas fari du-dimensian diagramon por la vokaloj, kaj en tiu diagramo ni ja povas paroli pri loko inter du punktoj. Pli precize: oni desegnas diagramon kun du aksoj: laŭ kiuj oni metas la frekvencojn de la du plej malaltaj formantoj. La kvar menciitaj ekstremaj vokaloj formas kvarlateron en la diagramo, kaj ĉiuj vokaloj en ĉiuj lingvoj havas lokon ene de tiu kvarlatero aŭ troviĝas nur iomete ekster ĝi.

Ni mezuras la frekvencojn en hercoj, $\text{Hz} = \text{s}^{-1}$, la nombro de periodoj en unu sekundo. La funkcio $t \mapsto \cos(2\pi\tau t)$ kun pozitiva parametro τ havas la frekvencon τ kaj la periodon $1/\tau$. La tono kun frekvenco $\tau = 440 \text{ Hz}$ (sekve kun periodo $0,002272727 \dots$ sekundoj) estas uzata kiel referenca tono kaj estas nomata A3, La3, A4, a' aŭ \bar{a} .

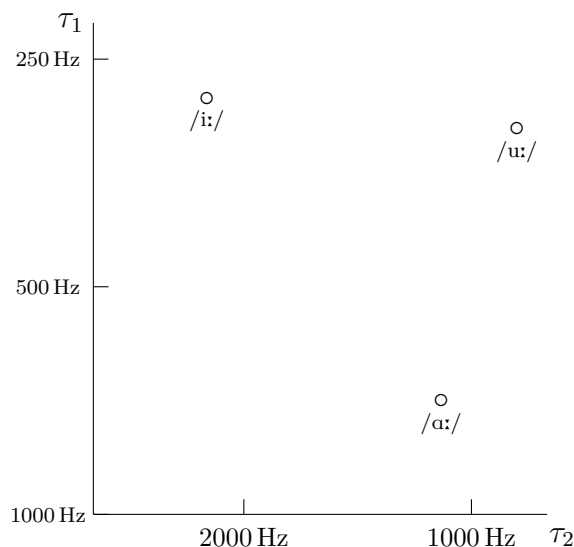
Ekzemple ni havas por la tri ekstremaj vokaloj:

Tabelo 3.1. La frekvencoj de la tri unuaj formantoj de tri vokaloj.

<i>Vokalo</i>	τ_1	τ_2	τ_3
	Hz	Hz	Hz
/i:/	280	2250	2890
/α:/	710	1100	2540
/u:/	310	870	2250

$$\begin{aligned}
 /i:/: & \log_{10} \tau_1 = \log_{10} 280 \approx 2,45, & \log_{10} \tau_2 = \log_{10} 2250 \approx 3,35; \\
 /α:/: & \log_{10} \tau_1 = \log_{10} 710 \approx 2,85, & \log_{10} \tau_2 = \log_{10} 1100 \approx 3,04; \\
 /u:/: & \log_{10} \tau_1 = \log_{10} 310 \approx 2,49, & \log_{10} \tau_2 = \log_{10} 870 \approx 2,94; \\
 & \log_{10} \tau_1 = \log_{10} 1000 = 3, & \log_{10} \tau_2 = \log_{10} 2000 \approx 3,301; \\
 & \log_{10} \tau_1 = \log_{10} 500 \approx 2,609, & \log_{10} \tau_2 = \log_{10} 1000 = 3; \\
 & \log_{10} \tau_1 = \log_{10} 250 \approx 2,398.
 \end{aligned}$$

Por fari desegnaĵon sur du-dimensia papero ni forgesas pri la tria formanto, kiu ne estas necesa por distingi la vokalojn, sed kiu verŝajne plifaciligas rekonon ĉe sintezado.



Figuro 3.1. La loko de tri vokaloj en ebena de la du ĉefa frekvencoj (τ_1, τ_2). Laŭ la vertikala akso estas metita la logaritmo de la frekvenco de la unua formanto, kreskanta malsupren; laŭ la horizontala akso la logaritmo de la frekvenco de la dua formanto, kreskanta maldekstren.

La rilato $\tau_2(\alpha)/\tau_1(\alpha)$ estas sekve

- 8,03 (2 oktavoj) por la vokalo $\alpha = /i:/$;
- 1,55 (0,6 oktavoj) por la vokalo $\alpha = /a:/$; kaj
- 2,81 (1,5 oktavoj), por la vokalo $\alpha = /u:/$.

Por la unuaj formantoj la frekvencoj troviĝas inter 280 kaj 710 Hz, por la duaj inter 870 kaj 2250 Hz. La buŝo de bebo povas formi multajn sonojn kun frekvenco inter tiuj limoj, kaj homa orelo povas percepti ilin ĉiujn. Sed la rimarkinda fakto estas do ke homa lingvo kun tri vokaloj realigas nur tri el tiuj nefinie multaj sonoj; por lingvo kun la kvin vokaloj nur kvin el nefinie multaj. Verdire forta diskretigo.

Ion similan oni povas diri pri la frekvencoj. Infanoj kaj virinoj uzas pli altajn frekvencojn ol viroj, sed virinoj povas tamen identigi la vokalojn kiam viroj parolas, kaj inverse. Kiel ekzemplon ni povas uzi la du plej malaltajn formantojn de la vokalo [i:] laŭ figuro en Peterson (1953) redonita en Sivertsen (1976:31). Tie videblas ke $(\tau_1, \tau_2) = (229, 2136)$ por viroj, $(273, 2772)$ por virinoj kaj $(412, 3156)$ por infanoj. La unuo estas hertz (herco, Hz), kiu estas la nombro en unu sekundo: $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$. Tio signifas ke la unua formanto de virinoj situas 19% pli alte ol tiu de viroj, dum tiu de la infanoj situas 51% pli alte ol tiu de virinoj kaj 80% pli alte ol tiu de viroj.

La dua formanto situas 30% pli alte ĉe virinoj kompare al viroj, dum ĉe infanoj ĝi situas 14% pli alte ol ĉe virinoj kaj 48% pli alte ol ĉe viroj. Sed la kvociento τ_2/τ_1 varias multe malpli ol la frekvencoj mem: ĝi estas 9,33 ĉe viroj, 10,15 ĉe virinoj kaj 7,66 ĉe infanoj. Tiu ĉi kompare malgranda vario de la kvociento τ_2/τ_1 estas la bazo por la eblo kompreni de la vokaloj inter personoj kiuj uzas malsamajn frekvencojn en sia parolado. Ni povas konstati ke virinoj havas pli altan kvocienton ol viroj kaj infanoj kiam temas pri [i:]. Montriĝas ke la sama validas ankaŭ por la aliaj vokaloj, kun la escepto de [u:].

Pro tio sufiĉas registri la relativajn frekvencojn $(\tau_2/\tau_1, \tau_3/\tau_1)$. Per tio ni reduktis la priskribon de vokalo al punkto

$$(3.5) \quad (\tau_2/\tau_1, \tau_3/\tau_1, v_2/v_1, v_3/v_1) \in \mathbf{R}^4$$

en kvar-dimensia spaco. Kvar dimensioj estas malpli ol ses, kiujn ni havas antaŭe, sed por desegni tiajn punktojn ni daŭre bezonas tre dikan paperon. Montriĝas ke taŭgas uzi nur du el tiuj nombroj por distingi vokalojn ekzemple

$$(3.6) \quad (\tau_2/\tau_1, v_2/v_1) \in \mathbf{R}^2.$$

Per tio ni povas desegni la vokalojn sur kutima nur du-dimensia papero.

Kiel vokalo estas perceptata estas pli-malpli determinite per tri grandoj: la frekvencoj τ_1 kaj τ_2 de la du plej fortaj ondoj en la furiera analizo kaj la kvociento inter la laŭtoj de tiuj du ĉefaj ondoj. Tio signifas ke la homa orelo povas distingi multegajn sonojn, ĉar la frekvencoj povas varii en granda intervalo kaj la kvociento estas nombro inter eble 0,1 kaj 1. Sed por la fonemoj tiuj grandoj povas alpreni, kiel jam dirite, nur dekojn da valoroj. Eble eĉ du grandoj sufiĉas: la kvociento τ_2/τ_1 de la frekvencoj kaj la kvociento de la laŭtoj.

Alia maniero elekti koordinatojn estas malatenti la laŭton de la formantoj kaj nur atenti ties frekvencojn, do studi la paron

$$(3.7) \quad (\tau_1, \tau_2) \in \mathbf{R}^2,$$

kiel ni faras en figuro 3.1. La malforto de tio kompare al la antaŭa, kie oni havas la kvocientojn inter frekvencoj kaj laŭtoj estas kompreneble ke la frekvencoj varias de virinoj al viroj. Sed, kiel dirite, tio implicas precipe nur ŝovon de la diagramo.

Sed la vario estas daŭre nefinia. La du punktoj en (3.6) kaj (3.7) povas libere varii en granda regiono de la ebena. Ne ĉiuj punktoj respondas al vokaloj kiuj vere aperas en iu studata lingvo, kaj du malsamaj punktoj povas respondi al la sama vokalo, t.e. estas perceptata kiel nur malgrave diferencaj variantoj de unu sola fonemo. Tiel estiĝas la fonemoj per grupigo de sonoj en ekvivalent-klasoj. Alivorte: la spaco de vokalfonemoj estas kvocienta spaco de la spaco de ĉiuj penseblaj vokalsonoj; oni ricevas diskretigon de regiono en la ebena iom simila al la fakto ke la Khalimsky-ebena estas kvocienta spaco de la eŭklida ebena (vidu ĉapitron 6). Sed la ekvivalent-rilatoj estas kompreneble malsamaj en malsamaj lingvoj.

Por esti pli preciza oni devas diri ke la modelo kun du aŭ tri puraj ondoj estas modelo por la daŭriganta fazo de longa vokalo. Ĝi ne povas kapti la komencon aŭ la finon de la vokalo. Sed por longa vokalo kredeble tiu meza fazo estas la plej grava por la rekono. Ankaŭ por mallonga vokalo oni povas kapti la mezan fazon, sed ĉi tie eble la komenco kaj fino ludas kompare pli grandan rolon. Eĉ pli klare tio estas kiam temas pri plozivoj, kiel [g, k], kiuj laŭdifine estas transigaj, kaj tial havas komplikajn spektrojn kiuj ne povas esti alproksimigitaj per du aŭ tri puraj ondoj.

3.7.4. Priskribo de kelkaj vokaloj

Ni rigardu kelkajn fakte okazantajn vokalojn.

Kiel jam menciite la spektro de vokalo havas du aŭ tri pintojn, du aŭ tri formantojn. Ekzemple, laŭ Ladefoged (1993:193), la vokalo [i] havas tri pintojn, ĉe 280, 2250 kaj 2890 Hz. La unua formanto estas tiu kiu havas la plej malaltan frekvencon; la dua tiu kiu havas la duan plej malaltan frekvencon. Vidu tabelon 3.1.

Kredeble estas la voĉo de la verkinto mem kiun li analizis; la voĉo de virino estas metita pli alte, sed la rilatoj estas, kiel ni vidis, proksimume la samaj. Por la vokalo [i] la dua formanto situas multe pli alte ol la unua: la kvociento estas $2250/280 \approx 8 = 2^3$, kiu estas tri oktavoj.

Kiel kontrasto ni povas konsideri la vokalon [a]. Ĝi havas tri formantojn ĉe 710, 1100 kaj 2540 Hz. Ĉi tie la rilato inter la unuaj du estas nur $1100/710 \approx 1,55$, kiu estas iom pli ol duona oktavo ($2^{0,63} \approx 1,55$). Por [i] la distanco inter la du plej malaltaj formantoj estas preskaŭ 4,8 fojojn pli granda ol por [a] mezurite per logaritma skalo.

La vokalo [u] havas tiu-rilate mezan situacion. Ĝi havas tri formantojn kun frekvencoj 310, 870 kaj 2250 Hz. Ĉi tie la rilato inter la unuaj du estas $870/310 \approx 2,8$, kiu estas unu kaj duono oktavo ($2^{1,5} = 2\sqrt{2} \approx 2,83$). Por [i] la distanco inter la du plej malaltaj estas dufoje pli granda ol por [u] mezurite per logaritma skalo.

Alia diferenco inter [i] kaj [u] estas la rilato inter la laŭtoj de la formantoj. Laŭ Ladefoged (1973:96–97) la amplitudo ĉe la dua formanto ĉe [i] estas proksimume 0,67 de tiu de la unua, ĉe la tria 0,96 de tiu de la unua. Ĉe [u] la dua formanto estas pli mallalta, proksimume 0,3 de tiu de la unua. Tria formanto aperas ĉe Ladefoged (1993:193) sen indiko de la laŭto, sed tute mankas en Ladefoged (1973:97).

Tio signifas ke la kvaropo (3.5) por [i] estas¹⁷

$$(\tau_2/\tau_1, \tau_3/\tau_1, v_2/v_1, v_3/v_1) = (2250/280, 2850/280, 0.67, 0.96) \approx (8.0, 10.2, 0.67, 0.96),$$

dum la kvaropo por [u] estas

$$(\tau_2/\tau_1, \tau_3/\tau_1, v_2/v_1, v_3/v_1) = (870/310, 2250/310, 0.3, x) \approx (2.8, 7.3, 0.3, x).$$

La dirita montras ke taŭga sintezo de la vokalo [i] estas donita per

$$\alpha_{[i]}(t) = \cos(2\pi \cdot 280t) + 0.67 \cos(2\pi \cdot 2250t) + 0.96 \cos(2\pi \cdot 2850t).$$

Plue taŭga sintezo de la vokalo [u] ŝajnas esti

$$\alpha_{[u]}(t) = \cos(2\pi \cdot 310t) + 0.3 \cos(2\pi \cdot 870t).$$

Se oni desegnas tiujn du kurbojn, oni vidas ke la kurboj por [i] kaj [u] estas tre malsimilaj: tiu por [i] montras klare siajn altajn frekvencojn; tiu por [u] estas proksima al pura ondo, ĉar la dua formanto estas malforta.

En (3.6) [i] ricevas la koordinatojn $(\tau_2/\tau_1, v_2/v_1) = (8.0, 0.67)$, [a] la koordinatojn $(1.55, 0.92)$ kaj [u] la koordinatojn $(2.8, 0.3)$.

¹⁷La internacia normo por skribi decimalojn estas komo post la entjera parto. Sed en tiu ĉi ekzemplo estas pli klare uzi punkton, ĉar la komo estas bezonata por disigi la vicerojn.

Se ni anstataŭe malatentas la laŭtojn kaj atentis nur la frekvencojn, [i] en (3.7) ricevas la koordinatojn $(\tau_1, \tau_2) = (280, 2250)$ (esprimita en Hz), [a] la koordinatojn (710, 1100) kaj [u] la koordinatojn (310, 870) (tabelo 3.1). Tie ili kuŝas en la vokalebena kaj formas triangulon. Kiel menciite plej multaj vokaloj situas en tiu triangulo; neniu situas tre fore de ĝi.

Ĉi tie estus nature meti la frekvencojn de la unua formanto laŭ la horizontala akso kun pli altaj frekvencoj dekstren kaj tiujn de la dua formanto laŭ la vertikala akso kun pli altaj frekvencoj supren. Sed laŭ tradicio oni faras male: la frekvencojn de la dua formanto oni metas laŭ horizontala akso kun kreskantaj frekvencoj maldekstren kaj tiujn de la unua formanto laŭ vertikala akso kun kreskantaj frekvencoj malsupren. La kaŭzo estas ke oni faris tiajn diagramojn pri la vokaloj en la tiel nomata vokal-kvarlatero multe pli frue ol oni mezuris la frekvencojn kaj tiam turnis la vizaĝon maldekstren, tiel ke antaŭaj vokaloj estis metitaj plej maldekstre kaj la malantaŭaj plej dekstre.

Ambaŭ formantoj varias en intervalo proksimume 1,6 oktavojn larĝa, sed la dua situas inter duono kaj tri oktavojn pli alte ol la unua.

Interesa observo estas ke ĉe la serio de la kvin vokaloj [i, e, a, o, u] la frekvencoj de la dua formantoj malkreskas monotone. La frekvencoj de la unuaj formantoj unue kreskas kaj poste malkreskas. Tial, se ni filtris la vokalojn tra filtro kiu forprenas la unuajn (plej malaltajn) frekvencojn, tiam ni ricevas monotone malkreskantan vicon de frekvencoj. Fakte, ni povas eĉ sen elektrona ekipaĵo realigi tian filtradon: kiam oni flustras, oni fermas la bazan frekvencon. Kiam oni flustras la vokalojn [i, e, a, o, u], oni klare aŭdas ke la tonalto malkreskas (Ladefoged 1993:191). Faru!

3.7.5. Malsamaj diskretigoj en malsamaj lingvoj

La diskretigo de sonoj estas malsama en malsamaj lingvoj — ne surprize. Dum sved-parolantoj distingas inter *fira* ‘celebri’ kaj *fyra* ‘kvar’, inter *Idre* kaj *Ydre* (loknomoj en Svedio), parolantoj de iuj aliaj lingvoj, kie /i:/ kaj /y:/ ne estas malsamaj fenomenoj, ne povas fari tiun distingon. Tipa ekzemplo estas la kontrasto inter la pola kaj la sveda. Stefan Jerzy Budmar kalkulas je 18 vokalfonemoj en la sveda kontraŭ nur 8 en la pola (1983:50), kaj je 28 konsonantfonemoj plus du duonvokaloj en la pola kontraŭ nur 18 en la sveda (1983:52–53). Tio implicas ke persono kiu kiel infano lernis la svedan malfacile aŭdas distingojn inter la multaj konsonantoj en la pola; alidirekte la distingo en la sveda inter longaj kaj mallongaj vokaloj kreas malfacilon por polparolantoj.

Kaj dum la sveda havas nur la distingon inter longaj kaj mallongaj vokaloj, ekzemple inter /ɑ:/ kaj /a/ en *vas* / *vass* ‘vazo’ / ‘akra’; kaj inter /i:/ kaj /i/ en *fin* / *finn* ‘fajna’ / ‘trovu’, la finna distingas kaj inter longaj kaj mallongaj vokaloj, kaj inter longaj kaj mallongaj konsonantoj (vidu ekzemple Sajavaara & Dufva 2001:250). Iuj ekzemploj, prenitaj el Lieko (1992:94): La du vokaloj /u/ kaj /e/ kaj la konsonanto /l/ povas teorie esti kombinaĵoj de longaj kaj mallongaj fenomenoj. El tiuj ok kombinaĵoj nur unu ne estas realigita; sep vortoj ekzistas en la lingvo:

(000) *tule* ‘venu’;

(001) *tulee* ‘li/ŝi venas’;

- (010) *ei tulle* ‘li supozeble ne venas’ (negativa potencialo de *tulla* ‘veni’, tria persono singularo);
- (011) *tullee* ‘li supozeble venas’ (potencialo de *tulla* ‘veni’);
- (100) **tuule* ne aperas;
- (101) *tuulee* ‘blovas’;
- (110) *ei tuulle* ‘supozeble ne blovas’ (negativa potencialo de *tuulla* ‘blovi’, tria persono singularo);
- (111) *tuullee* ‘supozeble blovas’ (potencialo de *tuulla* ‘blovi’, tria persono singularo).

3.8. Komparoj de du kalkuloj

La derivaĵo de funkcio estas limeso de dividitaj diferencoj:

$$(3.8) \quad f'(x) = \lim_{\substack{\delta > 0 \\ \delta \rightarrow 0}} \frac{f(x + \delta) - f(x)}{\delta}.$$

Komputilo ne povas pritrakti limesojn — pro tio ĝi devas kalkuli per diferencoj. (Foje kalkulistoj diras ke ili solvas partajn diferencialajn ekvaciojn, sed tion ili ne faras: ili solvas diferencajn ekvaciojn, kiuj iel alproksimas al diferencialaj ekvacioj.)

La diferenciala kaj integra kalkulo de Newton kaj Leibniz postulas la nocion de limeso, kiu ne estas plene elementa. Male, la kalkulo de diferencoj kaj sumoj bezonas nur elementajn aritmetikajn operaciojn. Se ni konsideras funkcion $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, ni povas formi la diferencon $f(x + \delta) - f(x)$ kaj la kvocienton

$$\frac{f(x + \delta) - f(x)}{\delta}$$

por $\delta > 0$. Tiu esprimo estas la klino de la streko inter la du punktoj $(x, f(x))$ kaj $(x + \delta, f(x + \delta))$ en la ebenaĵo. Ĉi tie ni uzas nur la elementajn aritmetikajn operaciojn adicon, subtrahon kaj dividon. Sed la derivaĵo de f en la punkto x estas la limeso (3.8), se ĝi ekzistas, kaj limeso ne estas facile klarigebla al malgrandaj infanoj.

Sed tio ne signifas ke la kalkulo de diferencoj kaj sumoj estas pli facilaj ol la kalkulo de derivaĵoj kaj integraĵoj. Tute male, kiel ni vidos.

Ni komparu formulojn el la kalkulado de diferencoj kaj sumadajn formulojn kun respondaj formuloj en la diferenciala kaj integra kalkulo.

3.8.1. Derivaĵoj kaj diferencoj

$$f(x) = x^m, \quad x \in \mathbf{R}; \quad f'(x) = mx^{m-1}.$$

Ni komparu kun

$$f(x) = x^m, \quad x \in \mathbf{Z}; \quad f(x + 1) - f(x) = mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2} + \dots + mx + 1.$$

3.8.2. Integraĵoj kaj sumoj

$$f(x) = x^m, \quad x \in \mathbf{R}; \quad \int_0^x t^m dt = \frac{1}{m+1} x^{m+1}, \quad x \geq 0.$$

Ni komparu kun

$$f(x) = x^m, \quad x \in \mathbf{Z};$$

$$\sum_{t=0}^x t^m = \frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{x^m}{2} + \sum_{j=2}^m \binom{m}{j-1} \frac{B_j}{j} x^{m-j+1}, \quad x \geq 0, \quad m \geq 1,$$

kie B_j estas la nombroj de Bernoulli,¹⁸ la unuaj el kiuj estas:¹⁹

$$B_1 = \frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0, B_6 = \frac{1}{42}, B_7 = 0, \dots;$$

nulas ĉiuj kun neparaj indicoj ≥ 3 .

$$m = 0: \quad \sum_{t=0}^x t^0 = x + 1;$$

$$m = 1: \quad \sum_{t=0}^x t = \frac{1}{2} x(x + 1);$$

$$m = 2: \quad \sum_{t=0}^x t^2 = \frac{1}{6} x(x + 1)(2x + 1);$$

$$m = 3: \quad \sum_{t=0}^x t^3 = \frac{1}{4} x^2(x + 1)^2;$$

$$m = 4: \quad \sum_{t=0}^x t^4 = \frac{1}{30} x(x + 1)(2x + 1)(3x^2 + 3x - 1);$$

$$m = 5: \quad \sum_{t=0}^x t^5 = \frac{1}{12} x^2(x + 1)^2(2x^2 + 2x - 1);$$

$$m = 6: \quad \sum_{t=0}^x t^6 = \frac{1}{42} x(x + 1)(2x + 1)(3x^4 + 6x^3 - 3x + 1);$$

$$m = 7: \quad \sum_{t=0}^x t^7 = \frac{1}{24} x^2(x + 1)^2(3x^4 + 6x^3 - x^2 - 4x + 2).$$

Por $m = 2, 4, 6$ la sumo enhavas la faktoron $x(x + 1)(2x + 1)$; por $m = 3, 5, 7$ la faktoron $x^2(x + 1)^2$. Ni rajtas diveni ke tiel estas ankaŭ por para $m \geq 8$ kaj nepara $m \geq 9$, respektive. Ke x estas faktoro por $m \geq 1$, kaj ke x^2 estas faktoro por nepara $m \geq 3$ facile videblas el la ĝenerala formulo.

Komparante kun rektanguloj ni alvenas al facilaj neegalajoj:

$$\int_1^{x+1} (t-1)^m dt = \frac{x^{m+1}}{m+1} \leq \sum_1^x t^m \leq \frac{(x+1)^{m+1} - 1}{m+1} = \int_1^{x+1} t^m dt$$

¹⁸Nomata pro Jakob Bernoulli (1654–1705).

¹⁹Parte laŭ Градштейн & Ръжик (1962).

por m reela kaj pozitiva.

Pli preciza neegalaĵo por $m \geq 1$ estas

$$\sum_1^x t^m \leq \int_1^{x+1} (t - \frac{1}{2})^m dt = \frac{(x + \frac{1}{2})^{m+1} - (\frac{1}{2})^{m+1}}{m + 1} = \frac{x^{m+1}}{m + 1} + \frac{x^m}{2} + \cdots + \frac{x}{2^m}.$$

3.9. Ekzemploj de diskretigo de rektoj

Du rektoj en la eŭklida ebena aŭ estas paralelaj aŭ renkontiĝas en unu kaj nur unu punkto. Se la rektoj ne estas vertikalaj, ili povas esti priskribitaj per ekvacioj $y = ax + b$ kaj $y = cx + d$ laŭ la kalkulo de Kartezio, kaj, kondiĉe ke la klinoj a kaj c malsamas, ili renkontiĝas en la punkto

$$\left(\frac{d - b}{a - c}, \frac{ad - bc}{a - c} \right).$$

Ofta diskretigo de kurboj en la ebena estas tiu laŭ kiu la kurbo donita per $y = F(x)$, x reela, estas anstataŭigita per $y = f(x) = \lfloor F(x) \rfloor$, x entjero, kie $\lfloor t \rfloor$ estas la plej granda entjero kiu malplias²⁰ ol la nombro t , kio signifas ke validas la neegalaĵoj $t - 1 < \lfloor t \rfloor \leq t$. La funkcio $t \mapsto \lfloor t \rfloor$ nomiĝas *la planka funkcio*. Oni simple rondigas malsupren; kiel jam menciite $\lfloor \pi \rfloor = 3$. Se ni nun elektas $F(x) = -\frac{1}{2}x$ kaj $G(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$, du rektojn kun malsamaj klinoj, ni trovas ke la diskretigitaj rektoj, kiuj estas donitaj per $f(x) = \lfloor F(x) \rfloor$ kaj $g(x) = \lfloor G(x) \rfloor$, nenie renkontiĝas por iu entjero x . Ĉu ni tiam rezignu pri la eco ĉe la eŭklidaj rektoj ke du ne-paralelaj rektoj en la ebena renkontiĝas? Aŭ ĉu ni trovu aliajn diskretigojn? La demandoj estas aktualaj. Solvo estis proponita de Efim Khalimsky – dekomence sen ajna penso pri tiu uzo.

Alian rimarkigindan ekzemplon ni ekhavas se ni elektas $F(x) = \frac{1}{2}x$ kaj $G(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. Ili prezentas du paralelajn rektojn en la eŭklida ebena, ĉar ilia komuna klino estas unu duono. Sed kiam ni diskretigas ilin per la planka funkcio, ni trovas ke $\lfloor F(x) \rfloor = \lfloor G(x) \rfloor$ kiam x estas para entjero, dum $\lfloor F(x) \rfloor \neq \lfloor G(x) \rfloor$ kiam x estas nepara entjero. Tiel ni havas du digitajn rektojn kiuj ne egalas, sed tamen havas nefinie multajn komunajn punktojn.

Tiuj du ekzemploj montras al problemoj kiuj estiĝas ĉe diskretigo se oni volas konservi la ecojn al kiuj oni al kutimiĝis en la eŭklida geometrio.

²⁰Mi uzas la sufikson *-ed-* por indiki malfortigon. Ekzemple, x estas pozitiva se kaj nur se $x > 0$, pozitiveda se kaj nur se $x \geq 0$; a plias ol b se kaj nur se $a \geq b$.

4. Ĉapitro kvara: Tri problemoj en diskreta optimumado

4.1. Enkonduko

Pierre de Fermat (naskita eble en 1601, pli kredeble en 1607 aŭ 1608; morta en 1665) priskribis metodon por trovi optimuman valoron: trovi nulejon de la derivaĵo.

La regulo de Fermat. *Se funkcio f havas lokan maksimumon aŭ lokan minimumon en interna punkto a de intervalo kie ĝi estas difinita, kaj se f estas derivebla en a , tiam ĝia derivaĵo f' egalas al nulo en a .*

Sed kion fari se la derivaĵo ne ekzistas — ekzemple se oni volas trovi la plej malgrandan valoron de la funkcio kiu por la nombro x donas la absolutan valoron de x ? Ĝi ja havas sian minimumon en la origino, sed tie la derivaĵo ne ekzistas.

Tiaj demandoj kondukis esploristojn al nova esplorbranĉo: *neglata analitiko*. Elstaras inter tiuj esploristoj Francis Clarke kaj Boris Mordukovich.

En optimumado gravas distingi inter loka minimumo kaj globa minimumo:

Difino 4.1. Se por iu funkcio $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ ekzistas punkto a tia ke $f(a) \leq f(x)$ por ĉiuj $x \in \mathbf{R}^n$, ni diras ke $f(a)$ estas la **minimumo** de f kaj ke a estas **minimumejo**. Se necese oni precizigu al **globa minimumo** kaj **globa minimumejo**. \square

Difino 4.2. Se por iu funkcio $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ ekzistas punkto a tia ke $f(a) \leq f(x)$ por ĉiuj $x \in \mathbf{R}^n$ kiuj estas sufiĉe proksimaj al a , ni diras ke $f(a)$ estas la **loka minimumo** de f kaj ke a estas **loka minimumejo**. \square

Analoge oni parolas pri *globa maksimumo*, *globa maksimumejo*, *loka maksimumo* kaj *loka maksimumejo*.

Ekzemplo 4.3. La funkcio $\mathbf{R} \ni x \mapsto \cos x$ havas minimumon -1 kaj ĉiu punkto $\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, estas minimumejo.

La funkcio $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2$, $x \in \mathbf{R}$, havas la derivaĵon $f'(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, kies nulejoj estas 0, 1 kaj 2. El ili 0 estas loka minimumejo kun loka minimumo 0 dum 1 estas loka maksimumejo kun loka maksimumo $\frac{1}{4}$ kaj 2 estas globa minimumejo kun globa minimumo -6 . \square

Ni vidas el la supra ekzemplo ke loka minimumo ne nepre estas globa. Sed, se funkcio kies minimumon oni serĉas estas konvekso, tio estas granda helpo: loka minimumo estas ĉiam ĉiea (globa) minimumo.

Konveksaj funkcioj do estas speciale agrablaj kiam temas pri serĉado de minimumo.

Alia bona eco estas ke la ombro de konvekso korpo estas konvekso.

Se ni havas ne reelajn variablojn sed ekzemple enterajn variablojn, tiam tute ne estas klare kiel tiuj bonaj ecoj povas travivi.

Ĉi tie mi provos montri la malfacilaĵojn kiuj estiĝas kiam oni klopodas optimumigi per entjeraj variabloj $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$. Vidu mian artikolon (2013).

4.2. Difinoj

Por la sekva prezento ni bezonas difinojn. La unuaj estas rememorigoj pri difinoj jam faritaj en sekcio 2.6.

Difino 4.4. Subaro A de \mathbf{R}^n estas nomata **konvekse** se

$$\{a, b\} \subset A \text{ implicas } [a, b] \subset A,$$

kie

$$[a, b] = \{(1-t)a + tb; t \in \mathbf{R}, 0 \leq t \leq 1\}$$

estas la streko kun a kaj b kiel finpunktoj. □

Difino 4.5. Por ĉiu subaro A de \mathbf{R}^n oni difinas ĝian **konveksan tegaĵon**, notitan per $\text{kteg}(A)$, kiel la plej malgrandan konveksan aron kiu enhavas ĝin. □

Difino 4.6. Funkcion $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_!$ oni nomas **konvekse** se ĝia finia epigrafejo estas konvekse kiel subaro de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$. □

Difino 4.7. Al ĉiu funkcio $f: A \rightarrow \mathbf{R}_!$, difinita sur subaro A de \mathbf{R}^n , oni difinas ĝian **konveksan envelopon**, notitan per $\text{kenv}(f)$, kiel la plej grandan funkcion $g: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_!$ tia ke $g|_A \leq f$. □

Grava rilato inter la konvekse envelopo kaj la konvekse tegaĵo de la finia epigrafejo kaj la strikta finia epigrafejo estas la inkludoj en (2.4).

Mi memorigas pri la ekvivalentoj por ajna funkcio $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_!$

$$f \text{ estas konvekse} \Leftrightarrow \text{epi}^{\text{finia}}(f) \text{ estas konvekse aro} \Leftrightarrow \text{epi}_s^{\text{finia}}(f) \text{ estas konvekse},$$

kie la unua ekvivalento estas difino kaj la dua estas facile pruvebla teoremo.

Difino 4.8. Se $A \subset \mathbf{R}^n$, oni nomas funkcion $f: A \rightarrow \mathbf{R}_!$ **konvekse vastigebla** se ĝi havas konveksan vastaĵon al la tuta spaco \mathbf{R}^n . □

Por funkcioj de unu variabla kaj difinitaj sur \mathbf{Z} la eco estas facile esprimebla:

Lemo 4.9. Funkcio $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}$ estas konvekse vastigebla sse²¹

$$f(x) \leq \frac{1}{2}f(x-1) + \frac{1}{2}f(x+1), \quad x \in \mathbf{Z}. \quad \square$$

La kondiĉo diras ke la valoro de la funkcio en ajna punkto neniam superas la mezan valoron de la valoroj en la du plej proksimaj punktoj. Se oni donas la pezilon (gravon) +1 al la punktoj $x-1$ kaj $x+1$ kaj la pezilon -2 al la punkto x , tiam la sumo de la valoroj estas pozitiveda (nenegativa):

$$(+1)f(x-1) + (-2)f(x) + (+1)f(x+1) = f(x-1) - 2f(x) + f(x+1) \geq 0.$$

²¹La iom slanga esprimo *sse* estas mallongigo de *se kaj nur se*, logika ekvivalento simbole notita per \Leftrightarrow . Ĝi estas pli forta ol *se*, simbole \Rightarrow , kaj *nur se*, simbole \Leftarrow . Tamen, en difinoj on kutime diras nur *se* por *sse*.

Difino 4.10. Al donita funkcio $f: \mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ ni difinas ĝian **kanonan vastigaĵon**, notitan $\mathbf{kan}(f): \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, tiel: en ĉiu kvadrato $a + [0, 1]^2$, kie $a \in \mathbf{Z}^2$, $\mathbf{kan}(f)$ egalas al $\mathbf{kenv}(f|_{a+[0,1]^2})$. □

La kanona vastigaĵo estas difinita en \mathbf{R}^2 kaj konvekse en ĉiu kvadrato $a + [0, 1]^2 = [a_1, a_1 + 1] \times [a_2, a_2 + 1]$, $a \in \mathbf{Z}^2$, sed ne nepre konvekse en la tuta ebena \mathbf{R}^2 .

Rigardu la funkcion kiu egalas al xy en $\{0, 1\}^2$. Kiel vastigi ĝin al la tuta kvadrato $[0, 1]^2$? Evidente $F(x, y) = xy$ ne taŭgas; ĝi ne estas konvekse. Sed ni povas preni $F(x, y) = (x + y - 1)^+ = \max(x + y - 1, 0)$.

Kion pri $g(x, y) = -xy$? Ni tiam ne povas uzi $G(x, y) = -xy$, ĉar ĝi ne estas konvekse. Sed $G(x, y) = \max(-x, -y)$ bone taŭgas.

Ni ĉiam havas $\mathbf{kenv}(f) \leq \mathbf{kan}(f)$; egaleco validas se kaj nur se f estas entjere konvekse laŭ la sekva difino.

Difino 4.11. Funkcio $f: \mathbf{Z}^n \rightarrow \mathbf{R}$ estas nomata **entjere konvekse** se $\mathbf{kan}(f)$ estas konvekse en la tuta spaco. □

La nocio de entjera konvekseco estis enkondukita de Favati & Tardella (1990).²²

Ekzemplo 4.12. Ĉiu afina funkcio estas entjere konvekse. La maksimumo de du afinaj funkcioj $f(x, y) = \max(ax + by + c, Ax + By + C)$ (kiu ĉiam estas konvekse vastigebla) estas entjere konvekse se kaj nur se $(a - A)(b - B)(a - A - b + B)(a - A + b - B) = 0$.

Ekzemplo 4.13. La polinomo $p(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, $(x, y) \in \mathbf{Z}^2$, de grado du estas konvekse se kaj nur se $a, c \geq 0$ och $ac \geq b^2$; kaj entjere konvekse se kaj nur se $a, c \geq |b|$.

Ekzemplo 4.14. La polinomo $p(x, y) = ax^4 + 6bx^2y^2 + cy^4$, $(x, y) \in \mathbf{Z}^2$, de grado kvar estas konvekse se kaj nur se $a, b, c \geq 0$ kaj $ac \geq b^2$; ĝi estas entjere konvekse se kaj nur se $a, c \geq b \geq 0$.

Difino 4.15. Estu donita aro $A \subset \mathbf{Z}^n \times \mathbf{Z}^n$. Ni diros ke funkcio $f: \mathbf{Z}^n \rightarrow \mathbf{R}$ estas **A-latere konvekse** se validas

$$(D_b D_a f)(x) \geq 0, \quad x \in \mathbf{Z}^n, \quad (a, b) \in A. \quad \square$$

Ni notu per $\Phi(A)$ la aron de ĉiuj A-latere konveksaj funkcioj en \mathbf{Z}^n .

La diferenca operatoro D_a estas difinita en (5.1).

En la alia direkto estas interese konsideri, se familio \mathcal{M} de funkcioj estas donita, la aron $\Psi(\mathcal{M})$ de ĉiuj paroj $(a, b) \in \mathbf{Z}^n \times \mathbf{Z}^n$ tiajn ke $D_b D_a f \geq 0$ por ĉiuj funkcioj $f \in \mathcal{M}$.

Per la du bildigoj Φ kaj Ψ ni enkondukas dualecon en la teorio pri diskreta konvekseco. La kunligaĵoj $\Phi \circ \Psi$ kaj $\Psi \circ \Phi$ estas interesaj en la matematika morfologio.

Ni speciale konsideras la situacion kiam $n = 2$ kaj elektas tiam la aron A en la sekva difino.

²²En mia noto (2008) mi nomis la econ “convexité forte”, ĉar mi tiam ne konis ilian artikolon.

Difino 4.16. Funkcio $f: \mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ kun du entjeraj variabloj estas nomata **rombe konvekssa**, se $f(a) - f(b) - f(c) + f(d) \geq 0$ kiam a estas ajna punkto kaj b, c, d estas la jenaj:

$$b = c = a + (1, 0), \quad d = a + (2, 0);$$

$$b = a + (1, 0), \quad c = a + (1, 1), \quad d = a + (2, 1);$$

$$b = a + (1, 0), \quad c = a + (1, -1), \quad d = a + (2, -1);$$

$$b = c = a + (0, 1), \quad d = a + (0, 2);$$

$$b = a + (0, 1), \quad c = a + (1, 1), \quad d = a + (1, 2);$$

$$b = a + (0, 1), \quad c = a + (-1, 1), \quad d = a + (-1, 2). \quad \square$$

La kondiĉoj similas al tiuj por unu variablo, sed temas nun pri ses kondiĉoj por ĉiu punkto a : du laŭ rektoj, same kiel por unu variablo, kaj kvar laŭ romboj kun la longa diagonalo laŭ kvar malsamaj direktoj: $(2, \pm 1)$ kaj $(\pm 1, 2)$.

Romba konvekseco estas ekvivalenta al entjera konvekseco (Kiselman 2008: teoremo 2.4; Kiselman & Samienia 2017: propozicio 9.6). Do por $n = 2$ la difino de entjera konvekseco estas simple esprimebla.

Ekzemplo 4.17. La funkcio difinita per $f(x) = |x_1 - 2x_2|$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{Z}^2$ estas konvekse vastigebla, sed ne rombe konvekssa, ĉar

$$(D_{(1,0)}D_{(1,1)}f)(0,0) = f(2,1) - f(1,0) - f(1,1) + f(0,0) = -2 < 0.$$

Ĝi sekve ne estas entjere konvekssa, kion eksplice montras la neegalaĵo

$$(\mathbf{kan}(f))(1, \frac{1}{2}) = 1 > \frac{1}{2} = (\mathbf{kan}(f))(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (\mathbf{kan}(f))(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}). \quad \square$$

4.3. Problemo unua: lokaj minimumoj ne estas ĉieaj

Kiel jam menciite, grava eco de konveksaj funkcioj de reelaj variabloj estas ke loka minimumo de konvekssa funkcio aŭtomate estas ĉiea (globa) minimumo.

Alivorte, se F estas konvekssa en la ebena kaj $F \geq F(a)$ proksime al a , tiam validas $F \geq F(a)$ ĉie. La rezulto estas elementa kaj facile pruvebla.

Sed kun entjeraj variabloj ni jam vidis ekzemplon en subsekcio 2.6.4

Sekve ne estas evidente ĉu oni kapablas trovi analogan rezulton en digita geometrio.

4.4. Problemo dua: mankanta konvekseco de margĝenaj funkcioj

Estas facile vidi ke konveksas la margĝena funkcio de konvekssa funkcio kun reelaj variabloj.

Sed rigardu nun la funkcion

$$g(x, y) = |x - 2my|, \quad (x, y) \in \mathbf{Z}^2,$$

kie m estas pozitiva entjero. Ĝia margĝena funkcio estas $h(x) = x$ por $0 \leq x \leq m$, $h(x) = 2m - x$ por $m \leq x \leq 2m$, kaj estas donita por aliaj valoroj de x per tio ke ĝi estas perioda kun periodo $2m$. Do h estas funkcio kun segildentoj, grandaj se m estas granda. Tamen estas tente nomi f konvekssa: ĝi ja estas la malvastigaĵo al \mathbf{Z}^2 de konvekssa funkcio difinita sur \mathbf{R}^2 :

$$G(x, y) = |x - 2my|, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

4.5. Problemo tria: ĉu ekzistas disigantaj hiperebenoj?

Se A kaj B estas du konveksaj aroj en \mathbf{R}^n kaj se ili ne havas komunan punkton, tiam ekzistas hiperebeno kiu disigas ilin, kio signifas ke ekzistas vektoro $\alpha \neq 0$ tia ke

$$\sup_{a \in A} \alpha \cdot a \leq \inf_{b \in B} \alpha \cdot b.$$

La hiperebeno kies ekvacio estas $\alpha \cdot x = c$ por taŭga elekto de reela konstanto c disigas la du arojn, kiuj do situas en malsamaj flanko de la hiperebeno, tamen ne strikte: estas permesite havi punktojn de A aŭ B en la hiperebeno mem.

Tiu rezulto estas sekvo de la teoremo de Hahn–Banach.²³ Ne estas klare kia analoga rezulto estas atingebla en digita geometrio.

4.6. Solvo de la unua problemo: iuj lokaj minimumoj estas ĉieaj

Por studi lokajn minimumojn estas grave trovi kiel eble plej malgrandajn ĉirkaŭaĵojn. Por optimuma rezulto ni lasu la ĉirkaŭaĵon dependi de la studata funkcio.

Difino 4.18. Se funkcio $f: \mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ kaj punkto $a \in \mathbf{Z}^2$ estas donitaj, ni diros ke punkto $b \in \mathbf{Z}^2$ estas *f -najbaro de a* se $\|b - a\|_\infty = 1$ kaj se la streko $[a, b]$ estas knikstreko de $\mathbf{kan}(f)$, la kanona vastigaĵo de f . Ni notu per $N_f(a)$ la aron de ĉiuj f -najbaroj de a ; ĝi estas la *f -ĉirkaŭaĵo* de la punkto a . □

Punkto povas havi 0, 2, 3, ..., 8 najbarojn. Ili estas ĉiuj elementoj de la sfero

$$S(a) = \{x \in \mathbf{Z}^2; \|x - a\|_\infty = 1\}.$$

Teoremo 4.1 (Kiselman 2008). *Estu $f: \mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ entjere konvekso funkcio. Ni supozu ke la konvekso tegaĵo de la aro $\{x \in S(a); f(x) \geq f(a)\}$ enhavas la punkton a en sia interno. Tiam $f(a)$ estas la ĉiea minimumo de f , t.e.*

$$f(a) = \inf_{y \in \mathbf{Z}^2} f(y).$$

Speciale, se la konvekso tegaĵo de $N_f(a)$ enhavas a en sia interno, tiam sufiĉas supozi ke $f(b) \geq f(a)$ por ĉiuj $b \in N_f(a)$. □

Ni vidis ke la nova klaso solvas la problemon: la dezirata rezulto validas en la nova klaso de entjere konveksaj funkcioj.

4.7. Solvo de la dua problemo: konvekseco de margenaj funkcioj

Teoremo 4.2 (Kiselman 2008). *Se $f: \mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ estas entjere konvekso kaj malsupren barita, tiam ĝia margena funkcio*

$$h(x) = \inf_{y \in \mathbf{Z}} f(x, y), \quad x \in \mathbf{Z},$$

estas konvekse vastigebla. □

Entjera konvekseco estas esence necesa por ke la konkludo estu valida.

Similaj rezultoj validas por pli altaj dimensioj, kvankam pli komplike esprimeblaj per A -latere konveksaj funkcioj.

²³La teoremo estas tiel nomita pro Hans Hahn (1879–1934) kaj Stefan Banach (1892–1945).

4.8. Solvo de la tria problemo: ekzisto de disigantaj hiperebenoj

Ankaŭ por la tria problemo, tiu pri disigantaj hiperebenoj, la entjere konveksaj funkcioj donas taŭgan solvon.

Teoremo 4.3 (Kiselman 2008). *Estu $f, g: \mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ du entjere konveksaj funkcioj. Ni difinu du arojn A kaj B en \mathbf{R}^3 kiel*

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbf{Z}^3; z \geq f(x, y)\} \text{ and } B = \{(x, y, z) \in \mathbf{Z}^3; z \leq -g(x, y)\}.$$

Tiam ekzistas ebena en \mathbf{R}^3 kiu disigas A kaj B sse $\mathbf{kan}(f) + \mathbf{kan}(g) \geq 0$.

Pruvo. Ebena kiu disigas A kaj B nepre havas la ekvacion $z = H(x, y)$ por iu afina funkcio $H: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ kiu plenumas $f \geq H|_{\mathbf{Z}^2} \geq -g$. Se tia ebena ekzistas, ni havas $\mathbf{kan}(f) \geq \mathbf{kan}(H|_{\mathbf{Z}^2}) = H$ kaj $\mathbf{kan}(g) \geq \mathbf{kan}((-H)|_{\mathbf{Z}^2}) = -H$. Ni ekhavas $\mathbf{kan}(f) + \mathbf{kan}(g) \geq H + (-H) = 0$.

Inverse, se $\mathbf{kan}(f) + \mathbf{kan}(g) \geq 0$, tiam ekzistas, laŭ la teoremo de Hahn–Banach, afina funkcio H kiu plenumas

$$\mathbf{kan}(f) = \mathbf{kteg}(f) \geq H \geq -\mathbf{kteg}(g) = -\mathbf{kan}(g) \text{ an } \mathbf{R}^2.$$

La malvastigaĵoj al \mathbf{Z}^2 plenumas la neegalajojn $f \geq H|_{\mathbf{Z}^2} \geq -g$, kio implicas ke la ebena $\{(x, y, H(x, y)) \in \mathbf{R}^3\}$ disigas la arojn A kaj B . \square

Teoremo 4.4 (Kiselman 2008). *Estu f kaj g kiel en la antaŭa teoremo kaj supozu ke la grandoj*

$D_{(0,1)}D_{(1,0)}f$ kaj $D_{(0,1)}D_{(1,0)}g$ havas la saman signon en la nestrikta signifo ke

$$[(D_{(0,1)}D_{(1,0)}f)(a)] \cdot [(D_{(0,1)}D_{(1,0)}g)(a)] \geq 0 \text{ en } \hat{\text{c}}iu \text{ punkto } a \in \mathbf{Z}^2.$$

Tiam ekzistas ebena disiganta la arojn A kaj B sse $f \geq -g$.

Pruvo. Se tia ebena ekzistas, ni ekhavas $f \geq H \geq -g$ en \mathbf{Z}^2 por afina funkcio H , de kio $f \geq -g$.

Alidirekte: se $f + g \geq 0$, ni havas $\mathbf{kan}(f + g) \geq 0$. Sed sub la hiptezo farita pri la signoj de la grandoj $(D_{(0,1)}D_{(1,0)}f)(a)$ kaj $(D_{(0,1)}D_{(1,0)}g)(a)$, oni povas pruvi ke $\mathbf{kan}(f + g) = \mathbf{kan}(f) + \mathbf{kan}(g)$. Laŭ la antaŭa teoremo ekzistas ebena disiganta A kaj B . \square

Por pli pri diskreta konvekseco vidu ekzemple Kim & Rosenfeld (1982), Lovász (1983), Eckhardt (2001), Murota (2003), Kiselman (2007; 2008; 2013) kaj Kiselman & Samieinia (2010; 2017).

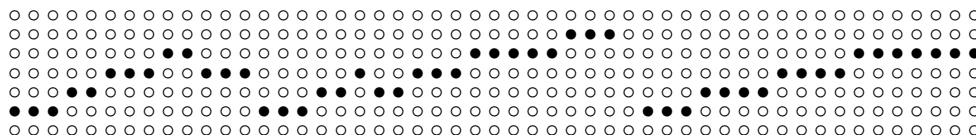
5. Ĉapitro kvina: Kiel rekoni rektojn kaj strekojn inter ĉiuj kurboj kaj aliaj bildoj sur la komputila ekrano?

Ni ĉi tie karakterizas rektecon de digitaj kurboj en la entjera ebenaĵo per tri malsamaj metodoj: per vorta kombinatoriko; per diofantaj neegalajtoj; kaj per diferencaj operatoroj.

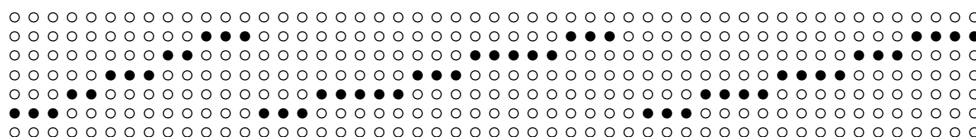
Oni povas vidi ke kelkaj kurboj sur la ekrano evidente ne estas rektaj, dum aliaj aspektas pli-malpli rektaj. Se oni bildigas eŭklidan strekon sur la ekrano, ĝi ofte ne povas esti perfekte rekta. Kiujn deviojn disde eŭklida rekto oni rajtas aŭ devas akcepti? Ĉu ekzistas precizaj kriterioj laŭ kiuj oni povas decidi ĉu iu kurbo aŭ alia bildo estiĝis el eŭklida streko? Jen demandoj al kiuj mi intencas respondi en la nuna ĉapitro kiu tamen preskaŭ malhavas pruvojn. Por kompleta matematika teksto vidu mian artikolon (2011), kiu ne estis publikigita kiam mi parolis en Sopot 2010-06-12 kadre de la Internacia Seminario *Apliko de Esperanto en la Profesia Agado* (AEPa), organizita de Boĵidar Leonov (1941–2014) en Karlovo 2010-06-11–14. Vidu Kiselman (2014).

Por lokigi bilderojn ni bezonas adresojn al ili. Montriĝas ke oni povas uzi parojn de entjeroj kiel adresojn, koordinatojn. La aron de tiuj paroj oni signas per \mathbf{Z}^2 . Ties punktoj do ne estas bilderoj, sed adresoj al bilderoj. Estas konate ke la eŭklida ebenaĵo povas esti teselita laŭ tri malsamaj manieroj se oni rajtas uzi nur unu figuron. Tiam tiu figuro estas aŭ kvadrato aŭ heksagono aŭ triangulo. Vidu figurojn 2.5–2.7.

Ni rigardu kelkajn digitajn kurbojn.



Figuro 5.1. Tri digitaj kurboj. Estas evidente ke ili ne povas esti digitigaĵoj de eŭklida streko, ĉu ne?



Figuro 5.2. Tri digitaj kurboj kiuj ŝajnas esti pli rektaj ol la antaŭaj. Kiuj el ili povas esti digitigaĵoj de eŭklida streko? La meza klino ŝajnas esti respektive $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{4}$ kaj $\frac{3}{11}$, sed, ĉar videblas nur finia nombro de punktoj, ni ne povas certi kiel plilongigi ilin.

La problemoj konsiderataj ĉi tie originas en la geometrio — la digita geometrio. Ili estos traktataj per metodoj de

- la kartezia geometrio;²⁴ same kiel de
- la vorta kombinatoriko;
- diofantaj²⁵ neegalaĵoj; kaj
- la kalkulo pri diferencaj operatoroj.

Dum la tri unue menciitaj metodoj ne estas novaj, la uzon de diferencaj operatoroj ŝajne enkondukis mi (2011). Espereble la kombinado de ĉiuj tiuj metodoj kaj aspektoj kontribuos al riĉigo de la teorio kaj al vastigo de la uzeblaj metodoj, same kiel al faciligo de nia kompreno.

Eble estus helpo eki per analogo el la kalkulo pri reelaj variabloj. Se $F: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ estas dufoje derivebla funkcio sur la reela akso kun reelaj valoroj plenumanta la ekvacion $F'' = 0$, kio signifas ke la dua derivaĵo de F nulas, tiam, per elementa rezulto el la teorio pri ordinaraj diferencialaj ekvacioj, F difinas rekton, t.e. ĝi estas afina funkcio $F(x) = Ax + B$, $x \in \mathbf{R}$, por iuj konstantoj A kaj B . Kaj se $F'' \geq 0$, do se la dua derivaĵo de F estas pozitiva, tiam F estas konvekso. Egalvalore, ĝi plenumas la neegalaĵon de Jensen²⁶

$$F((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)F(x) + \lambda F(y), \quad x, y \in \mathbf{R}, 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Pli ĝenerale, se $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ estas distribucio kaj plenumas $u'' = 0$ en la distribucia senco, t.e. se

$$u(\varphi'') = 0 \text{ por ĉiuj testaj funkcioj } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}),$$

tiam u estas difinita per afina funkcio. Se ni havas

$$u(\varphi'') \geq 0 \text{ por ĉiuj testaj funkcioj } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}), \varphi \geq 0,$$

tiam u estas difinita per konvekso funkcio, kio signifas ke

$$u(\varphi) = \int_{\mathbf{R}} f(x)\varphi(x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}),$$

por iu konvekso funkcio f .

La solvoj al la ekvacio $F'' = 0$ estas la samaj en ambaŭ okazoj, kvankam *a priori* la spaco de eblaj solvoj estas multe pli granda en la dua okazo.

Por la neegalaĵo $u'' \geq 0$ la distribuciaj solvoj konsistigas iom pli grandan aron, ĉar nun ĉiuj konveksaj funkcioj estas allaseblaj, ne nur tiuj kiuj estas dufoje deriveblaj.

La celo de tiu ĉi ĉapitro estas trovi analogojn al tiuj rezultoj en la okazo de funkcioj kun entjeraj variabloj, anstataŭigante la derivan operatoron $F \mapsto F''$ per diferencaj operatoroj. Ni vidos ke ekzistas grava diferenco inter funkcioj $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}$ kun reelaj valoroj kaj funkcioj $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ kun entjeraj valoroj: la funkciaj spacoj $\mathcal{F}(\mathbf{Z}, \mathbf{R})$ kaj $\mathcal{F}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z})$ estas tre malsimilaj. La unua okazo (de parte diskretigita spaco) estas tute elementa; la dua okazo (de plene diskretigita spaco) tre fore de tio, ĉar plene ĝi kombinatorikaj problemoj.

²⁴Nomata tiel pro Kartezio, René Descartes (1596–1650).

²⁵Nomataj laŭ Diofanto, aktiva en Aleksandrio en la tria jarcento p.Kr.

²⁶Nomata tiel pro Johan Jensen (1859–1925).

Ni vidos ke ni povas karakterizi rafinitajn digitajn rektojn (egalvalore: ekvilibrajn duumajn vortojn) helpe de diferencaj operatoroj, sed ne la rektojn en la senco de Reveillès; la laste menciitaj konsistigas pli mallarĝan klason de digitaj rektoj, kies ĉenkodoj ne inkludas la tiel nomatajn oblikvajjn Sturm-vortojn²⁷ (angle *skew Sturmian words*) en la senco de Morse²⁸ & Hedlund²⁹ (1940:8). Ankaŭ la ŝnura eco de Rosenfeld (1974) estos studata kaj estos montrite ke oni povas ĝin karakterizi per diferencaj operatoroj.

La studo de tiuj diskretaj analogoj al la diferenciala ekvacio $F'' = 0$ en la funkcia spaco $\mathcal{F}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z})$ egalvaloras al la studo de rektoj en la digita ebena \mathbf{Z}^2 , kaj tial ankaŭ al la teorio de ekvilibraj vortoj el alfabeto de du literoj. Tiu ĉi teorio estas alte evoluigita, kaj multe da esploro estas farita kaj daŭre farata; vidu ekzemple Morse & Hedlund (1940), Hung & Kasvand (1984), Bruckstein (1991), Rosenfeld & Klette (2001), Lothaire (2002), Pytheas Fogg (2002), Adamczewski (2003), Vuillon (2003), Klette & Rosenfeld (2004), Samieinia (2007), Uscka-Wehlou (2009), Berthé (2009; kun 94 referencoj), Samieinia (2010a; 2010b), Bédaride k.a. (2010), Samieinia (2014). Tamen la analogio al $F'' = 0$ povas konduki al novaj, pli nombroanalitikaj aspektoj de la teorio, kaj certaj rezultoj, kiel teoremo 5.7 pri la vastigo de strekoj, ricevas facilajn pruvojn. Vidate kiel problemo el kombinatoriko tiu teoremo diras ke ekvilibra finia duuma vorto povas esti vastigita al perioda ekvilibra nefinia vorto; krome al nefinie multaj ekvilibraj vortoj kun malsamaj periodoj — kaj ankaŭ al nefinie multaj ekvilibraj neperiodaj nefiniaj vortoj.

La fokuso de intereso de tiu ĉi ĉapitro estas la spaco $\mathcal{F}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z})$ de funkcioj kun diskretaj valoroj. Kiel preparado por estonta laboro la bazaj difinoj de sekcio 5.2 estas donitaj por $\mathcal{F}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}_l)$ kaj eĉ pli ĝenerale — tio ne kostas pli. La multe pli facila spaco $\mathcal{F}(\mathbf{Z}, \mathbf{R})$ estas mallonge menciita por komparo en sekcio 5.3. Ni fine kolektos niajn rezultojn pri rekteco, same kiel kelkajn jam konatajn rezultojn, en sekcio 5.9.

5.1. Diferencaj operatoroj

Difino 5.1. Por ajna $a \in \mathbf{R}$ ni difinas *diferencan operatoron*

$D_a: \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ per

$$(5.1) \quad (D_a F)(x) = F(x+a) - F(x), \quad x \in \mathbf{R}, a \in \mathbf{R}, F \in \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R}). \quad \square$$

Se $a \in \mathbf{N}$, D_a operacias ankaŭ de $\mathcal{F}(\mathbf{Z}, \mathbf{R})$ al $\mathcal{F}(\mathbf{Z}, \mathbf{R})$ kaj de $\mathcal{F}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z})$ al $\mathcal{F}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z})$.

Ni kombinas du el tiuj operatoroj kaj ekhavas la *operatoron de Jensen* $J_{a,b}$

$$(5.2) \quad \begin{aligned} (J_{a,b} F)(x) &= \frac{a}{a+b} D_b F(x+a) - \frac{b}{a+b} D_a F(x) \\ &= \frac{b}{a+b} F(x) - F(x+a) + \frac{a}{a+b} F(x+a+b) \end{aligned}$$

por $x \in \mathbf{R}$, $a, b > 0$. Funkcio $F \in \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ estas konvekso se kaj nur se $J_{a,b} F \geq 0$ por ĉiuj pozitivaj reelaj nombroj a, b .

²⁷Nomitaĵ pro Jacques Charles François Sturm (1803–1855).

²⁸Marson Morse (1892–1977).

²⁹Gustav A. Hedlund (1904–1993).

Ni uzos la fakton ke $(J_{a,b}F)(x) = H(x+a) - F(x+a)$, kie H estas la afina funkcio kiu alprenas la samajn valorojn kiel F ĉe la punktoj x kaj $x+a+b$, kaj tial mezuras la devion disde afineco.

Alia du-orda diferenca operatoro estas D_bD_a , donita per

$$(5.3) \quad (D_bD_aF)(x) = F(x+a+b) - F(x+b) - F(x+a) + F(x).$$

Estas konate ke kontinua funkcio $F: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ estas konvekse se kaj nur se $D_aD_aF \geq 0$ por ĉiuj reelaj $a > 0$; egalvalore $D_bD_aF \geq 0$ por ĉiuj $a, b > 0$. Ni notu ke

$$D_bD_a = J_{a,b} + J_{b,a},$$

operatoro kun entjeraj koeficientoj. Speciale $D_aD_a = 2J_{a,a}$.

Por funkcioj en $\mathcal{F}(\mathbf{Z}, \mathbf{R})$ la kondiĉoj $D_1D_1f = 0$ kaj $D_1D_1f \geq 0$ donas facilajn kaj kontentigajn rezultojn. Por funkcioj en $\mathcal{F}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z})$, aliflanke, tiuj kondiĉoj difinas tre malvastajn klasojn de funkcioj. Aliflanke, se ni malfortigas ilin al $|D_1D_1f| \leq 1$ kaj $D_1D_1f \geq -1$, ni ekhavas klasojn de funkcioj kiuj estas multe tro vastaj por esti interesaj. Montriĝas ke, eble surprize, simpla kompromiso inter tiuj du kondiĉoj, nome $|D_bD_af| \leq 1$ respektive $D_bD_af \geq -1$, $a, b \in \mathbf{N} = \mathbf{N} \setminus \{0\}$, difinas klasojn kun bonaj ecoj. Tiuj ĉi neegalaĵoj egalvaloras al $|J_{a,b}f| < 1$ respektive al $J_{a,b}f > -1$ por ĉiuj $a, b \in \mathbf{N}$.

5.2. Diskreta konvekseco

Ni nun ĝeneraligu la nocion konvekseco.

Difino 5.2. Se subaro W de \mathbf{R}^n (aŭ pli ĝenerale de ajna vektora spaco) estas donita, ni diros ke subaro A de W estas ***W-konvekseca***, se ekzistas konvekseca subaro K de \mathbf{R}^n tia ke $A = K \cap W$. \square

Kiam $W = \mathbf{R}^n$, ni ricevos la kutiman konveksecon; kiam $W = \emptyset$, nur la malplena aro konvekseca. Interesaj estas ĉi tie la elektoj $W = \mathbf{Z}^n$ kaj $W = \mathbf{Z}^{n-1} \times \mathbf{R}$.

W -konvekseco de ajna subaro A de W egalvaloras al la rilato $\mathbf{kteg}(A) \cap W \subset A$.

Por la dimensio $n = 2$ ni havas:

Propozicio 5.3. *La ŝnura eco en la senco de Rosenfeld implicas \mathbf{Z}^2 -konveksecon. La inversa implico ne validas.* \square

Difino 5.4. Se subaro X de \mathbf{R}^n , subaro Y de \mathbf{R} , kaj subaro W de $X \times Y$ estas donitaj, ni diros ke funkcio $f: X \rightarrow Y$ estas ***W-konvekseca***, se ĝia finia epigrafejo estas W -konvekseca aro. \square

Do f estas W -konvekseca se kaj nur se $\mathbf{kteg}(\text{epi}^{\text{finia}}(f)) \cap W \subset \text{epi}(f)$. Ni rimarkigu ke ĉi tie oni ne povas uzi anstataŭ $\mathbf{kteg}(\text{epi}^{\text{finia}}(f))$ iun el la du aliaj aroj en (2.4), do nek $\text{epi}_s^{\text{finia}}(\mathbf{kenv}(f))$ nek $\text{epi}^{\text{finia}}(\mathbf{kenv}(f))$. La unua estas tro malgranda, la dua tro granda por ke oni havu bonajn rezultojn.

Kiam X egalas al la tuta spaco \mathbf{R}^n , Y egalas al \mathbf{R} kaj $W = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$, ni ekhavas la kutiman konveksecon por funkcioj $F \in \mathcal{F}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$.

Por funkcioj difinitaj en \mathbf{Z}^n kaj kun valoroj en \mathbf{R} ekzistas simpla karakterizo de $(\mathbf{Z}^n \times \mathbf{R})$ -konvekseco per la ekzisto de vastigaĵoj:

Propozicio 5.5. *Funkcio $f: \mathbf{Z}^n \rightarrow \mathbf{R}_!$ estas $(\mathbf{Z}^n \times \mathbf{R})$ -konvekso se kaj nur se ĝi posedas $(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R})$ -konveksan vastigaĵon, do vastigaĵon $F: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_!$ kiu konveksas en la kutima senco. □*

Speciale ni prenos ĉi tie $X = \mathbf{Z}$, $Y = \mathbf{R}$, $W = \mathbf{Z} \times \mathbf{R}$ kaj $X = \mathbf{Z}$, $Y = \mathbf{Z}$, $W = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$. Por la laste menciita okazo ne ekzistas iu simpla karakterizo kiel en la propozicio ĵus menciita.

5.3. Konveksaj funkcioj kun reelaj valoroj

Por funkcio en $\mathcal{F}(\mathbf{Z}, \mathbf{R})$ la demandoj povas esti facile responditaj:

Teoremo 5.1. *Funkcio $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}$ plenumas la ekvacion*

$$D_1 D_1 f = 0$$

se kaj nur se ekzistas reelaj konstantoj A kaj B tiaj ke $f(x) = Ax + B$. Ĝi plenumas la neegalaĵon

$$D_1 D_1 f \geq 0$$

se kaj nur se ĝi estas $(\mathbf{Z} \times \mathbf{R})$ -konvekso. Egalvaloraj kondiĉoj estas $J_{1,1} f = 0$ respektive $J_{1,1} f \geq 0$. □

5.4. Karakterizo de rekteco: la ŝnura eco de Rosenfeld

Por karakterizi rektecon de finiaj subaroj de \mathbf{Z}^2 Azriel Rosenfeld (1974) enkondukis la ŝnurajn aron jam menciitan en sekcio 2.6.

Ni fiksu aron de bilderoj U — ĝi povus fakte esti ajna subaro de \mathbf{R}^n . Ni povas difini la *U -digitigaĵon* de subaro A de \mathbf{R}^n kiel la aron

$$\mathbf{dig}_U(A) = (A + U) \cap \mathbf{Z}^n, \quad A \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^n).$$

Ni povas elekti $U = \{0\}$, sed tiam multaj aroj havos malplenan digitigaĵon; la rolo de U estas grasigi la aron A antaŭ ol oni prenas la komunaĵon kun la krado \mathbf{Z}^n .

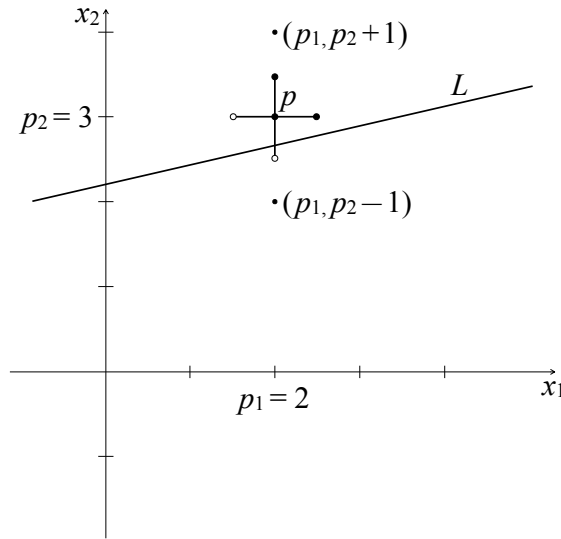
Rosenfeld elektis kiel U la krucon

$$R = \left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \times \{0\} \right) \cup \left(\{0\} \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \right) \subset \mathbf{R}^2.$$

Figuro 5.3 montras tiun krucon movitan al la punkto $p = (2, 3)$, do $p + R = (2, 3) + R$. Tiam la rekto L en \mathbf{R}^2 difinita per ekvacio $x_2 = \alpha x_1 + \beta$ kun $|\alpha| < 1$ estigas funkcion $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$. Fakte, por tiaj rektoj, se estas donita $p_1 \in \mathbf{Z}$, ekzistas unu kaj nur unu $p_2 \in \mathbf{Z}$ tia ke $(p_1, p_2) + R$ havas punkton komunan kun la rekto L .

Fakte $p_2 = \left\lceil \alpha p_1 + \beta - \frac{1}{2} \right\rceil$, tiel ke tiu digitigaĵo de la reela rekto kun ekvacio $x_2 = \alpha x_1 + \beta$ havas la ekvacion $p_2 = \left\lceil \alpha p_1 + \beta - \frac{1}{2} \right\rceil$, kiu estas tiel nomata meĥanika vorto.³⁰

³⁰Ĉi tie $\lceil t \rceil$ estas le plej malgranda entjera pliedanto de t , kaj $\lfloor t \rfloor$ la plej granda entjera malpliedanto de t . Sekve $t - 1 < \lfloor t \rfloor \leq t \leq \lceil t \rceil < t + 1$. La funkcioj $t \mapsto \lceil t \rceil$ kaj $t \mapsto \lfloor t \rfloor$ estas nomataj la *plafona funkcio* respektive la *planka funkcio*.



Figuro 5.3. Digitigo de eŭklida rekto laŭ Rosenfeld.

Por ĉiu p_1 oni elektas la entjeron plej proksiman al $\alpha p_1 + \beta$ se ekzistas unika plej proksima entjero, kaj, per konvencio, $\alpha p_1 + \beta - \frac{1}{2}$ se $\alpha p_1 + \beta$ estas duonentjero (la elekto inter $\alpha p_1 + \beta - \frac{1}{2}$ kaj $\alpha p_1 + \beta + \frac{1}{2}$, farita por ekhavi unikecon, enkondukas kompreneble certan nesimetrion).

Rosenfeld pruvis ke finia digita arko, speciale la grafeo de funkcio $f: [c, d]_{\mathbf{Z}} \rightarrow \mathbf{Z}$ kun $|D_1 f| \leq 1$, havas la ŝnurajn eon se kaj nur se $A = \mathbf{dig}_R(L)$ por iu streko $L = [x, y]$ en \mathbf{R}^2 .

Kiam A estas la grafeo de funkcio $f \in \mathcal{F}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z})$, la ŝnura eco povas esti formulita kiel sekvas. Estu donita $a < t < b$ kun entjeroj a kaj b kaj reela nombro t ; tiam estu $H: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ la afina funkcio kiu alprenas la valorojn de f ĉe a kaj b . Tiam la ŝnura eco diras ke

$$|H(t) - f(\lfloor t \rfloor)| < 1 \text{ aŭ } |H(t) - f(\lceil t \rceil)| < 1.$$

Se t estas entjero, tiam $t = \lfloor t \rfloor = \lceil t \rceil$, kaj tiu eco simpliĝas al

$$|H(t) - f(t)| < 1.$$

Teoremo 5.2. *Estu $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ funkcio kun entjeraj valoroj. Tiam ĝia grafeo havas la ŝnurajn eon se kaj nur se $|D_1 f(x)| \leq 1$ kaj $|J_{a,b} f(x)| < 1$ por ĉiuj $(x, a, b) \in \mathbf{Z} \times \dot{\mathbf{N}} \times \dot{\mathbf{N}}$. La responda rezulto validas ankaŭ por funkcio difinita sur subintervalo $[c, d]_{\mathbf{Z}}$ aŭ $[c, +\infty[_{\mathbf{Z}}$ aŭ $]-\infty, d]_{\mathbf{Z}}$ de \mathbf{Z} . \square*

5.5. Hiperebenoj en la senco de Reveillès

Jean-Pierre Reveillès (1991:45) enkondukis digitajn rektojn en la digita ebena kiel solvojn de duoblaj diofantaj neegalaĵoj: li konsideris arojn de la formo

$$\{(x, y) \in \mathbf{Z}^2; \gamma \leq \alpha x + \beta y < \gamma'\},$$

kie α kaj β estas reelaj nombroj, ne ambaŭ egalaj al nul, kaj kie γ kaj γ' estas reelaj nombroj. Ni diros ke tia aro estas **digita rekto en la senco de Reveillès**. Li konsideras speciale la okazon kie α kaj β estas entjeroj; li tiam nomas la digitan rektojn **racionala**; verdire, se $\beta \neq 0$, ĝia klino $-\alpha/\beta$ estas racionala nombro.

Se $\gamma' - \gamma = \max(|\alpha|, |\beta|)$, la rekto nomiĝas **naiva**. Tiam ĝi estas 8-koneksa, sed ne ĉiam 4-koneksa.

5.6. Karakterizo per ekvilibras vortoj

Teoremo 5.3. Funkcio $f \in \mathcal{F}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z})$ kun $0 \leq D_1 f \leq 1$ plenumas la kondiĉon

$$|D_b D_a f(x)| \leq 1, \quad x \in \mathbf{Z}, \quad a, b \in \dot{\mathbf{N}},$$

se kaj nur se ĝia grafeo $\{(x, f(x)) \in \mathbf{Z}^2; x \in \mathbf{Z}\}$ estas naiva rekto; egalvalore, la vico $D_1 f$ estas ekvilibra duuma vorto.

Por la pruvo ni unue memorigu pri kelkaj nocioj el la teorio pri vortoj. Per **vorto** ni komprenas ĉi tie duoble nefinian vicon $(w_j)_{j \in \mathbf{Z}}$ de literoj w_j ; ĝi estas **duuma** se ekzistas nur du literoj; ni tiam prenu ilin kiel 0 kaj 1.

Oni diras ke faktoro $w' = (w_j)_{j=p}^q$ de vorto w havas **longon** $q - p + 1$:

$$\mathbf{longo}(w') = q - p + 1.$$

La malplena vorto $\varepsilon = (w_j)_{j=p}^{p-1}$ havas la longon nul.

Se w estas duuma, la nombro de unuoj en faktoro $w' = (w_j)_{j=p}^q$ estas nomata ties **alto**:

$$\mathbf{alto}(w') = \sum_{j=p}^q w_j.$$

Oni diras ke funkcio $f \in \mathcal{F}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z})$ havas la **ĉenkodon** $c = c(f) = (c_j)_{j \in \mathbf{Z}}$, kie

$$c_j = f(j + 1) - f(j) = D_1 f(j).$$

Inverse, ĉiu vico $(c_j)_{j \in \mathbf{Z}}$ determinas familion de funkcioj havantaj tiun ĉi ĉenkodon; ni prenu

$$f(x) = C + \sum_{j=0}^{x-1} c_j \text{ por } x \geq 0 \text{ kaj } f(x) = C - \sum_{j=x}^{-1} c_j \text{ por } x < 0,$$

kie C estas arbitra konstanto (evidente $f(0)$ egalas al C).

Duuma vorto w estas nomita **ekvilibra** se por ajnaj du faktoroj w' kaj w'' de w ni havas

$$(5.4) \quad \mathbf{longo}(w') = \mathbf{longo}(w'') \text{ implicas } |\mathbf{alto}(w') - \mathbf{alto}(w'')| \leq 1.$$

Estas bone konate ke la ĉenkodo de funkcio f kun $0 \leq D_1 f \leq 1$ estas ekvilibra se kaj nur se la funkcio difinas naivan rekton $\{(x, f(x)); x \in \mathbf{Z}\}$ en \mathbf{Z}^2 .

Estu $w' = (w_j)_{j=p'}^{q'}$, $w'' = (w_j)_{j=p''}^{q''}$ du faktoroj de la sama duuma vorto w . Ke ili havas la saman longon signifas ke $q' - p' + 1 = q'' - p'' + 1$. Iliaj altoj estas

$$\mathbf{alto}(w') = \sum_{j=p'}^{q'} w_j, \quad \mathbf{alto}(w'') = \sum_{j=p''}^{q''} w_j.$$

Nun, skribante $w_j = D_1 f(j)$, ni ekhavas

$$\mathbf{alto}(w') = \sum_{j=p'}^{q'} D_1 f(j) = D_a f(p'), \quad \text{kie } a = q' - p' + 1.$$

Pruvo de la teoremo. Se f estas donita, estu $w' = (w_j)_{j=p'}^{q'}$ kaj $w'' = (w_j)_{j=p''}^{q''}$ du faktoroj kun la sama longo el la duuma vorto $w = D_1 f$. Pro simetrio ni rajtas supozi ke $p' \leq p''$. Difinu $x = p'$, $a = q' - p' + 1 = q'' - p'' + 1$, la komuna longo de la intervaloj, kaj $b = p'' - p' = q'' - q'$, la distanco inter iliaj maldekstraj finpunktoj. Tiam $x + a = q' + 1$, $x + b = p''$ kaj $x + a + b = q'' + 1$, tiel ke

$$\mathbf{alto}(w'') - \mathbf{alto}(w') = D_a f(p'') - D_a f(p') = D_b D_a f(p') = D_a D_b f(p').$$

Ni vidas ke la kondiĉo $|D_b D_a f| \leq 1$ rekte tradukiĝas al la kondiĉo (5.4) pri la alto. \square

Sekve la egalaĵo $D_1 D_1 f = 0$ por funkcioj en $\mathcal{F}(\mathbf{Z}, \mathbf{R})$ estas anstataŭigita per la negalaĵoj $|D_b D_a f| \leq 1$, $a, b \in \mathbf{N}$, por funkcioj en $\mathcal{F}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z})$, kion ni povas kompreni kiel specon de proksimuma egalaĵo.

5.7. Rafinitaj digitaj hiperebenoj

Ni unue difinu tavolojn en \mathbf{R}^n :

$$\begin{aligned} T &= T(\alpha, \beta, \gamma) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^n; \beta \leq \alpha \cdot x \leq \gamma\}, \\ T^* &= T^*(\alpha, \beta, \gamma) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^n; \beta \leq \alpha \cdot x < \gamma\}, \\ T_* &= T_*(\alpha, \beta, \gamma) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^n; \beta < \alpha \cdot x \leq \gamma\}, \\ T_*^* &= T_*^*(\alpha, \beta, \gamma) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^n; \beta < \alpha \cdot x < \gamma\}. \end{aligned}$$

Ni bezonos paroli ankaŭ pri la reelaj hiperebenoj

$$T^0 = \{x \in \mathbf{R}^n; \alpha \cdot x = \beta\}, \quad T^1 = \{x \in \mathbf{R}^n; \alpha \cdot x = \gamma\}.$$

Se $\beta \leq \gamma$, ni havas $T = T_*^* \cup T^0 \cup T^1$.

Digitaj hiperebenoj D en la senco de Reveillès plenumas

$$(T \cap \mathbf{Z}^n) \setminus D \subset T^0,$$

t.e. la punktoj en $T \cap \mathbf{Z}^n$ kiuj ne estas en D ĉiuj apartenas al unu sola reelaj hiperebenoj en \mathbf{R}^n .

En Kiselman (2004:456) mi ĝeneraligis tion al la sekva difino. Ni signu per $\pi_k : \mathbf{Z}^n \rightarrow \mathbf{Z}^{n-1}$ la projekcion kiu forgesas la koordinaton x_k , $k = 1, \dots, n$. Aro D estas **rafinita digita hiperebena** se D estas \mathbf{Z}^n -konvekso, se

$$T_*^* \cap \mathbf{Z}^n \subset D \subset T \cap \mathbf{Z}^n$$

por iu elekto de $\alpha \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ kaj $\beta, \gamma \in \mathbf{R}$, kaj se krome, por iu k , la aroj $\pi_k(D \cap T^0)$ kaj $\pi_k(D \cap T^1)$ estas disaj kaj kune plenigas la tuton de $\pi_k((T^0 \cup T^1) \cap \mathbf{Z}^2)$.

En du dimensioj tiu ĉi difino povas esti formulita en simpla maniero. Ni prenu $n = 2$, $(\alpha_1, \alpha_2) = (-\alpha, 1)$ kaj difinu striojn en \mathbf{R}^2 :

$$\begin{aligned} S(\alpha, \beta, \gamma) &= T = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; \beta \leq y - \alpha x \leq \gamma\}, \\ S^*(\alpha, \beta, \gamma) &= T^* = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; \beta \leq y - \alpha x < \gamma\}, \\ S_*(\alpha, \beta, \gamma) &= T_* = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; \beta < y - \alpha x \leq \gamma\}, \\ S_*^*(\alpha, \beta, \gamma) &= T_*^* = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; \beta < y - \alpha x < \gamma\}. \end{aligned}$$

Tiam rekto en \mathbf{Z}^2 en la senco de Reveillès estas, eble post permuto de la koordinatoj, egala al la komunaĵo $S^*(\alpha, \beta, \gamma) \cap \mathbf{Z}^2$, por iuj α, β, γ , $|\alpha| \leq 1$. (Ni povus same bone uzi $S_*(\alpha, \beta, \gamma)$ ĉi tie, ĉar $S_*(\alpha, \beta, \gamma) = -S^*(\alpha, -\gamma, -\beta)$.)

Rafinita digita rekto kun $|\alpha| \leq 1$ kaj $\gamma = \beta + 1$ estas aŭ digita rekto en la senco de Reveillès aŭ, eble post reflektado, de la formo

$$\begin{aligned} D_{\alpha, \beta, p} &= \{(x, y) \in \mathbf{Z}^2 \cap S^*(\alpha, \beta, \beta + 1); x < p\} \cup \{(x, y) \in \mathbf{Z}^2 \cap S_*(\alpha, \beta, \beta + 1); x \geq p\} \end{aligned}$$

por iuj $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ kaj iu $p \in \mathbf{Z}$. Tiel estas, ĉar la ununuraj paroj de komplementaj \mathbf{Z} -konveksaj subaroj de la digita rekto estas (\mathbf{Z}, \emptyset) kaj $(]-\infty, p[_{\mathbf{Z}}, [p, +\infty[_{\mathbf{Z}})$, $p \in \mathbf{Z}$. La plej simpla ekzemplo estas la grafeo de la funkcio Y de Heaviside,³¹ difinita per $Y(x) = 0$ kiam $x \leq -1$ kaj $Y(x) = 1$ kiam $x \geq 0$.

Teoremo 5.4. *Ĉiu digita rekto en la senco de Reveillès estas rafinita digita rekto.*

Inverse, se ni havas reelajn nombrojn $|\alpha| \leq 1$ kaj β , ni konsideru kvar okazojn por la aro

$$D = S(\alpha, \beta, \beta + 1) \cap \mathbf{Z}^2,$$

difinante

$$D^j = \{(x, y) \in D; y - \alpha x = \beta + j\}, \quad j = 0, 1:$$

(A). *La klino α estas racionala kaj $\beta \in \mathbf{Z} + \alpha\mathbf{Z}$. Tiam D^0 kaj D^1 ambaŭ enhavas nefinie multajn punktojn kaj D ne estas rafinita digita rekto. Por ĉiu entjero p , la aro*

$$D_{\alpha, \beta, p} = (D \setminus \{(x, y) \in D^1; x < p\}) \setminus \{(x, y) \in D^0; x \geq p\}$$

estas rafinita digita rekto. La aroj $D \setminus D^0$ kaj $D \setminus D^1$ estas digitaj rektoj en la senco de Reveillès.

³¹Nomita pro Oliver Heaviside (1850–1925).

(B). La klino α estas racionala kaj $\beta \notin \mathbf{Z} + \alpha\mathbf{Z}$ (ekzemple kiam β estas neracionala). Tiam D^0 kaj D^1 estas malplenaĵ, tiel ke $D = D_*$, kaj D estas digita rekto en la senco de Reveillès.

(C). La klino α estas neracionala kaj D^0 estas malplena. Tiam

$$D = S(\alpha, \beta, \beta + 1) \cap \mathbf{Z}^2 = S_*(\alpha, \beta, \beta + 1) \cap \mathbf{Z}^2$$

estas digita rekto en la senco de Reveillès.

(Ĉ). La klino α estas neracionala kaj D^0 enhavas nur unu punkton. Tiam ankaŭ D^1 enhavas nur unu punkton, kaj D ne estas rafinita digita rekto. Sed $D \setminus D^0$ kaj $D \setminus D^1$ estas digitaj rektoj en la senco de Reveillès. \square

Sekve, en la okazoj (B) kaj (C) la du nocioj de rektoj koincidas; en la okazo (A) ili estas malsamaj. En la okazo (A) kaj (Ĉ) ni devas forigi certajn punktojn el la limaj rektoj D^0 , D^1 por ekhavi rektojn en la senco de Reveillès, dum tio ne necesas en la okazoj (B) kaj (C).

Ni notu ke ĝenerale $D^1 = D^0 + (0, 1)$, kio signifas ke, por ekhavi naivan digitan rekton, ni ĉiam devas forigi unu el D^0 kaj D^1 krom se ili estas malplenaĵ. La okazoj (A) kaj (B) tiam estas simplaj.

Por la okazoj (C) kaj (Ĉ) ni rimarkigu ke se α estas neracionala, ni ne povas havi du punktojn (x_0, y_0) kaj (x_1, y_1) kun $x_0 \neq x_1$ en D^0 ; ali-okaze $\alpha = (y_1 - y_0)/(x_1 - x_0)$ estus racionala. Do D^0 kaj D^1 estas aŭ malplenaĵ aŭ aroj kun nur unu punkto.

5.8. Vastigo de strekoj

Ni konsideru funkciojn difinitajn sur intervalo: estu c kaj d du entjeroj kaj konsideru funkciojn $f: [c, d]_{\mathbf{Z}} \rightarrow \mathbf{Z}$. Ni tiam povas formi $D_b D_a f(x)$ nur por $c \leq x \leq d - a - b$, $a, b \in \mathbf{N}$. Natura demando estas ĉu la kondiĉoj $|D_b D_a f(x)| \leq 1$ por tiuj finie multaj a, b, x estos sufiĉaj por certigi ke f difinas strekon; alivorte ĉu ni povas trovi vastigaĵon g al la tuta \mathbf{Z} de la funkcio f kiu ĉie plenumas la kondiĉojn.

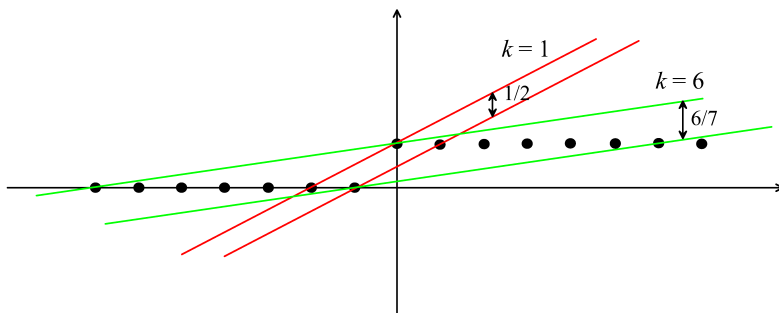
La respondo estas jesa, sed la vastigaĵo neniam estas unika.

Teoremo 5.5. Se $f: [c, d]_{\mathbf{Z}} \rightarrow \mathbf{Z}$ plenumas $|D_b D_a f(x)| \leq 1$ por ĉiuj x, a, b por kiuj la esprimo estas difinita, tiam ĝia grafeco estas inkludita en malfermita strio $S_*(\alpha, \beta, \gamma)$ kun racionala α kaj de alto $\gamma - \beta < 1$. Se funkcio $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ difinita sur la tuta entjera akso plenumas $|D_b D_a f| \leq 1$, tiam ĝia grafeco estas inkludita en fermita strio $S(\alpha, \beta, \beta + 1)$ de alto 1. \square

Teoremo 5.6. Se la grafeco de funkcio $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ aŭ $f: [c, d]_{\mathbf{Z}} \rightarrow \mathbf{Z}$ estas inkludita en duon-malfermita strio $S^*(\alpha, \beta, \beta + 1)$ aŭ $S_*(\alpha, \beta, \beta + 1)$, tiam $|(J_{a,b} f)(x)| < 1$ por ĉiuj x kaj $a, b \in \mathbf{N}$ por kiuj la esprimo estas difinita. \square

Teoremo 5.7. Estu $f: [c, d]_{\mathbf{Z}} \rightarrow \mathbf{Z}$ donita tia ke $|D_b D_a f(x)| \leq 1$ por ĉiuj a, b, x por kiuj la esprimo estas difinita, t.e. por $c \leq x \leq d - a - b$, $a, b \in \mathbf{N}$. Tiam f povas esti vastigita al funkcio $g: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ tia ke $|D_b D_a g(x)| \leq 1$ por ĉiu $x \in \mathbf{Z}$ kaj ĉiuj $a, b \in \mathbf{N}$. \square

Ekzemplo 5.6. Estu Y_k la malvastigaĵo al $[-k, k]_{\mathbf{Z}}$, $k \in \dot{\mathbf{N}}$, de la funkcio de Heaviside $Y: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$, kiu alprenas la valoron 0 por $x \leq -1$ kaj 1 por $x \geq 0$. Tiam la konstruo donas klinon $\alpha_k = 1/(k+1) > 0$ kaj alton $\gamma_k - \beta_k = k/(k+1) < 1$. Verdire, ni povas elekti ajnan α_k kun $0 < \alpha_k \leq 1/(k+1)$ kaj tamen ekhavi $\gamma_k - \beta_k < 1$. Sed estas neeble elekti $\alpha_k = 0$, ĉar tiam $\gamma_k - \beta_k = 1$.



Figuro 5.4. Minimumaj strioj kiuj enhavas $2k + 1$ punktojn por $k = 1$ kaj $k = 6$, do tri punktojn $(-1, 0), (0, 1), (1, 1)$ (kaj krome kvaran punkton $(-2, 0)$), respektive dek tri punktojn $(-6, 0), (-5, 0), (-4, 0), (-3, 0), (-2, 0), (-1, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1)$ (kaj krome dekkvaran punkton $(-7, 0)$).

Tio signifas ke la rekto konstruita elde la malvastigaĵo de Y al finia intervalo $[c, d]$ enhavanta -1 kaj 0 nepre havos pozitivan klinon, kvankam Y mem reprezentas rekton kun klino nul. Se ni elektas racionalan klinon, la ĉenkodo D_1g de la vastigaĵo estos perioda, dum D_1Y ne estas. La funkcio Y en tiu ĉi ekzemplo neniam povas aperi kiel vastigaĵo en la konstrumetodo uzita en la pruvo de la teoremo pri vastigo de strekoj. \square

5.9. Digita rekteco

Kombinante kion ni lernis pri digita rekteco ni povas formuli jenajn rezultojn.

Teoremo 5.8. Estu $f \in \mathcal{F}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z})$ kaj konsideru la sekvajn ecojn.

- (A). La grafeo de f havas la ŝnuron econ de Rosenfeld;
- (B). f kaj $-f$ estas $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ -konveksaj;
- (C). La grafeo de f estas \mathbf{Z}^2 -konvekso aro;
- (Ĉ). $|(D_b D_a f)(x)| \leq 1$ por ĉiu $(x, a, b) \in \mathbf{Z} \times \dot{\mathbf{N}} \times \dot{\mathbf{N}}$;
- (D). $|(J_{a,b} f)(x)| < 1$ por ĉiu $(x, a, b) \in \mathbf{Z} \times \dot{\mathbf{N}} \times \dot{\mathbf{N}}$;
- (E). La duuma vorto $D_1 f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ estas ekvilibra;
- (F). f difinas rafinitan digitan hiperebenon en \mathbf{Z}^2 en la senco de Kiselman (2004);
- (G). f difinas digitan rekton en la senco de Reveillès (1991).

Ni supozu ke $|D_1 f| \leq 1$. Tiam ĉiuj kondiĉoj (A), (B), (C), (Ĉ), (D), (E) kaj (F) egalvaloras, kaj ili sekvas el (G). \square

Teoremo 5.9. *Estu $f: [c, d]_{\mathbf{Z}} \rightarrow \mathbf{Z}$ difinita sur finia intervalo $[c, d]_{\mathbf{Z}}$ kaj supozu ke $|D_1 f(x)| \leq 1$ por ĉiuj x tiaj ke $c \leq x \leq d - 1$. Tiam la sekvaj ecoj ĉiuj egalvaloras.*

- (A). *La grafeo de f havas la ŝnuron econ de Rosenfeld;*
- (B). *f kaj $-f$ ambaŭ $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ -konveksas;*
- (C). *La grafeo de f estas \mathbf{Z}^2 -konveksa aro;*
- (Ĉ). *$|(D_b D_a f)(x)| \leq 1$ por ĉiuj $(x, a, b) \in \mathbf{Z} \times \dot{\mathbf{N}} \times \dot{\mathbf{N}}$ tiaj ke $c \leq x < x + a + b \leq d$;*
- (D). *$|(J_{a,b} f)(x)| < 1$ por ĉiuj $(x, a, b) \in \mathbf{Z} \times \dot{\mathbf{N}} \times \dot{\mathbf{N}}$ tiaj ke $c \leq x < x + a + b \leq d$;*
- (E). *La duuma vorto $D_1 f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ estas ekvilibra;*
- (F). *f difinas subaron de rafinita digita hiperebeno en \mathbf{Z}^2 en la senco de Kiselman (2004);*
- (G). *f difinas subaron de digita rekto en la senco de Reveillès (1991). □*

Se ni rigardas la diritan kiel kombinatorikan problemon por ĉenkodoj, t.e. por duumaj vortoj, la lasta teoremo diras, kondiĉe ke $0 \leq D_1 f \leq 1$, ke ekvilibra finia vorto povas esti vastigita al perioda ekvilibra nefinia vorto, krome al ekvilibras vortoj kun nefinie multaj malsamaj periodoj — kaj ankaŭ al nefinie multaj ekvilibras neperiodaj nefiniaj vortoj.

Ni diru ke eco de funkcioj $f \in \mathcal{F}(A, \mathbf{Z}_l)$, kie A estas ajna subintervalo de \mathbf{Z} , estas **loka** se ĝi estas vera se kaj nur se ĉiuj malvastigaĵoj $f|_{[c,d]_{\mathbf{Z}}}$ al finiaj intervaloj $[c, d]_{\mathbf{Z}} \subset A$ havas la econ.

Propozicio 5.7. *La ecoj (A), (B), (C), (Ĉ), (D), (E) kaj (F), komprenataj por funkcioj difinitaj sur \mathbf{Z} respektive sur subintervaloj de \mathbf{Z} , estas lokaj ecoj. La eco (G) ne estas loka. □*

6. Ĉapitro sesa: La teoremo de Jordan en la digita geometrio

6.1. Enkonduko

Sur komputila ekrano la bildoj konsistas el etaj bilderoj (angle *pixel*, vorto formita el *picture element*), kiujn la homa okulo kunigas al geometriaj figuroj.

Rekto tiam ne estas kio Eŭklido komprenis sub rekto, sed finia aro de makuletoj sur la ekrano, kiun la okulo tamen perceptas (rigardante el sufiĉe granda distanco) kiel konektitan rektopecon.

Ĉu ekzistas geometrio por tiuj bildoj?

La respondo estas jesa. Mi parolis pri la digita geometrio dum la Internacia Kongresa Universitato en Gotenburgo 2003; vidu mian artikolon (2003).

Ni povas pritrakti tiujn finiajn arojn kun la sama ekzakto kiun havis Eŭklido en sia geometrio. Tio estas la digita geometrio. Ĝi estas juna kompare al la eŭklida.

Ni povas preni kiun ajn nocion en la eŭklida geometrio kaj klopodi traduki ĝin al la digita geometrio. Ĉu iu konsiderata rezulto en la eŭklida geometrio veros en la digita?

Camille Jordan (1838–1922) pruvis teoremon, *la teoremon pri kurboj de Jordan* (1893).

Efim Khalimsky (Е. Д. Халимский, E. D. Ĥalimskij) pruvis ĝin en la digita kunteksto (1970).

Kun Kartezio (René Descartes, 1596–1650) venis revolucio koncerne la kalkuladon en la geometrio. Li reprezentigis punkton en la ebena per paro de nombroj (x_1, x_2) kaj rekton en la ebena per la aro de ĉiuj paroj (x_1, x_2) kiuj plenumas ekvacion $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3 = 0$, kie ne ambaŭ nombroj a_1 kaj a_2 nulas.

Kiom da nombroj oni bezonas por priskribi cirklon en la ebena?

Kiom da nombroj oni bezonas por priskribi elipsoidon en la tridimensia spaco?

Kiel estas se oni volas priskribi pli ĝeneralan aron?

Se ni havas ekranon kun 1 024 oble 768 bilderoj, tiam ĝi enhavas $1\,024 \times 768 = 2^{10} \times 3 \times 2^8 = 3 \times 2^{18} = 786\,432$ bilderojn.

Ni bezonas skribi 786 432 nulojn aŭ unuojn por priskribi ajnan subaron de la ekrano. Tial la nombro de malsamaj bildoj estas $2^{786\,432} \approx 10^{236\,740}$. Tiu nombro superas la nombron de elementaj partikloj en la videbla universo.

6.2. La teoremo de Jordan en la eŭklida ebena

La teoremo de Jordan diras ke ebena kurbo kiu sufiĉe similas al cirklo dividas la ebenon en precize du partojn.

Por kompreni la eldiron pri la teoremo de Jordan ni bezonas klarigon: kiuj kurboj sufiĉe similas al cirkloj? La matematika termino por la ĝusta simileco estas *homeomorfio*.

Teoremo 6.1 (La teoremo de Jordan). *Ni supozu ke $f: C \rightarrow f(C) \subset \mathbf{R}^2$ estas homeomorfo de cirklo C al la ebena \mathbf{R}^2 . Tiam $\mathbf{R}^2 \setminus f(C)$ havas precize du komponantojn.*

Kontinueco ĉe bildigo f signifas ke malgrandaj ŝanĝoj ĉe la elira punkto (la argumento) estigas nur malgrandajn ŝanĝojn ĉe la bilda punkto. Saltoj ne rajtas okazi.

Por difini kontinuecon ni bezonas topologiojn. Tiujn ĉi oni difinas per malfermitaj aroj.

Funkcio $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ nomiĝas **kontinua**, se por ĉiu malfermita aro B en \mathbf{R}^m estas tiel ke estas malfermita la aro A de ĉiuj punktoj en \mathbf{R}^n kiujn la bildigo f sendas en la aron B .

Ni diras ke bildigo $f: X \rightarrow Y$ estas **homeomorfo** se ĝi estas bijekcia kaj f kaj ties inverso $f^{-1}: Y \rightarrow X$ ambaŭ estas kontinuaj. Tiam ni diras ke X kaj Y estas **homeomorfaj**.

Anstataŭ difini la nocion de malfermita aro per distancoj, ni iros aksioman vojon. Estu X ajna aro, kaj estu \mathcal{U} familio de subaroj de X ; ni nomos ilin **malfermitaj**. Ni ne difinas la nocion de malfermita aro, sed anstataŭe postulas ke la familio \mathcal{U} plenumu du aksiomojn.

Aksiomo 1. *Se $U_j, j \in J$, estas malfermitaj, kie J estas ajna aro de indicoj, tiam la kunigaĵo $\bigcup_{j \in J} U_j$ estas malfermita.*

Tio signifas ke se ni havas arojn $U_j \in \mathcal{U}$, tiam la aro V de ĉiuj punktoj kiuj apartenas al unu el la U_j ankaŭ apartenas al \mathcal{U} : $V \in \mathcal{U}$. Sekvas ke la malplena aro estas malfermita.

Aksiomo 2. *Se $U_j, j \in J$, estas malfermitaj, kie J estas finia aro de indicoj, tiam la komunaĵo $\bigcap_{j \in J} U_j$ estas malfermita.*

Tio signifas ke se ni havas finian nombron da aroj $U_j \in \mathcal{U}$, tiam la aro W de ĉiuj punktoj kiuj apartenas al ĉiuj el la U_j ankaŭ apartenas al \mathcal{U} : $W \in \mathcal{U}$. Sekvas ke la tuta spaco estas malfermita.

Se ni havas familion \mathcal{U} de subaroj de X kiu plenumas la aksiomojn, tiam ni diras ke ni havas **topologion** sur X , kaj ke X kun tiu topologio estas **topologia spaco**. (Distanco ne nepre ekzistas.)

Se ni havas bildigon $f: X \rightarrow Y$ de topologia spaco X en aron Y , ni povas difini topologion en Y per la eldiro ke subaro V de Y estu malfermita se la inversa bildo $f^{-1}(V) = \{x \in X; f(x) \in V\}$ estas malfermita en X . Pro la egalaĵoj

$$f^{-1}(\bigcup V_j) = \bigcup f^{-1}(V_j) \text{ kaj } f^{-1}(\bigcap V_j) = \bigcap f^{-1}(V_j)$$

sekvas ke ni vere ricevas topologion en Y .

6.3. La topologio de Khalimsky

Efim Khalimsky inventis topologion sur la entjeraj nombroj \mathbf{Z} kiun li difinis jene: aro A de entjeraj nombroj nomiĝas **malfermita** se ĝi por ĉiu para nombro $2k \in A$ ankaŭ enhavas ĝiajn du neparajn najbarojn $2k - 1$ kaj $2k + 1$.

La topologio de Khalimsky povas esti difinita ankaŭ per la proceduro menciita fine de la antaŭa sekcio: ni difinu funkcion $\varphi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Z}$ per

$$\varphi(x) = 2k \text{ se } 2k - \frac{1}{2} \leq x \leq 2k + \frac{1}{2} \text{ kaj } \varphi(x) = 2k + 1 \text{ se } 2k + \frac{1}{2} < x < 2k + \frac{3}{2}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Tiam, uzante la kutiman topologion en \mathbf{R} , ni ricevas la topologion de Khalimsky sur \mathbf{Z} . Oni diras ke la topologia spaco \mathbf{Z} kun la topologio de Khalimsky estas *kvocienta spaco* de \mathbf{R} .

Oni difinas la topologion en la digita ebena $\mathbf{Z}^2 = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ kaj en la spaco \mathbf{Z}^n .

Se nombro $m \in \mathbf{Z}$, $m \neq 0$, estas donita, oni formas la kvocientan spacon \mathbf{Z}_m per identigo de $x \in \mathbf{Z}$ kun $x + km$, por ĉiu $k \in \mathbf{Z}$. Tiel oni ekhavas la ***cirklon de Khalimsky***. Oni transportas la topologion sur \mathbf{Z} al topologio sur \mathbf{Z}_m . Por ke tio estu interesa necesas ke m estu para nombro.

Ni povas nun paroli pri kontinua bildigo $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}^2$, kie kaj \mathbf{Z} kaj \mathbf{Z}^2 estas provizitaj per la topologio de Khalimsky.

Digita kurbo de Jordan estas kontinua bildigo de cirklo de Khalimsky \mathbf{Z}_m al la ebena de Khalimsky \mathbf{Z}^2 tia ke ĝia inverso ekzistas kaj estas kontinua. Ni do havas homeomorfion $f: \mathbf{Z}_m \rightarrow f(\mathbf{Z}_m) \subset \mathbf{Z}^2$.

Teoremo 6.2 (La teoremo de Khalimsky por digitaj kurboj de Jordan). *Ni supozu ke $f: \mathbf{Z}_m \rightarrow f(\mathbf{Z}_m) \subset \mathbf{Z}^2$ estas homeomorfio de cirklo de Khalimsky \mathbf{Z}_m al la digita ebena \mathbf{Z}^2 provizita per la topologio de Khalimsky. Ĝia bildo $K = f(\mathbf{Z}_m)$ tiam dividas la ebenon \mathbf{Z}^2 en precize du partojn: $\mathbf{Z}^2 \setminus K$ havas precize du komponantojn.*

Oni povas per digita kurbo enfermi kaj eksterfermi same bone kiel per kurbo en la eŭklida ebena. La nur finie multaj makuletoj sur la ekrano povas formi barilon kun la samaj ecoj kiel la klasikaj kurboj.

La truko estas difini taŭgan topologion. Efim Khalimsky faris tion.

7. Ĉapitro sepa: Diskretigo kaj tropikigo: kiel ili rilatas?

7.1. Enkonduko

Diskretigo kaj tropikigo estas du gravaj procedoj en la nuntempa matematiko. Mi volas prezenti ilin kaj klarigi kial ili gravas.

Kiel jam menciite diskretaj objektoj, kiel tapiŝoj kaj mozaikoj, ekzistas jam plurajn jarmilojn, sed la apero de komputiloj kaj digitaj fotiloj faris ke ili nun estas ĉieaj.

Tio ĉi faras ke la digita geometrio estas de kreskanta intereso. La diskretigo de aroj kaj funkcioj estas studata el multaj vidpunktoj.

Tropika matematiko kompare estas relative juna branĉo de la matematiko.

Mi komparos la du kaj starigas filozofian/matematikan problemon rilate al ili.

Tropikigo iel similas al diskretigo. Mi parolos pri ambaŭ proceduroj.

7.2. Diskretigo

7.2.1. Kio estas diskreta aro?

Intuicie diskreta aro estas aro kie ĉiu punkto estas iom for de ĉiuj aliaj punktoj.

Por ke tio estu preciza bezonatas la nocio de metriko.

Difino 7.1. Se X estas ajna aro, ni nomas funkcion $d: X \times X \rightarrow \mathbf{R}$ *metriko* se ĝi plenumas la sekvaĵn kvar kondiĉojn:

(7.1.1) Por ĉiuj $x, y \in X$ validas $d(x, y) \geq 0$;

(7.1.2) Ni havas $d(x, y) = 0$ se kaj nur se $x = y$;

(7.1.3) $d(x, y) = d(y, x)$ por ĉiuj $x, y \in X$ (simetrio);

(7.1.4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ por ĉiuj $x, y, z \in X$ (la triangula neegalajo).

Ni parolas sinonime pri *distanco*. □

Ni notos per $B_{<}(c, r)$ kaj $B_{\leq}(c, r)$ la *striktan globon* kaj la *nestriktan globon kun centro c kaj radiuso r* , do:

$$B_{<}(c, r) = \{x \in X; d(c, x) < r\} \text{ kaj } B_{\leq}(c, r) = \{x \in X; d(c, x) \leq r\}.$$

Sekvante Bourbaki (1961:16) ni diras ke subaro A de metrika spaco X kun metriko d estas *diskreta*, se por ĉiu elemento x de A ekzistas pozitiva nombro r tia ke $d(x, y) \geq r$ por ĉiuj elementoj $y \neq x$ de A .

Ni prenu \mathbf{R} kiel ekzemplon, kun $d(x, y) = |x - y|$. Tiam por ĉiu nombro x ekzistas aliaj nombroj y kiuj estas kiom ajn proksimaj al x kiel ni deziras. Sekve \mathbf{R} kun tiu distanco ne estas diskreta.

La subaro \mathbf{Z} de la entjeroj estas diskreta, ĉar nun $d(x, y) \geq 1$ por ĉiuj punktoj $y \neq x$.

Sed atentu! Ĉiu aro estas diskreta se ni difinas la distancon kiel $d(x, y) = 1$ kiam $x \neq y$ kaj $d(x, x) = 0$. Sekve ankaŭ \mathbf{R} estas diskreta kun tiu distanco.

Tio signifas ke la distanco inter π kaj

$$3,141592653589793238462643383279502884197$$

estas 1 kun tiu metriko, dum ĝi estas malgranda en la kutima metriko.

Matematikaj modeloj bazitaj sur reelaj aŭ kompleksaj nombroj estis dum jarcentoj kaj daŭre estas ege sukcesaj — pensu pri ĉiela meĥaniko (sekcio 3.1, p. 18) kaj la teorio pri elektraj cirkvitoj.

Tamen, ni ne pensu ke reelaj nombroj estas pli realaj ol kompleksaj nombroj aŭ diskretaj modeloj. La anglalingva adjektivo *real*, kiu signifas kaj ‘reala’ kaj ‘reela’, estas misgvida.

Pri la ideoj de islamaj filozofoj pri atomeca tempo, vidu en sekcio 3.6, p. 21.

Fizikistoj studis diskretajn modelojn de la tempospaco — kaj ne nur antaŭ nelonge, sed multe post Maimonides. Popularscienca prezento de la kvantuma naturo de la tempospaco aperas en la libro Rovelli (2016).

Ofte ni ne iras de modeloj bazitaj sur reelaj nombroj al diskretaj modeloj, sed de unu tre fajna diskreta modelo al alia modelo, ankaŭ diskreta, sed malpli fajna.

7.2.2. Diskretaj aroj kaj uniforme diskretaj aroj

Kiel jam menciite, ni diras ke subaro A de metrika spaco X kun metriko d estas **diskreta**, se ĉiu punkto $a \in A$ estas la sola punkto en $B_{<}(a, r)$ por iu pozitiva r . Ĝi estas nomata **uniforme diskreta**, se r povas esti elektita sendepende de a .

Por ajna subaro A de X ni difinas funkcion

$$\mathbf{dist}_A(x) = \inf_a (d(a, x); a \in A, a \neq x), \quad x \in X.$$

Sekve A estas diskreta sse \mathbf{dist}_A estas ĉie pozitiva, kaj A estas uniforme diskreta sse ĝia malvastigaĵo $(\mathbf{dist}_A)|_A$ al A estas malsupren barita per pozitiva konstanto.

7.2.3. Diskretigo

Diskretigi aron signifas iel bildigi ĝin al diskreta aro.

Simpla ekzemplo de diskretigo estas la bildigo

$$\mathcal{P}(\mathbf{R}^n) \ni A \mapsto A \cap \mathbf{Z}^n \in \mathcal{P}(\mathbf{Z}^n),$$

kiu bildigas ajnan subaron de \mathbf{R}^n al la aro de ties punktoj kun entjeraj koordinatoj.

Ĉar A povas malhavi punktojn kun entjeraj koordinatoj, ni ofte volas grasigi la aron antaŭ ol formi la komunaĵon kun \mathbf{Z}^n :

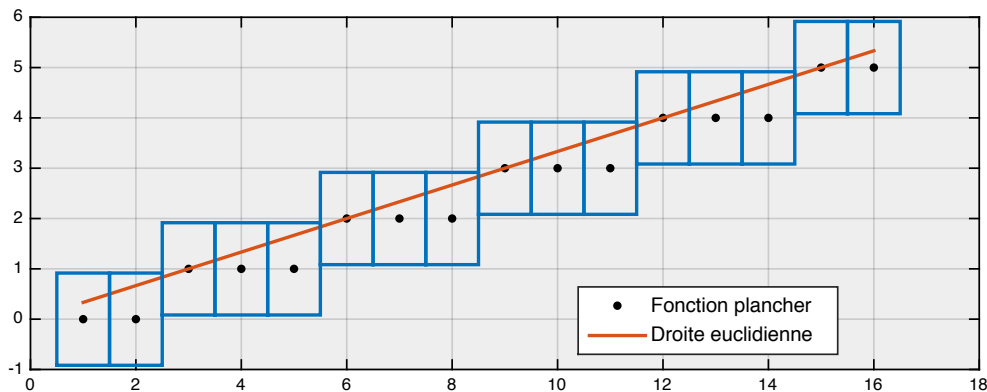
$$\mathcal{P}(\mathbf{R}^n) \ni A \mapsto (A + U) \cap \mathbf{Z}^n \in \mathcal{P}(\mathbf{Z}^n),$$

kie U povas esti ajna aro; plej tipe globo aŭ kubo por garantii ke la bildo estas nemalplena se A estas nemalplena.

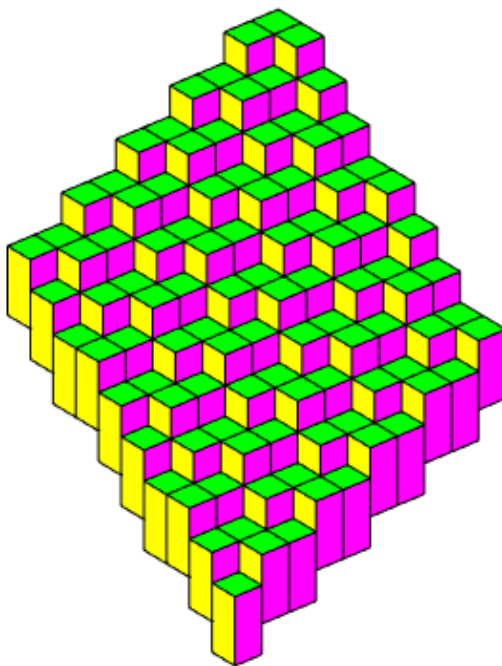
Ni povas diskretigi funkcion $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ aŭ parte, aŭ plene:

(1) Ni povas simple preni ĝian malvastigaĵon al la punktoj kun entjeraj koordinatoj, t.e. $f|_{\mathbf{Z}^n}$, kaj konservi ĝiajn valorojn en \mathbf{R} .

(2) Aŭ ni povas diskretigi ankaŭ ĝiajn valorojn, ekzemple per la preno de $g(x) = \lfloor f(x) \rfloor$, $x \in \mathbf{Z}^n$. Ĉi tie $\lfloor t \rfloor$ estas la *planka funkcio*, difinita per $\mathbf{R} \ni t \mapsto \lfloor t \rfloor \in \mathbf{Z}$ kaj $t \leq \lfloor t \rfloor < t + 1$.



Figuro 7.1. Kovrante la eŭklidan rektan kies ekvacio estas $y = \frac{1}{3}x$ per dilato de ĝia diskretigo per la planko funkcio kaj kun struktura elemento egala al la rektangulo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{5}{6}, \frac{5}{6}]$ (Adama Arouna Koné 2016:44).



Figuro 7.2. Kovrante eŭklidan ebenon per dilato de ĝia diskretigo per la planko funkcio kaj kun struktura elemento egala al la kesto $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{9}{8}, \frac{9}{8}]$ (Adama Arouna Koné 2016:66).

Malgrandaj infanoj komencas kalkuli per naturaj nombroj. Reelaj nombroj estas multe pli malfacilaj difineblaj.

Pro tio oni povus pensi ke diskreta aroj, kiel la aro de la naturaj nombroj $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, estas pli facile manipuleblaj ol la aro \mathbf{R} de la reelaj nombroj, kun nombroj kiel π kaj e k.t.p. Sed estas tute male kiel ni nun vidos.

7.2.4. Logikaj teorioj

Ekzistas tri niveloj de logikaj teorioj.

La plej facilaj estas la teorioj kiuj estas decideblaj, kio signifas ke ekzistas algoritmo per kiu oni povas decidi en antaŭvidebla tempo ĉu aserto estas vera aŭ ne. Ekzemplo estas la kalkulo de propozicioj, kun $p \wedge q$, $p \vee q$, $\neg p$.

Due ni havas la teoriojn kiu estas kompletaj, kio signifas ke ĉiu vera aserto posedas pruvon en la teorio. La pruvon oni povas trovi per komputilo — ĉar ĉiuj pruvoj estas listigeblaj. Sed oni ne povas antaŭe diri kiom da tempo bezonatas por trovi la pruvon: se la komputilo laboris dum mil jaroj, povas esti ke ĝi trovos la pruvon post pliaj mil jaroj, aŭ neniam. Ekzemplo estas la kalkulo de predikatoj, t.e., la kalkulo de propozicioj kun aldono de la kvantizantoj $\forall x$ kaj $\exists x$.

Trie kaj fine ni havas la nekompletajn teoriojn, tiujn kie ekzistas veraj asertoj kiuj ne havas pruvojn.

En la verko *A decision method for elementary algebra kaj geometry* (*Decidmetodo por elementa algebro kaj geometrio*) Alfred Tarski (1901–1983) pruvis ke la unu-orda teorio de la reelaj nombroj sub adicio kaj multipliko estas *decidebla*. Per la invento de koordinatoj de Kartezio, tio validas same por elementa eŭklida geometrio. (La rezulto estis publikigita nur en 1948, sed ĝi datumas pli frue, al 1930, kaj estas menciita en Tarski 1931.)

Tiu estas plej rimarkinda rezulto, ĉar Alonzo Church (1903–1995) pruvis en 1936 ke la aritmetiko de Peano³² (la teorio de naturaj nombroj) estas *nedecidebla*: ne ekzistas algoritmo por decidi ĉu aserto estas vera aŭ malvera.

La aritmetiko de Peano estas ankaŭ *nekompleta* dank' al la teoremo pri nekomplet-eco de Kurt Gödel (1906–1978). Tio signifas ke, se la teorio ne enhavas kontaŭdiron, ekzistas vera aserto kiu ne estas pruvebla.

Tiel, ĉio ĉi montras al la fakto ke, el la vidpunkto de logiko, naturaj nombroj estas multe pli malfacile trakteblaj ol la reelaj nombroj.

Sed ne nur logike!

7.2.5. Kalkulo pli komplika

La derivaĵo de $f(x) = x^5$, $x \in \mathbf{R}$, estas $f'(x) = 5x^4$.

Sed la diferenc-kvociendo estas

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 5x^4 + 10x^3h + 10x^2h^2 + 5xh^3 + h^4.$$

Kaj, alvenante al integraĵoj ni devas kompari

$$\int_0^a f(x)dx = \frac{1}{6}a^6$$

³²Giuseppe Peano (1858–1932).

kaj

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{an} f(j/n) = \frac{1}{6} a^6 + \frac{1}{2} \frac{a^5}{n} + \frac{5}{12} \frac{a^4}{n^2} - \frac{1}{12} \frac{a^2}{n^4}.$$

Tio povas klarigi iom de la sukceso de diferenciala kaj integra kalkulado; vidu pli pri tio en subsekcio 3.8, paĝo 30.

7.3. Diskretigo per balaado

Balaado estas metodo evoluigita en la klasika potenciala teorio por mezuroj, t.e. masoj aŭ elektraj ŝarĝoj. La termino *balayage*, uzata en pluraj lingvoj, estas de franca origino kaj signifas ‘balaado (per broso)’. Grava laboro en tiu kampo faris Gustave Choquet (1915–2006) en sia verko (1955).

Ĉi-kuntekste ni povas difini la *balaaĵon de funkcio f difinita en \mathbf{R}^n sur diskretan aron P* kiel la funkcio

$$g(p) = \sum_{a \in V(p)} f(a), \quad p \in P,$$

kie la aroj $V(p)$, $p \in P$, formas teseladon de \mathbf{R}^n , kiu siavice signifas ke

$$V(p) \cap V(q) = \emptyset \text{ kiam } p \neq q, \text{ kaj } \bigcup_{p \in P} V(p) = \mathbf{R}^n.$$

Ni povas ekzemple preni $P = \mathbf{Z}^n \subset \mathbf{R}^n$ kaj

$$V(p) = \{a \in \mathbf{R}^n; \lfloor a \rfloor = p\}, \quad p \in \mathbf{Z}^n,$$

aŭ kiel modifitaj Voronoi-ĉeloj:

$$V(p) = \{a \in \mathbf{R}^n; \lfloor a + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}) \rfloor = p\}, \quad p \in \mathbf{Z}^n,$$

kie la planka funkcio estas difinita ankaŭ por vektoroj per la formulo

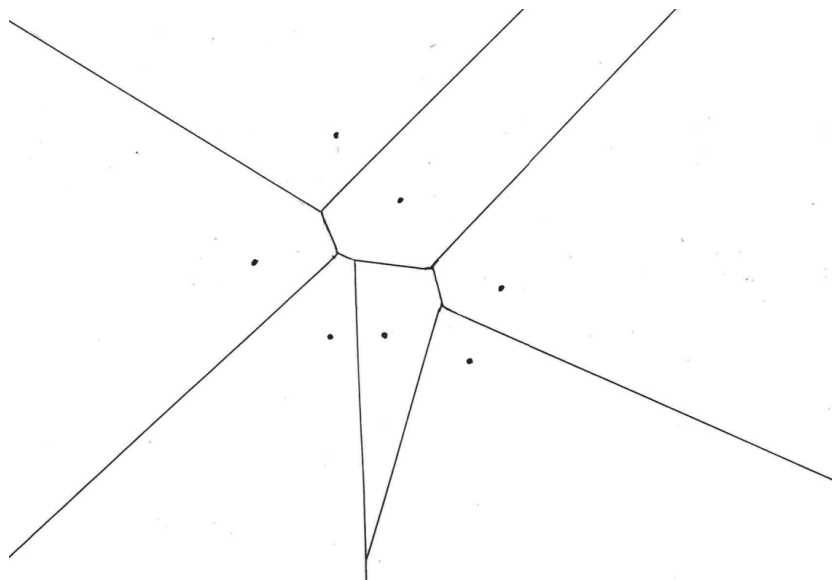
$$\lfloor x \rfloor = \lfloor (x_1, \dots, x_n) \rfloor = (\lfloor x_1 \rfloor, \dots, \lfloor x_n \rfloor), \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

Estante donita aro P de punktoj en spaco X kun distanco d ni difinas la **Voronoi-ĉelon**³³ *kun kerno* $p \in P$ kiel la aron

$$V(p) = V_P(p) = \{x \in X; d(x, p) \leq d(x, q) \text{ por ĉiuj punktoj } q \in P\}.$$

La Voronoi-ĉeloj kovras la tutan spacon, sed ili kutime ne estas disaj.

³³La Voronoi-ĉeloj estas nomitaj pro Георгій Феодосійович Вороний; Георгий Феодосьевич Вороной (Georgij Feodosevič Voronoj), Georges Voronoi (1868–1908).



Figuro 7.3. Voronoi-ĉeloj en la ebena.

7.4. Tropikigo

Tropikigo signifas, krude dirite, anstataŭigi sumon aŭ integraĵon per supremo.

Do: sumo $x + y$ estas anstataŭigita per la maksimumo de la du: $x \vee y = \max(x, y)$.

Infanoj lernas adicii nombrojn, kiel $5 + 3 = 8 \dots$ sed eĉ antaŭ tio ili lernas ke 5 venas post 3. Sekve ili lernas ke $5 \vee 3 = 5$ eĉ antaŭ ol ili lernas ke $5 + 3 = 8$. Tial la operacio de maksimumo ne estas io nova aŭ stranga.

Ni jam notis ke ekvacio kiel $a + x = b$, kie a kaj b estas konataj kaj x nekonata, en la aro \mathbf{Z} de la entjeroj havas unikan solvon $x = b - a$. La ekvacio $a \vee x = b$ foje havas

- neniun solvon (kiam $b < a$),
- foje unikan solvon (kiam $b > a$),
- kaj foje nefinie multajn solvojn (kiam $b = a$).

Tipa ekzemplo estas la tropikigaĵo de la l^p -normo:

$$\|x\|_p = \left(\sum |x_j|^p\right)^{1/p} \text{ estas anstataŭigita per } \left(\sup |x_j|^p\right)^{1/p} = \sup |x_j| = \|x\|_\infty.$$

Ĉi tie ni havas konverĝon:

$$\|x\|_p = \left(\sum |x_j|^p\right)^{1/p} \rightarrow \sup_j |x_j| = \|x\|_\infty \quad \text{kiam } p \rightarrow +\infty, x \in \mathbf{R}^n.$$

Pli algebre kaj pli alĝebre: tropikigo aperas kiam ni anstataŭigas adicon per la operacio de preno de la maksimumo kaj multipliko per adicio.

Tropikaj rektoj kaj tropikaj hiperebenoj, same kiel tropikaj polinomoj, estas interesaj. Ŝajnas al mi ke ankoraŭ ne ekzistas aksioma teorio pri tiu speco de geometrio.

Ni povas kompari tiun proceduron kun la operacio preni la logaritmon:

$$\log(xy) = \log x + \log y, \quad x, y > 0.$$

$$\log(x \vee y) < \log(x + y) \leq \log(x \vee y) + \log 2, \quad x, y > 0.$$

Kiel ni vidas la logaritmo transformas multiplikon al adicio kaj sumon al io proksima al la maksimumo – la relativa eraro estas malgranda kiam $x \vee y$ estas granda.

Oni povas konsideri tiujn ĉi operaciojn kiel limesojn de la kutimaj:

$$x \vee y = x +_{\text{trop}} y = \lim_{h \rightarrow 0} h \log(e^{x/h} + e^{y/h}), \quad x + y = x \times_{\text{trop}} y = \lim_{h \rightarrow 0} h \log(e^{x/h} \times e^{y/h}),$$

kie h estas pozitiva nombro kiu strebas nulon, ne sen kaŭzo nomita h , same kiel la konstanto de Planck. Ĉi tie oni vidas ke temas pri malkvantumigo: la konstanto de Planck strebas al nulo.

Mikael Passare (1959–2011) laboris dum siaj lastaj jaroj pri tropika geometrio. Li kaj aliaj studis kaj kvantumadon kaj malkvantumadon.

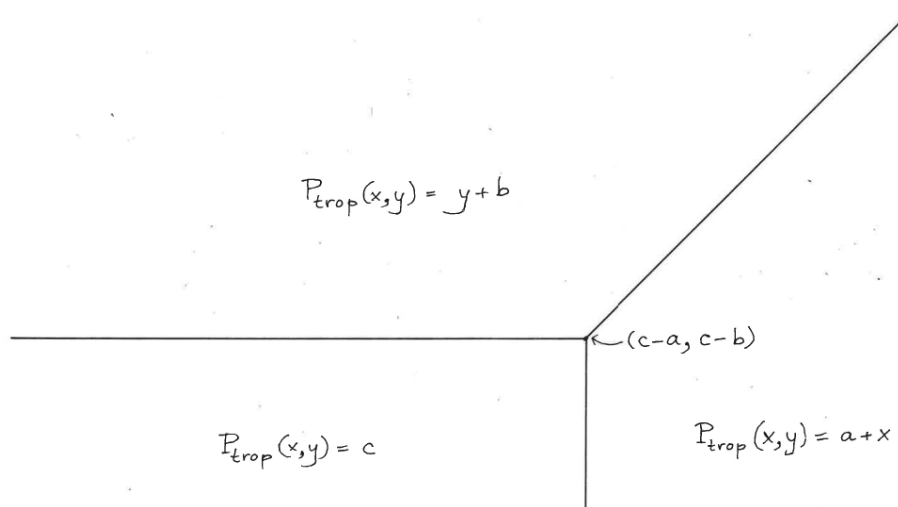
La origino de la epiteto *tropika* estas honorigo al pioniro de la tropika geometrio, Imre Simon (1943–2009), kiu vivis en t.n. tropika lando, nome Brazilo.

Enkonduko al tiu geometrio troveblas en Maclagan & Sturmfels (2015), kie oni elektas minimumon anstataŭ maksimumon, kio estas elekto tute ekvivalenta.

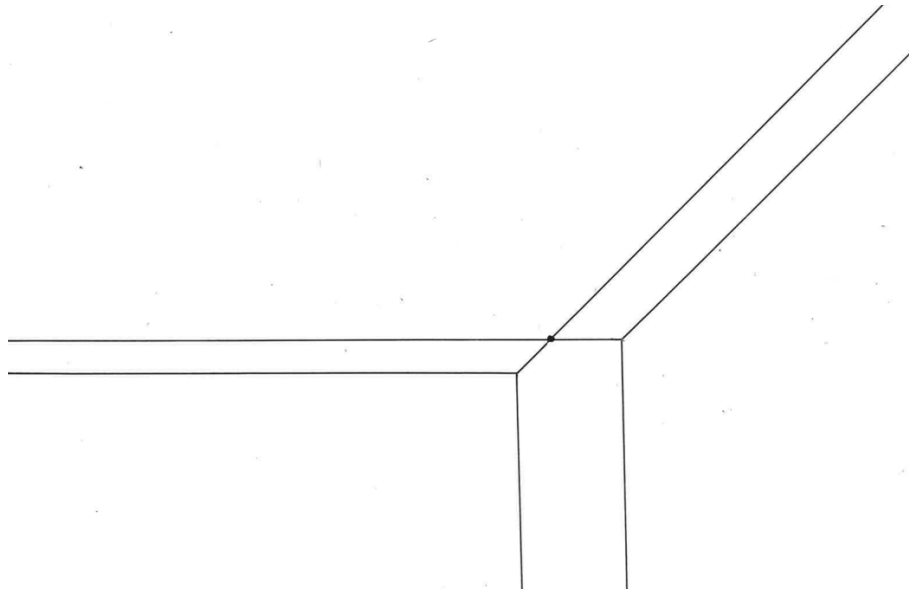
7.5. Tropikaj rektoj

Polinomo de la unua grado $P(x, y) = ax + by + c$ estas transformita al $P_{\text{trop}}(x, y) = (a + x) \vee (b + y) \vee c$.

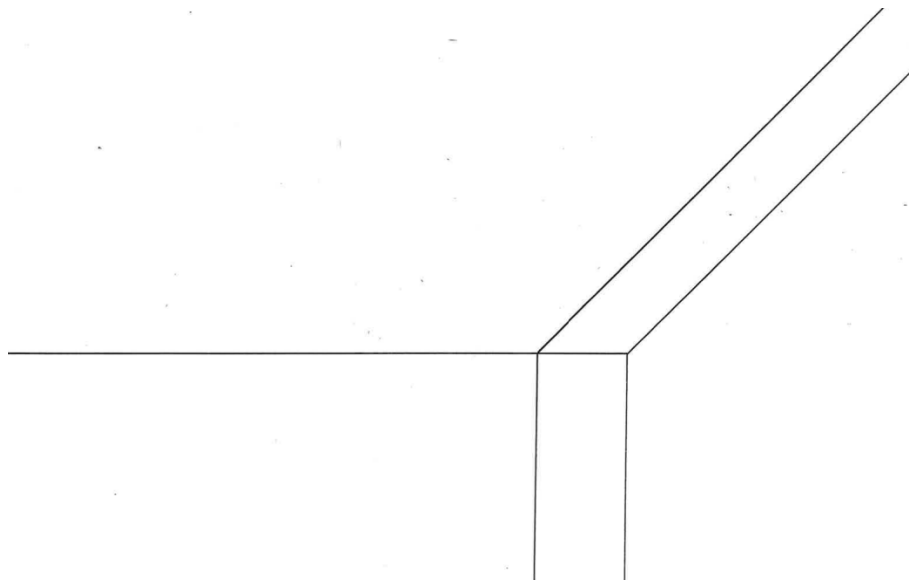
La nulejoj de P respondas al la punktoj kie egalas du terminoj de P_{trop} . Tio signifas ke ni devas konsideri $a + x = b + y$, $a + x = c$, kaj $b + y = c$. Ĉiuj tri egalas en la punkto $(x, y) = (c - a, c - b)$.



Figuro 7.4. Tropika rekto en la ebena.



Figuro 7.5. Du tropikaj rektroj en la ebena ĉiam intersekcas.



Figuro 7.6. Du tropikaj rektroj en la ebena ĉiam intersekcas en unika punkto ... en unika stabila punkto ...

7.6. Kunfaldo

Estu donitaj du funkcioj f kaj g sur \mathbf{R}^n . Ni difinas ilian *kunfaldan produkton* $h = f * g$ per

$$h(x) = (f * g)(x) = \sum_{y \in \mathbf{R}^n} f(x - y)g(y), \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

Ni devas almeti iun kondiĉon por garantii konverĝon.

7.7. Infima kunfaldo

Ni studu la kunfaldan produkton de du funkcioj de la formo e^{-f} :

$$e^{-h_1(x)} = \sum_{y \in \mathbf{R}^n} e^{-f(x-y)} e^{-g(y)}, \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

supozante ke f, g egalas al $+\infty$ ekster iu diskreta aro. Se, ekzemple f, g havas siajn subtenantojn en \mathbf{Z}^n kaj $f(x), g(x) \geq \varepsilon \|x\| - C$, tiam ni havas bonan konverĝon. La tropikigaĵo de tiu kunfalda produkto estas

$$e^{-h_\infty(x)} = \sup_{y \in \mathbf{R}^n} e^{-f(x-y)} e^{-g(y)}, \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

kion ni povas skribi tiel:

$$h_\infty(x) = \inf_{y \in \mathbf{R}^n} (f(x-y) + g(y)), \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

Ankaŭ ĉi tie ni havas bonan konverĝon: se ni difinas h_p per

$$e^{-ph_p(x)} = \sum_{y \in \mathbf{R}^n} e^{-pf(x-y)} e^{-pg(y)}, \quad x \in \mathbf{R}^n, p > 0,$$

tiam h_p konverĝas al h_∞ kiam p strebas al $+\infty$.

7.8. Kalkuli kun la nefinioj

Adicio $\mathbf{R}^2 \ni (x, y) \mapsto x + y \in \mathbf{R}$ povas esti plivastigita laŭ du malsamaj manieroj al operacioj $(\mathbf{R}_\dagger)^2 \rightarrow \mathbf{R}_\dagger$: la **supera sumo** $x \dot{+} y$ estas difinita kiel $+\infty$ se unu el la termoj egalas al $+\infty$; la **malsupera sumo** $x \dot{-} y$ estas difinita kiel $-\infty$ se unu el la terminoj egalas al $-\infty$.

La funkcio h_∞ estas la **infima kunfaldaĵo** de f kaj g , notita per $f \sqcap g$. Ĉi tie ni kompreneble ne bezonas supozoj ke f kaj g egalas al $+\infty$ ekster diskreta aro. Pli ĝenerale ni difinas ĝin kiam f kaj g prenas siajn valorojn en $[-\infty, +\infty]$ uzante la superan adicon:

$$(f \sqcap g)(x) = \inf_{y \in \mathbf{R}^n} (f(x-y) \dot{+} g(y)), \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

La operacio \sqcap estas asocieca, kio signifas ke $f \sqcap (g \sqcap h) = (f \sqcap g) \sqcap h$ por ĉiuj funkcioj f, g, h . Tiel estas pro bona rilato inter la infimo kaj la supera adicio.

La funkcio $\mathbf{ind}_{\{0\}}$ estas la neŭtrala elemento por \sqcap : $f \sqcap \mathbf{ind}_{\{0\}} = f$ por ĉiuj f .

7.9. La transformo de Fenchel

La **transformaĵo de Fenchel**³⁴ de funkcio $f: \mathbf{R}^n \rightarrow [-\infty, +\infty]$ estas difinita kiel

$$\tilde{f}(\xi) = \sup_{x \in \mathbf{R}^n} (\xi \cdot x - f(x)), \quad \xi \in \mathbf{R}^n.$$

³⁴Nomata tiel pro Werner Fenchel (1905–1988).

Klare $\xi \cdot x - f(x) \leq \tilde{f}(\xi)$, kion ni povs skribi kiel

$$\xi \cdot x \leq f(x) \dot{+} \tilde{f}(\xi), \quad (\xi, x) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n,$$

nomata la **neegalaĵo de Fenchel**. Sekvas ke la dua transformiĵo $\tilde{\tilde{f}}$ plenumas $\tilde{\tilde{f}} \leq f$. Ĉi tie ni havas egalaĵon se kaj nur se f estas konvekso, malsupren duonkontinua kaj prenas la valoron $-\infty$ nur se ĝi ĉie egalas al $-\infty$.

La transformo de Fenchel $f \mapsto \tilde{f}$ estas tropika respondiĵo al la furiera transformo. Tiu ĉi eble estas eĉ pli evidenta se ni, por eviti kompleksajn nombrojn, anstataŭe konsideras la transformon de Laplace de funkcio g :

$$(\mathcal{L}g)(\xi) = \int_0^\infty g(x)e^{-\xi x} dx.$$

Se ni anstataŭigas la integriĵon per supremo kaj prenas la logaritmon, ni ricevas

$$\log(\mathcal{L}_{\text{trop}}g)(\xi) = \sup_x (\log g(x) - \xi x) = \tilde{f}(-\xi), \quad f(x) = -\log g(x).$$

Ni havas

$$(f \sqcap g)^\sim = \tilde{f} \dot{+} \tilde{g} \leq \tilde{f} \dot{+} \tilde{g}.$$

Se φ kaj ψ estas konveksaj, tiam $\varphi \dot{+} \psi$ konveksas, sed ne ĉiam $\varphi \dot{+} \psi$. Tamen, kiam $\varphi = \tilde{f}$ kaj $\psi = \tilde{g}$, la dirita veras: $\tilde{f} \dot{+} \tilde{g}$ ĉiam konveksas, kaj ofte egalas al $\tilde{f} \dot{+} \tilde{g}$. Fakte egalaĵo validas krom en malmultaj specialaj situacioj.

Tiun ĉi formulon oni komparu kun $(f * g)^\wedge = \hat{f}\hat{g}$ por la transformiĵoj \hat{f} kaj \hat{g} de Fourier.

7.10. Diskretigo kaj tropikigo: ĉu ekzistas Ŝtono de Rosetta?

Resume: ni diskretigas per anstataŭigo de integriĵo per sumo

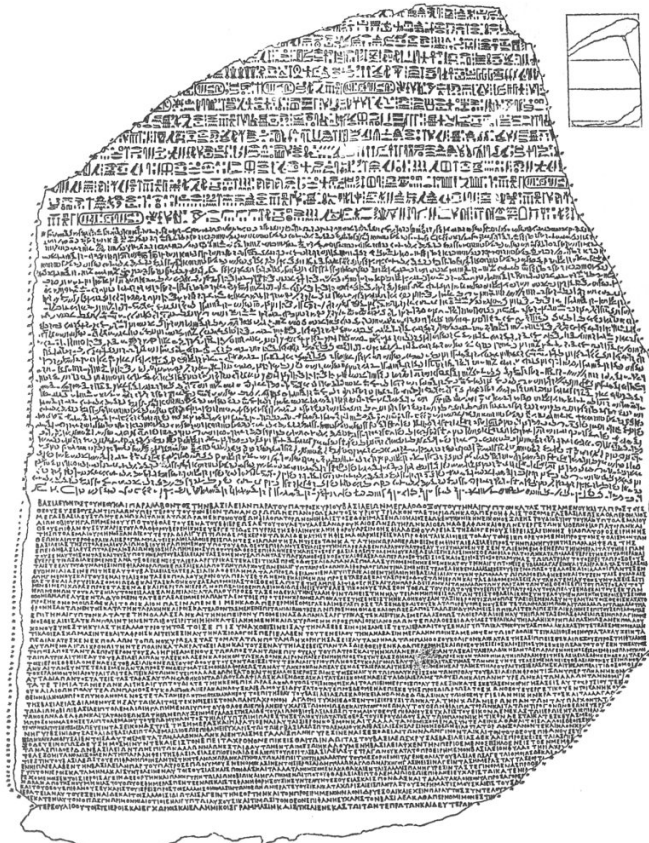
$$\int \mapsto \Sigma,$$

kaj ni tropikigas per anstataŭigo de integriĵo per supremo:

$$\int \mapsto \sup.$$

Ekzistas similecoj inter diskretigo kaj tropikigo. Esprimi tion precize ne facilas ...

Unua ŝtupo estus esprimi tute eksplice ĉiujn similecojn kaj poste trovi pli ĝeneralan proceduron, de kiu kaj diskretigo kaj tropikigo ekestas post specialaj elektoj.



Figuro 7.7. La Ŝtono de Rosetta, 196 BC marto 27, trovita en 1799: Du lingvoj (egipta, greka); tri skribsistemoj (hieroglifoj, demota skribo, greka alfabeto).

8. Ĉapitro oka: Postparolo

Mi opinias ke estas grave vidi la digitajn objektojn ne kiel alproksimigojn de la malnovaj kutimaj objektoj — de tiuj kiujn ni havas la kutimojn vidi modeligataj per la reelaj nombroj — sed kiel objektojn en ilia propra ekzisto, en ilia propra forto. Tie mi vidas multajn estontajn esplorprojektojn. Digita geometrio estas bezonata por pritrakto de bildoj, por la konstruado de fotiloj, por komputila grafiko kaj multaj aliaj teĥnikoj.

Do, mallonge dirite: la diskreta apartenas al la estonteco. La diskretaj modeloj estas evoluigataj ĝuste nun, kaj mi opinias ke ili bezonos plian evoluigadon dum multaj estontaj jaroj.

Por mencii nur unu ekzemplon, jam priparolatan: la rektojn de Eŭklido oni studis dum pli ol du mil jaroj; la digitajn rektojn ekstudis serioze unuan fojon Azriel Rosenfeld (1931–2004) en verko kiu aperis antaŭ nur kvardek tri jarojn (1974). Kaj tiu teorio por digitaj rektoj en la ebena nun estas evoluigata al digitaj ebenaĵoj en la tri-dimensia spaco kaj plue en pli altaj dimensioj. Ĉio ĉi neniel estas plene farita.

Eŭklida geometrio, digita geometrio kaj tropika geometrio estas tri specoj de geometrioj, kiuj povas esti kontrastigataj unu kontraŭ la alia; kiuj povas apogi kaj frukto-doni unu al la alia. Kune kun matematika morfologio ili konsistigas gravajn esplordomajn kun multflankaj teĥnikaj aplikoj.

Referencoj

- Adamczewski, Boris. 2003. Balances for fixed points of primitive substitutions. *Theoretical Computer Science*, **307**, 47–75.
- Bédaride, Nicolas; Domenjoud, Eric; Jamet, Damien; Rémy, Jean-Luc. 2010. On the number of balanced words of given length and height over a two-letter alphabet. *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.* **12**(3), 41–62.
- Benczik, Vilmos. 2011. La esperanta literaturo tra la lupeo de kelkaj lingvotektoroj kaj literaturkonceptoj. *Esperantologio / Esperanto Studies* **5**, 37–59.
- Berthé, Valérie. 2009. Discrete geometry and symbolic dynamics. **En:** Mikael Passare, red. *Complex Analysis and Digital Geometry. Proceedings from the Kiselmanfest, 2006*, pp. 81–110. Acta Universitatis Upsaliensis, vol. 86. Upsalo: Upsala universitato. 364 pp. ISSN 0502-7454, ISBN 978-91-554-7672-4.
- Boman, Jan. 1991. Matematik som poesi. *Dialoger* **18–19**, pp. 22–23.
- Budmar, Stefan Jerzy. 1983. *Brytning hos svensktalande polacker*. Doktora distertaĵo defendita 1983-05-19. Uppsala Slavic Papers 6. Upsalo: Upsala universitato.
- Choquet, Gustave. 1955. Theory of capacities. *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble 5 (1953/1954), 131–295.
- Eckhardt, Ulrich. 2001. Digital lines and digital convexity. *Digital and Image Geometry*, pp. 209–228. Lecture Notes in Computer Science 2243. Springer.
- Favati, Paola; Tardella, Fabio. 1990. Convexity in nonlinear integer programming. *Ricerca Operativa* **53**, 3–44.
- Ferber, Rafael. 1981. *Zenons Paradoxien der Bewegung und die Struktur von Raum und Zeit*. Munkeno: C. H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung.
- Градштейн, Израиль Соломонович; Ръжик, Иосиф Моисеевич. 1962. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*. Moskvo: Государственное издательство физико-математической литературы.
- Heath, Thomas L. 1926. *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. Tradukita el la teksto de Heiberg. Volumo I, Libroj I kaj II. Dua eldono. Kembriĝo: Cambridge University Press. Ree presita en 1956 kaj pli malfrue fare de Dover Publications, Inc., en Nov-Jorko. x + 432 pp.
- Hung, S. H. Y.; Kasvand, T. 1984. On the chord property and its equivalences. **En:** *Proceedings of the 7th International Conference on Pattern Recognition*, pp. 116–119.
- Kim, Chul E.; Rosenfeld, Azriel. 1982. Digital straight lines and convexity of digital regions. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mech. Intell.* PAMI-4, No. 2, 149–153.
- Kiselman, Christer. 1990. Nomoj de matematikaj operacioj en Esperanto. **En:** *Serta Gratulatoria in Honorem Juan Régulo*, volumo IV, pp. 683–697. La Laguna: Universidad de La Laguna. Havigebla ĉe www.cb.uu.se/~kiselman/bibliography.html, sekcio 3.1, verko 90-a.
- Kiselman, Christer. 2003. La geometrio de la komputila ekrano. **En:** Lipari, Michela, red. 2003. *Internacia Kongresa Universitato*, pp. 1–12. Roterdamo: Universala Esperanto-Asocio, 83 pp.
- Kiselman, Christer O. 2004. Convex functions on discrete sets. **En:** Klette, R.; Žunić, J., red. *Combinatorial Image Analysis, 10th International Workshop, IWCIA 2004, Auckland, New Zealand, December 1–3, 2004*, pp. 443–457. Lecture Notes in Computer Science **3322**. Springer. Havigebla ĉe www.cb.uu.se/~kiselman/bibliography.html, sekcio 2.1, verko 04-1.
- Kiselman, Christer O. 2007. *Trois problèmes en convexité digitale: minima locaux, fonctions marginales et hyperplans séparants*. Lekcio ĉe GeoNet VI, 2007-06-12. Havigebla ĉe www.cb.uu.se/~kiselman/bibliography.html, sekcio 5, verko 07-A.
- Kiselman, Christer O. 2008. Minima locaux, fonctions marginales et hyperplans séparants dans l'optimisation discrète. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris, Sér. I* **346**, 49–52. Havigebla ĉe www.cb.uu.se/~kiselman/bibliography.html, sekcio 2.1, verko 08-1.
- Kiselman, Christer O. 2011. Characterizing digital straightness and digital convexity by means of difference operators. *Mathematika* **57**, 355–380. Havigebla ĉe www.cb.uu.se/~kiselman/bibliography.html, sekcio 2.1, verko 11-1.

- Kiselman, Christer. 2013. Diskreta kaj reela optimumado. **En:** *Prelegaro, Parto II. Internacia Simpozio “Apliko de Esperanto en la profesia agado”*, pp. 72–84. Publikigita en 2013; formala jaro de publikigo 2012. Karlovo: Akademio Internacia de la Sciencoj. (Teksto bazita sur prelego en Karlovo en junio de 2009.) Havigebla ĉe www.cb.uu.se/~kiselman/bibliography.html, sekcio 2.1, verko 13-1.
- Kiselman, Christer O. 2014. Kiel rekonii rektojn kaj strekojn inter ĉiuj kurboj kaj aliaj bildoj sur la komputila ekrano?. *Prelegaro, Volumo II. Internacia Simpozio “Apliko de Esperanto en la profesia agado”*, 2013, pp. 72–92. Publikigita en 2014; formala jaro de publikigo 2013. Karlovo: Akademio Internacia de la Sciencoj. (Teksto bazita sur prelego en Sopot la 12-an de junio 2010.) Havigebla ĉe www.cb.uu.se/~kiselman/bibliography.html, sekcio 2.1, verko 14-1.
- Kiselman, Christer O. 2015a. Euclid’s straight lines. *Nordisk matematisk tidskrift* **62**, nr. 4, 145–170. Havigebla ĉe www.cb.uu.se/~kiselman/bibliography.html, sekcio 2.1, verko 15-1.
- Kiselman, Christer. 2015b. Matematiska rum. **En:** Almgren, Mats; Birgegård, Ulla; Glimelius, Kristina, red. *Sundelöfs Societet*, pp. 25–42. Upsalo: Kungl. Vetenskaps-Societeten i Uppsala. ISBN 978-91-506-2449-6. Havigebla ĉe www.cb.uu.se/~kiselman/bibliography.html, sekcio 4.1, verko 15-ii.
- Kiselman, Christer O.; Samieinia, Shiva. 2010. Convexity of marginal functions in the discrete case. **En:** Samieinia (2010b). Havigebla ĉe www.cb.uu.se/~kiselman/bibliography.html, sekcio 2.1, verko 10-4.
- Kiselman, Christer O.; Samieinia, Shiva. 2017. Convexity of marginal functions in the discrete case. **In:** Andersson, Mats; Boman, Jan; Kiselman, Christer; Kurasov, Pavel; Sigurdsson Ragnar, red. *Analysis Meets Geometry. The Mikael Passare Memorial Volume*, pp. 287–309. Cham: Birkhäuser. ISBN 978-3-319-52469-6. Havigebla ĉe www.cb.uu.se/~kiselman/bibliography.html, sekcio 2.1, verko 17-5.
- Klette, Reinhard; Rosenfeld, Azriel. 2004. *Digital Geometry: Geometric Methods for Digital Picture Analysis*. Amsterdamo k.a.: Elsevier. xviii + 656 pp.
- Koné, Adama Arouna. 2016. *Géométrie digitale utilisée pour la discrétisation et le recouvrement optimal des objets euclidiens*. Doktora disertaĵo prezentita 2016-01-14. Bamako: Université des Sciences, des Techniques et des Technologies de Bamako, Faculté des Sciences et Techniques.
- Koutny, Ilona. 2013. Kiel niaj pensoj vortiĝas? Kiun semantikan modelon sekvas esperanto? **En:** Kiselman, Christer; Maradan, Mélanie, red. *Leksikologio, frazeologio, historio kaj terminologio: du kontinentoj renkontiĝas en Hanojo. Aktoj de la 35-a Esperantologia Konferenco en la 97-a Universala Kongreso de Esperanto, Hanojo 2012*, pp. 35–48. Roterdamo: Universala Esperanto-Asocio.
- Ladefoged, Peter. 1973. *Elements of Acoustic Phonetics*. Ĉikago; Londono: The University of Chicago Press. vii + 120 pp. ISBN 0-226-46785-6.
- Ladefoged, Peter. 1993. *A Course in Phonetics*. Forth Worth: Harcourt Brace College Publishers. Tria eldono. xi + 308 pp. ISBN 0-15-500173-6.
- Lieko, Anneli. 1992. *Suomen kielen fonetiikka ja fonologiaa ulkomaalaisille*. Loimaa: Loimaan Kirjapaino.
- Lothaire, M. 2002. *Algebraic Combinatorics on Words*. Kembriĝo: Cambridge University Press.
- Lovász, L. 1983. Submodular functions and convexity. **En:** Bachem, A.; Grötschel, M.; Korte, B., red. *Mathematical Programming — The State of the Art*, pp. 235–257. Berlino: Springer-Verlag.
- Maclagan, Diane; Sturmfels, Bernd. 2015. *Introduction to Tropical Geometry*. Graduate Studies in Mathematics, 161. Providence, RI: American Mathematical Society. xii + 363 pp. ISBN 978-0-8218-5198-2.
- Morse, Marston; Hedlund, Gustav A. 1940. Symbolic dynamics II. Sturmian trajectories. *Amer. J. Math.* **62**, No. 1, 1–42.
- Murota, Kazuo. 2003. *Discrete Convex Analysis*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.

- Najman, Laurent; Talbot, Hugues, red. 2008. *Morphologie mathématique 1*. Paris: Hermes Science; Lavoisier.
- Nathanson, Melvin B. 2008. Desperately seeking mathematical truth. *Notices of the American Mathematical Society* **55**, n-ro 7, 773.
- Plena ilustrita vortaro de Esperanto 2005* (PIV 2005). 2005. Parizo: Sennacieca Asocio Tutmonda.
- Pokrovskij, Sergio. 1995. *Komputika leksikono*. Jekaterinburg: Sezonoj.
- Pytheas Fogg, N. 2002. *Substitutions in Dynamics, Arithmetics and Combinatorics*. Lecture Notes in Math. 1794. Springer-Verlag.
- Reveillès, J[ean]-P[ierre]. 1991. *Géométrie discrète, calcul en nombres entiers et algorithmique*. Strasbourg: Université Louis Pasteur. Ŝtatisertaĵo. 251 pp.
- Rosenfeld, Azriel. 1974. Digital straight line segments. *IEEE Transactions on Computers*. **c-32**, No. 12, 1264–1269.
- Rosenfeld, Azriel; Klette, Reinhard. 2001. Digital straightness. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science* **46**, 32 pp.
- Rovelli, Carlo. 2016. *Reality Is Not What It Seems*. Tradukita el la itala fare de Carnell, Simon, kaj Segre, Erica. Penguin Books. 255 pp. ISBN 978-0-241-25796-8.
- Sajavaara, Kari; Dufva, Hannele. 2001. Finnish-English Phonetics and Phonology. *International Journal of English Studies* **1**, 241–256.
- Samieinia, Shiva. 2007. *Digital straight line segments and curves*. Licencia disertaĵo prezentita ĉe Stokholma universitato 2007-09-25.
- Samieinia, Shiva. 2010a. Chord properties of digital straight line segments. *Math. Scand.* **107**, 1–27.
- Samieinia, Shiva. 2010b. *Digital Geometry, Combinatorics, and Discrete Optimization*. Doktora disertaĵo publikigita 2010-12-15 kaj defendita ĉe Stokholma universitato 2011-01-21. Stokholmo: Stokholma universitato.
- Samieinia, Shiva. 2014. Discrete convexity built on differences. *Port. Math.* **71**, no. 1, 25–37.
- Segelberg, Ivar. 1945. *Zenons paradoxer: en fenomenologisk studie*. Doktora disertaĵo defendita ĉe la Altlernejo de Göteborg 1945-05-28. Stokholmo: Natur och Kultur.
- Serra, Jean. 1982. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Londono: Academic Press. xviii + 610 pp.
- Serra, Jean, red. 1988. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Volumo 2. Londono k. a.: Academic Press. xvi + 411 pp.
- Strömngren, Elis; Strömngren, Bengt. 1945. *Lærebog i Astronomi*. Dua eldono. Oslo: Gyldendal Norsk Forlag.
- Terzioğlu, Tosun. 2002. A human achievement: Mathematics without boundaries. **En**: Boezi, Michael, red. *Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics, University of Crete, 1–6 July 2002*. Kompakt-disko publikigita de John Wiley & Sons Inc. ISBN: 0-471-46332-9. Havigebla ĉe www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/invTer.pdf; kontrolita 2017-09-05.
- Uscka-Wehlou, Hanna. 2009. Two equivalence relations on digital lines with irrational slopes. A continued fraction approach to upper mechanical words. *Theoret. Comput. Sci.* **410** (38–40), 3655–3669.
- Vuillon, Laurent. 2003. Balanced words. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin* **10**, suppl., 787–805.
- Waschies, Hans-Joachim. 1998. Mathematische Schriftsteller. **En**: Flashar, Hellmut, red. *Die Philosophie der Antike*. Band 2:1. *Sophistik, Sokrates, Sokratik, Mathematik, Medizin*, pp. 365–453. Bazelo: Schwabe & CO AG Verlag.
- White, Michael J. 1992. *The Continuous and the Discrete: Ancient Physical Theories from a Contemporary Perspective*. Oksfordo: Clarendon Press.
- Whitrow, G. J. 1990. *Time in History: Views of time from prehistory to the present day*. Oksfordo; Nov-Jorko, NY; Oxford University Press.

Pri la aŭtoro:

Christer Oscar Kiselman estas homo.

Iom pli precize Christer estas matematikisto kiu parolas la svedan, esperanton, la anglan kaj la francan. Li estas gastprofesoro ĉe Upsala universitato.

Li esploris pri partaj diferencialaj ekvacioj, kompleksa analitiko kaj kompleksa geometrio, eĉ en spacoj de nefinia dimensio.

Nuntempe Christer ĉefe esploras pri digita geometrio, matematika morfologio kaj diskreta optimumado. Li gvidis dek ok personojn el sep landoj al doktoreco (1974–2016). La interparoloj okazis en kvar lingvoj.

En la lernejo li studis la anglan, la germanan kaj la francan, kaj private ekstudis la rusan je la aĝo de dek tri jaroj. Li vivis pli ol unu jaron en Usono kaj pli ol du jarojn en Francio. Sekvis pli malfrue studoj de la persa (2007–2009) kaj de la klasika greka (2010–2011) en Upsala universitato.

Por pli bone kompreni la aŝkenazan kulturon, en kiu naskiĝis la lingvoj de Zamenhof, Christer studis jidon (kaj lingvon kaj literaturon) dum la akademia jaro septembro 2015 – majo 2016 ĉe Lunda universitato, en du kursoj gvidataj de Jan Schwarz kaj kun Delia Kübeck kiel asistanto. En julio de 2016 li partoprenis en septaga kurso pri jido en Weimar, gvidata de Helen Beer.

En julio de 2017 li estis nomumita dekano de la Sekcio por Struktursciencoj ĉe Akademio Internacia de la Sciencoj (AIS).

Paperpoŝta adreso de la aŭtoro: Upsala universitato, Instituto por informadika teĥnologio,

Poŝtkesto 337, SE-751 05 Uppsala

Sukcenaj adresoj: kiselman@it.uu.se, christer@kiselman.eu

Retejo: www.cb.uu.se/~kiselman