Urban Cegrells matematik

Christer Kiselman

I detta föredrag kommer jag att presentera några av Urban Cegrells viktigaste matematiska resultat.

Urban försvarade sin doktorsavhandling vid Uppsala universitet 1975-05-23, för 28 år sedan. Den hette *Removable singularities of plurisubharmonic functions and related problems*. Opponent var Pierre Lelong. Han stannade kvar i Uppsala till 1984, var i Umeå 1984—1996, sedan som professor vid University of Canterbury i Christchurch 1996–1997 och delar nu sedan 1997 sin tid som professor i Sverige mellan Umeå och Sundsvall.

En enkel statistik visar på en forskare med en ovanlig förmåga att samarbeta: Urban har inte mindre än tolv medförfattare till sina publikationer. De är Christer Kiselman (1970), Leif Persson (1992, 1997, 2002), Azim Sadullaev (1992), Sławomir Kołodziej (1993, 1994, 1998, 1999, 2002), Evgeny Poletsky (1995), Johan Thorbiörnson (1996), Hiroshi Yamaguchi (1996, 2001), Magnus Carlehed (1999), Frank Wikström (1999), N. Usova (2002), P.-O. Westlund (2002) och Ahmed Zeriahi (2003).

Han har handlett sju forskare till doktorsexamen: Johan Thorbiörnson 1989, Ulf Backlund 1992, Leif Persson 1992, Anders Fällström 1994, Magnus Carlehed 1998, Frank Wikström 1999 och Per Åhag 2002.

Ett första forskningstema var studiet av utvidgningar av plurisubharmoniska funktioner. Låt oss ta två öppna mängder Ω och ω i $\mathbf{C}^n$ med $\omega \subset \Omega$, och låt R vara restriktionen $R\colon PSH(\Omega) \to PSH(\omega)$. Det är naturligt att fråga om R är injektiv eller surjektiv. Man säger att $P = \Omega \smallsetminus \omega$ är en *hävbar singularitetsmängd* om R is bijektiv. Urban visade 1975 att R är injektiv om och endast om man har $\limsup_{z\in\omega, z\to a} f(z) = f(a)$ för alla $a \in \Omega$ och alla $f \in PSH(\Omega)$. Det finns alltid en största mängd till vilken alla plurisubharmoniska funktioner kan utvidgas entydigt. Om R är injektiv men inte surjektiv, så är dess bild mager. Dessa är några resultat från doktorsavhandlingen. Men saker och ting är inte alltid enkla: Det finns en sluten mängd P i $\Omega = \mathbf{C}^n$ sådan att varje funktion som är plurisubharmonisk och kontinuerlig i $\omega = \mathbf{C}^n \smallsetminus P$ och lokalt begränsad uppåt nära P är i bilden av R. Men R är inte injektiv.

Ett andra tema som Urban tog upp är diskontinuiteten hos Monge–Ampère-operatorn, som visar hur svår denna icke-lineära operator är. Han visade 1983 det mycket besvärande resultatet att det finns en följd (u_j) av kontinuerliga plurisubharmoniska funktioner i en öppen mängd $\Omega \subset \mathbf{C}^2$ som går mot u i $L^p(\Omega)$ för alla $p \in [1, +\infty[$, men ändå är sådana att $M(u_j)$ inte konvergerar mot $M(u)$ för topologin $\sigma(\mathscr{D}'_{(2,2)}, \mathscr{D}(\Omega))$.

Ett nytt stort tema för Urbans forskning är den *plurikomplexa energin* hos en funktion, som han införde 1998. Han gjorde det för att kunna utvidga Monge–Ampère-operatorn till större rum än $PSH \cap L^\infty_{\mathrm{loc}}$, vilket är önskvärt men svårt. Han definierar två konvexa koner, kallade $\mathscr{E}_p(\Omega)$ och $\mathscr{F}_p(\Omega)$, på vilka M är väldefinierad, $1 \leqslant p < +\infty$. Funktionerna i $\mathscr{E}_1(\Omega)$ är de med *ändlig plurikomplex energi* – detta förklarar titeln på hans uppsats i *Acta Mathematica* 1998.

Urban bestämmer precis när Monge–Ampère-ekvationen $M(u) = \mu$ har en lösning $u \in \mathscr{F}_p(\Omega)$. Han förutsätter här, vilket är naturligt, att Ω är en öppen, begränsad, sammanhängande och hyperkonvex mängd i $\mathbf{C}^n$.

Dessa och flera andra resultat kommer jag att försöka beskriva.