 Acta Sanmarinensia IV.4, 105–132

Enkonduko al distribucioj

Christer Kiselman

Enhavo:

1. Historia superrigardo
2. Kio estas funkcio?
3. Kial funkcioj ne sufiĉas?
4. Kio estas distribucioj?
5. Difino de distribucioj
6. La furiera transformo
7. Kunfaldo
8. Divido de distribucioj
9. Maleblo multipliki distribuciojn
10. Aliaj difinoj de distribucioj
11. Aliaj ĝeneraligitaj funkcioj
12. Konkludo
13. Literaturo

Resumo
La artikolo prezentas kelkajn malfacilojn en la klasika analitiko kaj montras kiel oni povas venki ilin per matematikaj objektoj kiuj estas pli ĝeneralaj ol funkcioj de reelaj variabloj: la distribucioj. Ni pritraktos derivaĵojn, furierajn transformaĵojn kaj kunfaldaĵojn de distribucioj.

Sammanfattning
Därför distributioner
Artikeln presenterar några svårigheter i den klassiska matematiska analysen och visar hur dessa kan övervinnas med hjälp av matematiska objekt som är mer generella än funktioner av reella variabler: distributionerna. Vi behandlar derivator, Fouriertransformer och faltningar av distributioner.

Abstract
Therefore distributions
The article presents some difficulties in classical mathematical analysis and shows how one can overcome them using mathematical objects which are more general than functions of several real variables: the distributions. We consider derivatives, Fourier transforms, and convolutions of distributions.

1. Historia superrigardo

La distribucioj estas matematikaj objektoj kiuj estas pli ĝeneralaj ol funkcioj kun pluraj reelaj variabloj. Oni enkondukis ilin, aŭ konstruis ilin, ĉar la funkcioj ne ĉiam sufiĉas.

En tiu ĉi artikolo mi klopodos klarigi kial la funkcioj ne ĉiam sufiĉas, do kial oni sentas urĝon eliri el ilia kadro, kaj poste priskribi kiel oni povas difini distribuciojn kaj kiel ili solvas la problemojn en kiuj la funkcioj montriĝis nesufiĉaj. Tiuj problemoj rilatas unuavice al derivaĵoj, sed ankaŭ al la transformo de Furiero (Joseph Fourier, 1768—1830). Fakte oni povas sekvi jarcentlongan vicon da klopodoj venki la mankojn de la funkcioj, kaj rilate al derivo, kaj rilate al la furiera transformo.

La distribuciojn unue difinis Sergej L′voviĉ Sobolev (1908—1989) en franclingva artikolo aperinta en 1936 (antaŭenirita de notoj en 1934 kaj 1935, el kiuj la unua estis en la rusa kaj franca). Sed li ne ellaboris tutan teorion pri ili. Tion faris Laurent Schwartz (1915—2002), unue en du artikoloj (Schwartz 1945 kaj 1947-48), kaj poste en du volumoj (Schwartz 1950, 1951), kiujn li unuigis en sia unuvoluma libro (1966). Li speciale atentis la furieran transformon, kio verŝajne tre gravis por la sukceso de lia teorio.

Por montri la utilon de distribucioj en la fizikaj sciencoj Schwartz publikigis pli elementan lernolibron (1965). Klasika monografio pri distribucioj kaj ties furieraj transformaĵoj estas la verko de Lars Hörmander (1983). Li plene fondis la teorion pri linearaj partaj diferencialaj ekvacioj sur la distribucia teorio. Riĉaj kolektoj de ekzercoj pri la kalkulado de distribucioj estas Hervé (1986) kaj Zuily (1986). Pli elementajn lernolibrojn publikigis Friedlander kaj Joshi (1998) kaj Strichartz (2003). Gårding (1997) priskribis la influon de la distribucia teorio ĉe diversaj branĉoj de la matematika analitiko.

Ni ankaŭ mallonge traktos, en sekcio 10, aliajn difinojn de la distribucioj, nome la aliron per vicoj de Temple (1955), Lighthill (1958) kaj Antosik k.a. (1973).

Ekzistas pluraj aliaj ĝeneraligitaj funkcioj ol la distribucioj. Oni povas elekti alian spacon de testaj funkcioj. Oni povas ankaŭ enkonduki ĝeneraligitajn funkciojn kiel ĉerandajn valorojn de holomorfaj aŭ de harmoniaj funkcioj: tiu estas la aliro de Mikio Sato. Ni mallonge mencios tiun evoluon en sekcio 11.

La matematikhistoriisto Jesper Lützen verkis ege interesan libron pri la prahistorio de la distribucioj (1982), kiu priskribas kiel pluraj matematikistoj faris klopodojn supervenki la malfacilojn de la diferenciala kalkulo, same kiel tiuj de la furiera transformo. Mi mem verkis pri kelkaj el tiuj klopodoj, nome pri tiuj kiujn faris Solomon Bochner kaj Torsten Carleman (Kiselman 2002).

Kial la verko de Sobolev nun estas pli-malpli forgesita, dum tiu de Schwartz estas tre konata? Lars Hörmander (persona komuniko en 1997) opiniis ke unu kaŭzo estas la fakto ke Sobolev ne konsideris la furieran transformon. Kaj efektive, gravega ĉapitro en la libro de Schwartz temas pri tiu transformo, kiun Schwartz faris integra parto de sia teorio, kaj kiu havas vastajn aplikeblojn. Sobolev ankaŭ ne konsideris la kunfaldon, kiu estas grava operacio por funkcioj same kiel por distribucioj, zorge traktata en la libro de Schwartz. Alia klarigo donis al mi Jesper Lützen (persona komuniko je 1997-04-23): li diris ke ne sufiĉas fari ion gravan; oni devas ankaŭ diri ke oni faris ion gravan. (Sobolev kaŝis sian difinon ene de granda artikolo kaj ne diskonigis ĝin libre.) Jean-Michel Kantor (2004a, b) komparas la malsamajn alirojn de Sobolev kaj

Schwartz pri ĝeneraligitaj funkcioj, apogante sin i.a. sur la referaĵo de Yushkevitch (2004). La unua aliris al la funkcionaloj pro bezono en la teorio pri partaj diferencialaj ekvacioj, dum la dua unuigis plurajn branĉojn de la analitiko en grandan teorion.

Schwartz nomis la novajn objektojn *distributions* en la franca. En la franca kaj angla oni uzas la saman vorton, *distribution*, kaj por probabla distribuo kaj por la nova nocio. La termino por la nova nocio estas inspirita de la distribuoj, ekzemple distribuoj de masoj aŭ elektraj ŝargoj (vidu Schwartz 1965:83), kaj ĝeneraligas tiujn ĉi, sed kelkfoje tiu samnomeco konfuzas. En esperanto, same kiel en ekzemple la germana (*Verteilung, Distribution*), oni distingas inter la du, elektinte malsamajn terminojn, do *distribuo* disde *distribucio*.[1] La vorto *distribucio* enestas en PIV de 2002.

Mi kore dankas al H. S. Holdgrün, unue pro la instigo en 2002 verki tian ĉi artikolon, due al li kaj Joanna Lewoc pro multaj denovaj, paciencaj, afablaj instigoj, trie al ili ambaŭ pro gravaj komentoj kaj korektoj al antaŭaj versioj de la teksto, kaj kvare pro la enmeto de belaj ilustraĵoj. Mi same kore dankas al Alexander Gofen, Finnur Lárusson kaj Shigeaki Nagamachi pro valoraj komentoj al la manuskripto. Kaj mi estas tre danka al Vladimir Maz′ya kaj Tatyana Shaposhnikova, kiuj helpis min pri referencoj rilataj al la verkoj de Sobolev kaj al la finia parto de integraĵoj, kaj kiuj permesi enmeton de iliaj fotoj de Schwartz kaj Sobolev en la publikigita versio.

2. Kio estas funkcio?

Funkcio estas matematika nocio tre grava. Ĝi modeligas procezojn en la naturo, teknikajn procezojn, kiun ajn eventon aŭ evoluon, en la naturo, en la tekniko aŭ en la socio. Signaloj, ĉu home faritaj aŭ ne, estas funkcioj, same kiel la vetero kaj la klimato. La rapido de la vento estas funkcio kun vektoraj valoroj (oni devas koni la rapidon en tri direktoj) kiu dependas de kvar aliaj grandoj, nome la tri koordinatoj kiuj determinas la lokon en la spaco (latitudo, longitudo kaj la alto super la maro) kaj la kvara koordinato, la tempo. Koncerto de orkestro povas esti priskribita kiel ŝanĝo de la aerpremo dependanta de la tempo, do kiel malsimpla signalo; ĝi estas funkcio de la tempo kiam la loko estas fiksita.

Resume ni povas diri ke funkcioj utilas en preskaŭ ĉiu matematika modelo de la naturo aŭ tekniko. Tamen, en kelkaj el tiuj matematikaj modeloj oni dezirus pli konvenan formalismon.

[1] Sendube la distingo estas utila kaj bone akordas kun la ĝenerala distingemo de esperanto; komparu ekzemple *pesi, pezi*; *ŝargi, ŝarĝi*; *revi, sonĝo* en la Fundamento kaj aliajn parojn en la ĝenerala lingvaĵo kiel *germano, ĝermano*; *generalo, ĝenerala*; *deserto, dezerto*; *helico, heliko* kaj *interesi, interezo.* Ankaŭ en la matematiko oni distingas pli ol en multaj lingvoj: *algebro, alĝebro*; *analizo, analitiko*; *produkto, produto*; *racio, racionala*; *reala, reela.*

Ekzistas kompreneble formala, matematika difino de la nocio de funkcio. Ĝi tekstas: *funkcio* $f\colon X \to Y$, kie X kaj Y estas aroj, estas triopo (X, Y, G) tia ke G, la *grafo* de f, estas aro de paroj (x, y), kie $x \in X$ kaj $y \in Y$, kaj tia ke por ĉiu $x \in X$ ekzistas ekzakte unu elemento $y \in Y$ tia ke $(x, y) \in G$. Oni nomas X la *argumentaron* de f kaj Y la *celaron* de f. En la aplikoj al fiziko X estas plej ofte subaro de $\mathbf{R}^n$, la spaco de n reelaj variabloj, kaj Y egalas kutime al la aro de la reelaj nombroj $\mathbf{R}$ aŭ tiu de la kompleksaj nombroj $\mathbf{C}$. Kiam ni diras ke funkcioj ne sufiĉas, ni celas la fakton ke tiuj nombrovaloraj funkcioj de reelaj variabloj montriĝis esti iel mankhavaj en la matematikaj modeloj de la scienco.

3. Kial funkcioj ne sufiĉas?

Ekzemploj de funkcioj kun unu variablo

Gravega rezulto en la analitiko estas ke oni povas retrovi kontinuan funkcion $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ el ĝia integraĵo: se ni fiksas $a \in \mathbf{R}$ kaj difinas

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t, \qquad x \in \mathbf{R}, \tag{3.1}$$

tiam la derivaĵo F' de F egalas al f, simbole $F' = f$. Kaj lige al tio oni povas preskaŭ retrovi kontinue deriveblan funkcion f el ĝia derivaĵo:

$$\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t = f(x) - f(a), \qquad x \in \mathbf{R}. \tag{3.2}$$

Ni povas retrovi el f' ne f, sed nur f module konstanton.[2]

Ni nun rigardu ĉu la formulo (3.2) validas por la kontinua funkcio $V(x) = |x|$, $x \in \mathbf{R}$, same kiel ties derivaĵo. La difino signifas ke la valoro de la funkcio ĉe pozitivedaj[3] valoroj estas la sama kiel la variablo x, t.e. $V(x) = x$ se $x \geqslant 0$, dum $V(x) = -x$ se $x < 0$. En ĉiu nenula punkto la funkcio estas derivebla, kaj la derivaĵo en punkto x estas 1 se $x > 0$ kaj -1 se $x < 0$. Se $x = 0$, la derivaĵo

[2] La adverbo *module* signifas (parolante pri ekvacio en modulo kaj ties submodulo) 'valide post aldono de elemento de la submodulo', en tiu ĉi kazo do post aldono de (nekonata) konstanto. Tio signifas ke ni ne konas la funkcion f se ni konas ties derivaĵon, sed tamen la diferencon inter la valoro $f(x)$ ĉe ajna punkto x kaj la valoro de f ĉe fiksa punkto.

[3] Mi uzas la sufikson *-ed-* por indiki la malfortigon de strikta neegalaĵo al nestrikta neegalaĵo. Ekzemploj: x estas pozitiva se kaj nur se $x > 0$, dum x estas pozitiveda se kaj nur se $x \geqslant 0$; x estas negativa se kan nur se $x < 0$, dum x estas negativeda se kaj nur se $x \leqslant 0$. Normo difinita sur vektora spaco estas pozitiva ĉe nenulaj vektoroj, dum normedo estas nur pozitiveda. Pozitiva funkcio plenumas $f(x) > 0$ por ĉiu argumento x; pozitiveda funkcio nur $f(x) \geqslant 0$ por ĉiu x, dum nenegativa funkcio havas unu argumenton x tian ke $f(x)$ ne estas negativa.

ne ekzistas. Ni trovas ke

$$\int_a^x V'(t)\mathrm{d}t = |x| - |a| = V(x) - V(a), \qquad x \in \mathbf{R},$$

kiel ajn ni difinas la valoron de V' ĉe la origino. La formulo (3.2) validas; la fakto ke $V'(0)$ ne ekzistas ne detruas ties validon.

La dua derivaĵo de V egalas al nulo en ĉiu nenula punkto. Se ni neglektas la originon, ni povas do diri ke la funkcio V solvas la ekvacion $u'' = 0$, kies klasikaj solvoj[4] ĉiuj estas afinaj, t.e. havas la formon $u(x) = Ax + B$ por iuj konstantoj A kaj B. Sed la funkcio V ne estas de tiu formo; ĝi ne estas klasika solvo. La formulo (3.2) ne validas por $f = V'$; ni havas, se $x, a \neq 0$,

$$V'(x) - V'(a) = \mathrm{sgn}(x) - \mathrm{sgn}(a),$$ [5]

dum

$$\int_a^x V''(t)\mathrm{d}t = 0, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

La situacioj por V' kaj V'' estas do tre malsamaj, kvankam supraĵe rigardate ili similas: la funkcioj ekzistas en ĉiu nenula punkto, kaj ne ekzistas en la orgino. La manko de difino en la origino estas negrava por V' sed gravega por V''. Kiel klarigi tion?

Pli ĝenerale: se ni entute povus difini la duan derivaĵon de V kiel iun funkcion g, tiam g egalus al nulo sur la tuta reela akso krom eventuale en la origino. Kaj tiam la dua malderivaĵo de g estus afina, dum la funkcio V ne estas. Ni tial devas aŭ akcepti ke la kontinua funkcio V ne havas duan derivaĵon, aŭ ke la dua derivaĵo ne povas esti funkcio. Ĉar ni ŝatus havi kalkulon per kiu oni povas retrovi la funkcion module afinan funkcion el ĝia dua derivaĵo, ni tial sentas emon difini la duan derivaĵon de V sed devas samtempe konstati ke ni devas eliri el la kadro de la funkcioj.

Resume, ni strebas trovi iun matematikan objekton, ni nomu ĝin w, de iu ĝis nun nekonata naturo, tian ke la solvoj de la diferenciala ekvacio $u'' = w$ ĉiuj havas la formon $u(x) = |x| + Ax + B$, $x \in \mathbf{R}$. La ĝisnuna rezonado montras nur ke w ne povas esti funkcio. Ni nomu la novan objekton *ĝeneraligita funkcio.* (Ni baldaŭ vidos ke tiu matematika objekto estas 2δ, duoblo de la mezuro de Dirako.)

[4]Oni nomas *klasika solvo* de diferenciala ekvacio funkcion kiu posedas kontinuajn derivaĵojn ĝis la plej alta ordo de la derivaĵoj aperantaj en la ekvacio kaj kiu solvas la ekvacion. Tio signifas ke la ekvacio havas elementan signifon por tia funkcio; ĉiuj esprimoj kiuj aperas estas kontinuaj funkcioj.

[5]La funkcio sgn donas la signon de reela nombro, t.e. $\mathrm{sgn}(x)$ egalas al 1 se $x > 0$, al -1 se $x < 0$ kaj $\mathrm{sgn}(0) = 0$.

Ni vidis ke la funkcio V malhavas derivaĵon ĉe la origino. Tiajn funkciojn oni ja delonge konas, kaj ŝajnas ke oni en la deknaŭa jarcento kredis ke ĉiu kontinua funkcio posedas derivaĵon krom en izolitaj punktoj. Pro tio estis ŝoke kiam Karl Weierstrass je 1872-07-18 prezentis al la Reĝa Akademio de la Sciencoj en Berlino ekzemplon de kontinua funkcio kun reela variablo kiu malhavas derivaĵon ĉe ĉiu punkto. Tia funkcio estas donita sufiĉe simple per trigonometria serio (Weierstrass 1895:72):

$$W(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b^k \cos a^k \pi x, \qquad x \in \mathbf{R}, \tag{3.3}$$

kie $0 < b < 1$ kaj a estas nepara natura nombro tia ke $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$ (ekzemple $a = 7$, $b = \frac{5}{6}$ aŭ $a = 13$, $b = \frac{1}{2}$). Oni vidas ke la funkcio W estas kontinua, ĉar la serio konverĝas unuforme se $0 < b < 1$, sed estas malpli facile pruvi ke ĝia derivaĵo nenie ekzistas. Tiom pri la rezulto el 1872; nuntempe oni scias ke sufiĉas ke a kaj b estas reelaj nombroj plenumantaj $0 < b < 1$ kaj $ab \geqslant 1$ por ke la sama rezulto validu (Katznelson 1968:106).

Ekzemploj de funkcioj kun du variabloj

Ni transiru al funkcioj kun du variabloj. Tiam ni havas du derivojn, nomatajn *partaj derivoj*, nome derivojn laŭ unu el la variabloj kiam la alia estas fiksa. Se f estas funkcio kun du variabloj x kaj y, tiam ni per $\partial_x f$ aŭ $(\partial/\partial x)f$ notas la derivaĵon de f laŭ x kiam y estas konsiderata kiel konstanto, kaj per $\partial_y f$ aŭ $(\partial/\partial y)f$ la respondan derivaĵon laŭ y. Ni nun povas formi ekzemple $\partial_x\partial_x f$, $\partial_x\partial_y f$ kaj $\partial_y\partial_x f$. Se $f(x,y) = x^p y^q$, tiam

$$\partial_x\partial_x f(x,y) = p(p-1)x^{p-2}y^q \quad \text{kaj} \quad \partial_x\partial_y f(x,y) = \partial_y\partial_x f(x,y) = pqx^{p-1}y^{q-1}.$$

Ni vidas ke la tiel nomata miksita derivaĵo $\partial_x\partial_y f$ estas la sama sendepende de la ordo de apliko de la du operatoroj ∂_x kaj ∂_y. Kaj tiel estas pri multaj funkcioj, fakte pri ĉiuj glataj funkcioj. Sed ni povas facile konstrui funkciojn kiuj ne plenumas tiun regulon. Ni faru tion tuj. Ni difinu $f(0,0) = 0$ kaj

$$f(x,y) = xyg(\theta), \qquad (x,y) \in \mathbf{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\},$$

kie θ estas la angulo difinita module 2π per la rilatoj $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, kie $r = \sqrt{x^2+y^2}$, kaj kie g estas perioda funkcio kun periodo 2π. Se g estas konstanta, tiam f estas polinomo kaj la rilato $\partial_x\partial_y f = \partial_y\partial_x f$ validas ĉie, kiel ni ĵus vidis. Sed se g estas glata funkcio, tiam la rilato ne nepre validas en la origino.

Ni prenu $g(\theta) = \sin^2\theta$, do $f(x,y) = xy^3/r^2$ por $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$. En tiu ekzemplo oni facile kalkulas ke $(\partial_x f)(0,y) = y$, sekve ke $(\partial_y\partial_x f)(0,y) =$

1, dum $(\partial_y f)(x,0) = 0$, sekve $(\partial_x \partial_y f)(x,0) = 0$. La du miksitaj derivaĵoj ekzistas en la origino, sed ili estas malsamaj. Tiu fenomeno estas nedezirinda; oni deziras difini iun objekton $\partial_x \partial_y f$ kiu ne dependas de la ordo de la apliko de la du partaj derivoj, sed ni nun vidis ke tiu dezirinda objekto ne povas esti funkcio. Kia ĝi do povas esti?

Iom pli ĝenerale oni trovas ke $(\partial_x f)(0,y) = yg(\pi/2)$ se $y > 0$, dum $(\partial_x f)(0,y) = yg(3\pi/2)$ se $y < 0$. Sekve $(\partial_y \partial_x f)(0,y) = g(\pi/2)$ se $g(\pi/2) = g(3\pi/2)$ kaj ne ekzistas por $y = 0$ se $g(\pi/2) \neq g(3\pi/2)$. Simile $(\partial_y f)(x,0) = xg(0)$ se $x > 0$, dum $(\partial_y f)(x,0) = xg(\pi)$ se $x < 0$. Sekve $(\partial_x \partial_y f)(x,0) = g(0)$ se $g(0) = g(\pi)$ kaj ne ekzistas por $x = 0$ kiam $g(0) \neq g(\pi)$. Oni do povas facile konstrui funkciojn tiajn ke unu el la miksitaj derivaĵoj ekzistas ĉe la origino dum la alia ne, aŭ ke ambaŭ ekzistas sed havas malsamajn valorojn.

La funkcio f estas glata ekster la origino, sed, krom kiam g konstantas, ne sufiĉe glata en tiu punkto; tamen ĝi ne estas tre malregula tie, ĉar laŭ sia konstruo ĝi estas pozitive homogena de la grado du (tio signifas ke $f(tx,ty) = t^2 f(x,y)$ por ĉiu punkto (x,y) kaj ĉiu pozitiva nombro t). Se g estas perioda kun periodo π, f estas eĉ homogena de grado du (kio signifas ke $f(tx,ty) = t^2 f(x,y)$ por ĉiu punkto (x,y) kaj ĉiu reela nombro t). Ni povas kalkuli ke

$$(\partial_x \partial_y f)(x,y) = g(\theta) - \tfrac{1}{4} g'(\theta) \sin 4\theta - \tfrac{1}{4} g''(\theta) \sin^2 2\theta, \qquad (x,y) \in \mathbf{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}.$$

Tiu formulo montras ke $\partial_x \partial_y f(x,y) = g(\theta)$ kiam $\theta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ (tiam la sinusoj nulas) kaj same kiam θ apartenas al malfermita intervalo kie g konstantas (tiam g' kaj g'' nulas).

Ekzemploj el la teorio pri partaj diferencialaj ekvacioj

Ni konsideru aliajn ekzemplojn, ĉifoje el la teorio de partaj diferencialaj ekvacioj. Ni konsideru unue *la ekvacion de Laplaco*[6] kun du variabloj,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad (x,y) \in \mathbf{R}^2.$$

La solvojn de tiu ekvacio oni nomas *harmoniaj.*[7] Ni supozu ke ni havas tutan vicon da harmoniaj funkcioj, ni diru u_j, $j \in \mathbf{N}$, kaj ke tiu vico konverĝas loke unuforme al iu funkcio u, kio signifas ke, por ĉiu $r > 0$,

$$\sup_{|x|,|y| \leqslant r} |u_j(x,y) - u(x,y)|$$

[6] Pierre Simon Laplace, 1749—1827.

[7] La nomo estas facile klarigebla: la valoroj de tia funkcio en ĉiu punkto egalas al la mezvaloro de la funkcio sur cirklo kun centro en la sama punkto; do metafore la valoroj vivas en harmonio kun la ĉirkaŭantaj valoroj.

strebas nulen kiam j strebas al nefinio. Tiam ankaŭ ĝia limeso $u = \lim_{j\to\infty} u_j$ estas klasika solvo de la ekvacio. Nome, ni havas funkciojn u_j, kiuj estas dufoje kontinue deriveblaj, kaj ankaŭ la limeso estas dufoje kontinue derivebla kaj solvas la ekvacion. Ĝenerale dirite oni scias nur ke unuforma limeso de glataj funkcioj estas kontinua; ĝi ne nepre estas derivebla. Sed por harmoniaj funkcioj do estas tute alie: la glatecon heredas la limeso. Tio signifas ke la distribucioj ne estas ege bezonataj en la kadro de tiu ekvacio; ĝenerale dirite la samo validas kiam temas pri elipsaj ekvacioj, tiuj kiuj havas (samkiel la laplaca) nur analitikajn solvojn.

Ni komparu tiun rezulton kun la situacio de supraĵe rigardate tre simila ekvacio.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

Ĝi nomiĝas *la onda ekvacio.* Ĉiu klasika solvo u de ĝi havas la formon $u(x, y) = f(x - y) + g(x + y)$, kie f kaj g estas funkcioj kun unu variablo. Ni prenu vicojn (f_j) kaj (g_j) de funkcioj kun unu variablo de la klaso C^2 sed tiajn ke ili konverĝas al funkcioj f kaj g kiuj ne ambaŭ estas deriveblaj; ekzemple ni povas elekti funkciojn f_j kaj g_j tiajn ke $f_j(x) = \sqrt{x^2 + j^{-2}}$, $g_j(x) = 0$, $j \in \mathbf{N}^*$. Tiam la limeso de $u_j(x, y) = f_j(x - y) + g_j(x + y)$ kiam j strebas nefinien estas $u(x, y) = |x - y|$, kiu ja ne estas kontinue derivebla, dum ĉiu $u_j(x, y) = f_j(x - y)$ estas klasika solvo. Ni devas konstati ke limeso, eĉ unuforma, de klasikaj solvoj ne ĉiam estas klasika solvo, ĉar la ekvacio ne havas sencon por la limesa funkcio, kontraste al la situacio por la laplaca ekvacio. Ĉio ĉi estas iel nenatura: ni deziras diri tutsimple ke ĉiu loke unuforma limeso de solvoj estas solvo. Sed tiam la derivaĵoj de la limeso ne povas esti funkcioj, kiel ni jam konstatis; senteblas la bezono trovi ĝeneraligitajn funkciojn.

Malfaciloj pri la furiera transformo

La furiera transformaĵo de funkcio f estas la funkcio $\hat{f}$ difinita per la formulo

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot x} \mathrm{d}x, \qquad \xi \in \mathbf{R}^n, \tag{3.4}$$

kondiĉe ke la integraĵo ekzistas. Ĉi tie $\xi \cdot x$ estas la *interna produto* de ξ kaj x:

$$\xi \cdot x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \cdot (x_1, \ldots, x_n) = \xi_1 x_1 + \cdots + \xi_n x_n, \qquad \xi, x \in \mathbf{R}^n.$$

Grava fakto estas ke oni povas (sub taŭgaj hipotezoj) rehavi funkcion de ties furiera transformaĵo – neniu informo estas perdita! Nome, la formulo de inversigo de Furiero diras ke

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} \hat{f}(\xi) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\cdot x} \mathrm{d}\xi, \qquad x \in \mathbf{R}^n, \tag{3.5}$$

se f kaj $\hat{f}$ estas integreblaj. Tiun formulon oni povas ankaŭ skribi $\hat{\hat{f}}(x) = (2\pi)^n f(-x)$. Tamen, se oni scias nur ke f estas integrebla, $\hat{f}$ estas bone difinita kontinua funkcio, sed ne nepre integrebla. Tial la integraĵo en (3.4) ne ĉiam havas sencon. Tiu fakto montras al malfacilo kiam oni studas la furieran transformon de ne tre glata funkcio. Oni deziras vastigi la validon de la formulo (3.5). En la distribucia teorio oni faras tion.

4. Kio estas distribucioj?

Ekzistas pluraj metodoj difini ĝeneraligitajn funkciojn. Unu el tiuj metodoj estas difini funkciojn ne sur punktoj, sed sur aliaj objektoj, kiujn oni povus nomi malakraj punktoj (kontraste al la kutimaj punktoj, kiuj ja havas nenioman etendon kaj tial estas ege akraj). Kaj la ideo ne estas nenatura. Imagu ke ni volas determini iun funkcion, ni diru la rapidon de la vento en punkto (x, y, z, t). Por tion fari ni uzas iun ventumilon kun helico. La helico havas etendon en la spaco, kaj ni devas nombri ĝiajn rivoluojn dum certa tempo. Tio signifas ke ni povas mezuri la rapidon ne en punkto de la tempospaco $\mathbf{R}^4$, sed en certa kvar-dimensia regiono ω de la tempospaco. La rapido de la vento en punkto ne estas mezurebla; ni devas kontentiĝi je ĝia meza valoro, do

$$\int_\omega v(x, y, z, t)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}t \Big/ \int_\omega \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}t.$$

Oni povas diri ke oni ne konas v, sed nur ĝian efikon ĉe la regiono ω. Sed eble la efiko de v ne estas egala en la tuta aro ω. Pli bone estas diri ke oni konas la efikon de v ĉe funkcio φ, do

$$U_v(\varphi) = \int_{\mathbf{R}^4} v(x, y, z, t)\varphi(x, y, z, t)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}t.$$

Tio signifas ke ni traktas ne la punktajn valorojn $v(x, y, z, t)$ sed la efikon de v ĉe φ, kiun ni povas konsideri kiel malakran punkton. Ĉio ĉi estas la baza ideo de la distribucia teorio.

5. Difino de distribucioj

Ni nun evoluigos la ideon de malakraj punktoj. Ni nomos tiujn objektojn testaj funkcioj. La difino estas la jena: se Ω estas malfermita aro en la n-dimensia spaco $\mathbf{R}^n$, funkcio $\varphi\colon \Omega \to \mathbf{C}$ nomiĝas *testa funkcio* se ĝi estas ajnfoje kontinue derivebla, do se ĉiuj ĝiaj derivaĵoj ekzistas kaj estas kontinuaj funkcioj, kaj se krome ĝiaj valoroj estas nul ekster kompakta subaro de la aro Ω (malsamaj kompaktaj aroj por malsamaj funkcioj). Ni notos $\mathscr{E}(\Omega)$ la spacon de ĉiuj ajnfoje deriveblaj funkcioj en Ω, kaj $\mathscr{D}(\Omega)$ la subspacon de tiuj kiuj nulas ekster kompakta subaro de Ω.

Por kontinua funkcio $f\colon \Omega \to \mathbf{C}$ ni difinas ties *subtenanton*, simbole $\operatorname{supp} f$, kiel la fermaĵon de la aro de ĉiuj punktoj kie la funkcio ne nulas; do

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}}, \tag{5.1}$$

kie la superstreko signifas la fermaĵon en Ω. Tio signifas ke $x \in \Omega \smallsetminus \operatorname{supp} f$ se kaj nur se f nulas en ĉirkaŭaĵo de x. La subtenanto de testa funkcio $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ estas kompakta subaro de Ω.

Al donita funkcio $f\colon \Omega \to \mathbf{C}$ ni difinas ties *efikon* $U_f(\varphi)$ ĉe testa funkcio φ tiel:

$$U_f(\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x, \qquad \varphi \in \mathscr{D}(\Omega). \tag{5.2}$$

Por ke la integraĵo havu sencon, ni devas supozi ke f estas loke integrebla. (Aliflanke f ne bezonas esti integrebla en la tuta Ω, ĉar la integrado iras efektive nur laŭ $\operatorname{supp}\varphi$.) Kaj se la efiko de du funkcioj f kaj g estas la sama por ĉiu testa funkcio, tiam f egalas al g krom en nenioma aro.[8] Estas do sufiĉe koni la efikon de f ĉe la testaj funkcioj por koni la tutan funkcion f (krom en iu nenioma aro, kio ne gravas).

Ni notas ke la efiko de f sur la testaj funkcioj estas lineara, kio signifas ke

$$U_f(\varphi_1 + t\varphi_2) = U_f(\varphi_1) + tU_f(\varphi_2), \qquad \varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{D}(\Omega),\ t \in \mathbf{C}. \tag{5.3}$$

Krome ĝi havas iun econ de kontinueco, nome

$$|U_f(\varphi)| \leqslant \sup_{x\in\Omega} |\varphi(x)| \int_K |f|\mathrm{d}x = C \sup_{x\in\Omega} |\varphi(x)| \text{ se } \operatorname{supp}\varphi \subset K. \tag{5.4}$$

Distribucio en malfermita aro $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ estas lineara bildigo $u\colon \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbf{C}$ kiu posedas certan kontinuecon. Tiu lasta eco estas la jena, malpli forta ol (5.4): por ĉiu kompakta subaro K de Ω ekzistas konstantoj C kaj m tiaj ke

$$|u(\varphi)| \leqslant C \sup_{\|k\|_1 \leqslant m} \sup_{x\in\Omega} \left|\partial_x^k \varphi(x)\right|, \qquad \varphi \in \mathscr{D}(\Omega),\ \operatorname{supp}\varphi \subset K. \tag{5.5}$$

Ĉi tie la simbolo ∂_x^k, kie k estas vektoro $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbf{N}^n$, signifas derivon k_1 fojojn laŭ la variablo x_1, k_2 fojojn laŭ x_2 ktp., do

$$\partial_x^k = \partial_{x_1}^{k_1} \partial_{x_2}^{k_2} \cdots \partial_{x_n}^{k_n},$$

[8] Nenioma aro estas aro kies lebega mezuro nulas. (*Lebego* estas la esperantigita nomo de Henri Léon Lebesgue, 1875—1941, la fondinto de la moderna teorio pri integro.) Oni ankaŭ diras ke f egalas al g preskaŭ ĉie.

kaj $\|k\|_1$ estas la l^1-normo de k; en tiu ĉi kazo simple la sumo $k_1 + \cdots + k_n$, alinome la ordo de la derivaĵo. La formulo (5.4) estas speciala kazo de (5.5), nome kiam $m = 0$.

La spacon de ĉiuj distribucioj en Ω oni notas $\mathscr{D}'(\Omega)$. Oni difinas la *subtenanton* de u, $\operatorname{supp} u$, kiel la komplementon en Ω de la aro de ĉiuj punktoj en kies ĉirkaŭaĵo u nulas, t.e. tiaj ke $u(\varphi) = 0$ por ĉiuj φ kun subtenanto en sufiĉe malgranda ĉirkaŭaĵo de x. Se f estas kontinua funkcio, tiam ĝia subtenanto difinita laŭ (5.1) egalas al la subtenanto de la distribucio U_f.

Ni jam vidis ke U_f estas distribucio se f estas loke integrebla funkcio. Alia simpla distribucio estas *la mezuro de Dirako metita en punkto* $a \in \Omega$, δ_a, kies difino estas

$$\delta_a(\varphi) = \varphi(a), \qquad \varphi \in \mathscr{D}(\Omega). \tag{5.6}$$

Estas facile vidi ke ĝi estas distribucio: la neegalaĵo (5.5) validas kun $C = 1$ kaj $m = 0$. Ĝi ne estas de la formo U_f por iu funkcio f. Ĝia subtenanto estas $\{a\}$. Kutime oni skribas nur δ por δ_0 kiam $a = 0 \in \Omega$. Ĝi estas distribucio kaj mezuro sed ne funkcio. Oni nomis ĝin pro Dirako (Paul Adrien Maurice Dirac, 1902—1984).

La ideo nun estas priskribi kiel derivo, multipliko kaj aliaj operacioj influas la efikon de funkcio sur testa funkcio. Poste ni prenos tion kiel modelon por la difino de la operacio sur distribucioj.

Ni komence rigardu kiel la derivaĵo f' de kontinue derivebla funkcio f kun unu variablo efikas sur testan funkcion $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$:

$$U_{f'}(\varphi) = \int_{\mathbf{R}} f'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

se $-a$ kaj b estas sufiĉe grandaj, pli precize tiom grandaj ke $\varphi(x)$ nulas kiam $x \notin [a, b]$. Danke al la formulo de poparta integro la lasta integraĵo egalas al

$$f(b)\varphi(b) - f(a)\varphi(a) - \int_a^b f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x,$$

kaj la lasta integraĵo egalas al

$$-\int_{\mathbf{R}} f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = -U_f(\varphi')$$

danke al la fakto ke $\varphi(x)$ nulas se $x \leqslant a$ aŭ $x \geqslant b$.

Pro la ĵus montrita ekvacio $U_{f'}(\varphi) = -U_f(\varphi')$, $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$, estas tute nature difini la derivaĵon de ajna distribucio $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbf{R}$, per la formulo

$$u'(\varphi) = -u(\varphi'), \qquad \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Pli ĝenerale, se ni estas en la spaco de n variabloj, ni difinas $\partial_{x_j} u$ per la formulo $(\partial_{x_j} u)(\varphi) = -u(\partial_{x_j}\varphi)$, $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, kaj por pli alta ordo

$$(\partial_x^s u)(\varphi) = (-1)^{\|s\|_1} u(\partial_x^s \varphi), \qquad s \in \mathbf{N}^n, \ \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Estas facile vidi ke ankaŭ la derivaĵo $\partial_x^s u$ de u estas distribucio: kaj la lineareco, kaj la kontinueco (5.5) estas facile pruveblaj; oni devas anstataŭigi la konstanton m per $m + \|s\|_1$.

La derivaĵoj de la mezuroj de Dirako estas

$$(\partial^s \delta_a)(\varphi) = (-1)^{\|s\|_1}(\partial^s \varphi)(a), \qquad s \in \mathbf{N}^n, \ \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Se $n = 1$ ni havas la funkcion de Hevisido, $H(x) = 1$ kiam $x \geqslant 0$ kaj $H(x) = 0$ kiam $x < 0$, nomata tiel pro Hevisido (Oliver Heaviside, 1850—1925). Ĝia derivaĵo kiel distribucio estas

$$H'(\varphi) = -H(\varphi') = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\mathrm{d}x = \varphi(0) = \delta(\varphi), \qquad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}),$$

kio signifas ke $H' = \delta$, aŭ pli precize, ke $(U_H)' = \delta$. Tiu rezulto do tute rigore validigas intuician ideon ke la derivaĵo de H estas nefinia en la origino, sed ĝuste tiom granda ke ĝia integraĵo estas 1. La funkcio $V(x) = |x|$ havas la derivaĵon $V' = 2H - 1$ kaj la duan derivaĵon $V'' = 2\delta$; pli precize oni ja devas diri ke la derivaĵo de U_V estas $(U_V)' = U_{2H-1}$ kaj ke ĝia dua derivaĵo estas $(U_V)'' = 2\delta$.

Kion do pri la funkcio W de Weierstrass, difinita per la serio (3.3)? Ĉu ankaŭ ĝi havas derivaĵon kiel distribucio? Jes, ja. La derivaĵo de la distribucio U_W estas donita per la kutima formulo

$$(U_W)'(\varphi) = -U_W(\varphi') = -\int_{\mathbf{R}} W(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x, \qquad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}).$$

Tamen tio ne kontraŭdiras al la fakto ke la popunkta derivaĵo de W ne ekzistas. La serio kiun oni ekhavas per poterma derivo de la serio difinanta W konverĝas en la senco ke, por ĉiu testa funkcio φ, la serio

$$-\sum_{k=0}^{\infty} b^k \int_{\mathbf{R}} \varphi'(x) \cos a^k \pi x \, \mathrm{d}x = -\pi \sum_{k=0}^{\infty} (ab)^k \int_{\mathbf{R}} \varphi(x) \sin a^k \pi x \, \mathrm{d}x$$

konverĝas. Tiel estas, ĉar la nombroj $\int_{\mathbf{R}} \varphi(x) \sin a^k \pi x \, \mathrm{d}x$, $k \in \mathbf{N}$, rapide malkreskas.

Estas evidente kiel difini la produton de nombro kaj distribucio; ni difinas au, kiam u estas distribucio kaj a konstanto, per

$$(au)(\varphi) = au(\varphi) = u(a\varphi), \qquad \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Analoge ni difinas la sumon de du distribucioj u kaj v per

$$(u+v)(\varphi) = u(\varphi) + v(\varphi), \qquad \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Tio estas ja motivita per la formulo $U_{f+g} = U_f + U_g$ por la efikoj de du funkcioj.

Ni nun rigardu kiel difini la produton de glata funkcio g kaj distribucio u. Por la efiko de funkcio f ni ja havas $U_{gf}(\varphi) = U_f(g\varphi)$. Tial estas nature difini

$$(gu)(\varphi) = u(g\varphi), \qquad \varphi \in \mathscr{D}(\Omega). \tag{5.7}$$

Notu tamen ke, kvankam la formulo pri efiko de produto, $U_{gf}(\varphi) = U_f(g\varphi)$, havas bonan sencon se g estas nur kontinua, la formulo $(gu)(\varphi) = u(g\varphi)$ havas sencon nur kiam g estas glata, $g \in \mathscr{E}(\Omega)$. Se g estas nur kontinua, ni falas en grandajn malfacilojn; kp. sekcion 9.

6. La furiera transformo

La furieran transformaĵon de funkcio f ni difinis en sekcio 3 per formulo (3.3). Konata formulo por tiu transformaĵo estas

$$\int_{\mathbf{R}^n} \hat{f}(\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\hat{\varphi}(x)\mathrm{d}x,$$

kie f kaj φ estas du integreblaj funkcioj. Oni povas skribi tion

$$U_{\hat{f}}(\varphi) = U_f(\hat{\varphi}).$$

Kaj ekde tiu formulo estas nature provi difini la transformaĵon de distribucio u per

$$\hat{u}(\varphi) = u(\hat{\varphi}), \qquad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n). \tag{6.1}$$

Sed nun ni stumblas sur problemon, ĉar se $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$, tiam oni ne havas $\hat{\varphi} \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$, krom en la neinteresa kazo ke φ egalas al nulo. Schwartz solvis tiun malfacilon per difino de iom pli vasta spaco, kiu enhavas kaj ĉiun testan funkcion, kaj la furieran transformaĵon de ciu testa funkcio. Li nomis tiun spacon $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$. Sed, ĉar tiu spaco estas pli granda ol $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$, ne ĉiu distribucio povas labori ĉe ĝi. Efektive $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ enhavas ne nur la testajn funkciojn el $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ sed ankaŭ ties furierajn transformaĵojn, kiuj ĝenerale dirite ne havas kompaktan subtenanton. Li devis do difini pli malvastan spacon de distribucioj, nomatan $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$, tian ke $u(\varphi)$ estas difinita se $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$. Por tiaj distribucioj, nomataj *temperaj distribucioj* ĉar ili ne povas ajne rapide kreski en certa senco, la formulo (6.1) havas sencon kaj difinas la furieran transformaĵon $\hat{u}$ de u.

Grava fakto estas ke oni povas rehavi funkcion de ties furiera transformaĵo; ni notis tion jam en sekcio 3. Sed la formulo de inversigo de Furiero (3.4) ne ĉiam validas por integreblaj funkcioj f. Por distribucioj la formulo (3.4) validas danke al la formulo (6.1):

$$\hat{\hat{u}}(\varphi) = \hat{u}(\hat{\varphi}) = u\left(\hat{\hat{\varphi}}\right) = (2\pi)^n u(\check{\varphi}) = (2\pi)^n \check{u}(\varphi), \qquad \varphi \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n),$$

kie $\check{\varphi}$ signifas la *reflektaĵon* de φ, difinitan per $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$, kaj $\check{u}$, la *reflektaĵo* de u, estas difinita per $\check{u}(\varphi) = u(\check{\varphi})$. La formulo $\hat{\hat{\varphi}} = (2\pi)^n\check{\varphi}$ validas ĉar φ estas glata kaj rapide malkreskanta. La situacio nun estas tute simetria kaj multe pli bona ol por funkcioj. Oni povas pruvi ke $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ se kaj nur se $\hat{\varphi} \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$. El tio sekvas ke $u \in \mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$ se kaj nur se $\hat{u} \in \mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$. Regas plena simetrio inter u kaj $\hat{u}$.

Ni notu ke, sekve de la difino (6.1), ni havas $\hat{\delta} = U_1 = 1$ (ni notas la distribucion U_1 simple 1). El tio ni konkludas, uzante la formulon de inversigo, ke $\hat{U}_1 = \hat{1} = \hat{\hat{\delta}} = (2\pi)^n\check{\delta} = (2\pi)^n\delta$.

7. Kunfaldo

La kunfaldo estas grava operacio kaj por funkcioj kaj por distribucioj. Se ni havas du funkciojn $f, g\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ ni difinas ilian *kunfaldaĵon* $h = f * g$ per la formulo

$$h(x) = (f * g)(x) = \int_{\mathbf{R}^n} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y, \qquad x \in \mathbf{R}^n, \tag{7.1}$$

kondiĉe ke la integraĵo havas bonan sencon.[9] Tiel estas ekzemple se f kaj g estas kontinuaj kaj unu el ili nulas ekster barita aro. Se krome ili estas kontinue deriveblaj, same estas pri $f * g$, kaj ties derivaĵon oni kalkulas laŭ la regulo

$$\partial_{x_j}(f * g) = (\partial_{x_j} f) * g = f * (\partial_{x_j} g). \tag{7.2}$$

Oni komparu ĝin kun la iom malpli simpla regulo de Lejbnico[10] por produto,

$$\partial_{x_j}(fg) = (\partial_{x_j} f)g + f(\partial_{x_j} g).$$

Ni notas ke

$$U_{f*g}(\varphi) = U_f\big(x \mapsto U_g(y \mapsto \varphi(x+y))\big).$$

[9]Por memori la formulon ni povas noti ke la integraĵo enhavas ĉiujn argumentojn de f kaj g tiajn ke ilia sumo egalas al la argumento de h.
[10]Gottfired Wilhelm von Leibniz, 1646—1716.

Tiu formulo gvidas nin, kaj ni difinas, se u kaj v estas du distribucioj kaj v havas kompaktan subtenanton,

$$(u * v)(\varphi) = u\bigl(x \mapsto v(y \mapsto \varphi(x+y))\bigr), \qquad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n). \tag{7.3}$$

Tio signifas ke ni havas funkcion $\psi(x) = v(y \mapsto \varphi(x+y))$ kiu estas glata, kaj ĝiaj derivaĵoj estas donitaj per la formulo $\partial_{x_j}\psi(x) = v(y \mapsto \partial_{x_j}\varphi(x+y))$. Se krome v havas kompaktan subtenanton, ψ eĉ estas testa funkcio. Do u povas efiki ĉe ĝi: $u(\psi)$ estas bone difinita kaj donas la valoron de $(u*v)(\varphi)$. Se u havas kompaktan subtenanton $u(\psi)$ estas bone difinita eĉ se v ne havas kompaktan subtenanton. En ambaŭ kazoj oni povas pruvi ke $\operatorname{supp}(u * v)$ estas subaro de $\operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v = \{x + y; x \in \operatorname{supp} u, y \in \operatorname{supp} v\}$.

Se unu el la faktoroj u kaj v havas kompaktan subtenanton, ilia kunfaldaĵo $u * v$ estas do bone difinebla. Sed ekzistas aliaj, iom pli ĝeneralaj, situacioj kie oni povas bone difini la kunfaldaĵon.

La formulo (7.2) validas por distribucioj; do

$$\partial_{x_j}(u * v) = (\partial_{x_j} u) * v = u * (\partial_{x_j} v), \tag{7.4}$$

kondiĉe ke unu el ili havas kompaktan subtenanton.

La kunfaldo gravas en la teorio pri partaj diferencialaj ekvacioj. Ni konsideru diferencialan operatoron $P(\partial)$ kun konstantaj koeficientoj $a_k \in \mathbf{C}$, t.e.

$$P(\partial) = \sum_{\|k\|_1 \leqslant m} a_k \partial^k.$$

Oni facile vidas ke $\delta * u = u$ por ĉiu $u \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ kaj ke $\bigl(\partial_x^k \delta\bigr) * u = \delta * \partial_x^k u = \partial_x^k u$. Tio montras ke ĉiu diferenciala operatoro kun konstantaj koeficientoj estas operatoro de kunfaldo, $P(\partial)u = \bigl(P(\partial)\delta\bigr) * u$.

Distribucio E kiu plenumas $P(\partial)E = \delta$ estas nomata *fundamenta solvo* de la operatoro $P(\partial)$. Per ĝi oni povas solvi multajn ekvaciojn: se $u = E * f$, tiam $P(\partial)u = P(\partial)(E * f) = (P(\partial)E) * f = \delta * f = f$, t.e. u estas solvo de la ekvacio $P(\partial)u = f$, kondiĉe kompreneble ke la kunfaldaĵo $E * f$ havas bonan sencon kaj ke la regulo (7.4) validas. Kaj tiel estas se f havas kompaktan subtenanton sed ankaŭ en aliaj gravaj kazoj.

Laŭ fama teoremo de Leon Ehrenpreis kaj Bernard Malgrange ĉiu lineara parta diferenciala operatoro kun konstantaj koeficientoj krom la nula operatoro havas fundamentan solvon. Tamen tiu ĉi ofte ne estas de la formo U_f por iu funkcio f, sed pli ĝenerala distribucio. Tio denove montras la neceson eliri el la kadro de la funkcioj. Samtempe tiu observo montras la gravon de la kunfaldo de distribucioj, ne nur de funkcioj.

Ekzistas tre grava rilato inter la kunfaldo kaj la furiera transformo. Nome, oni povas facile pruvi ke la furiera transformaĵo de kunfaldaĵo $f * g$ estas la produto $\hat f\hat g$, sub taŭgaj hipotezoj, komprenebl; do $\widehat{f*g} = \hat f\hat g$. Tiu observo kondukas al multaj rezultoj.

Laŭ (7.2) validas $f' * g = f * g'$ se $f, g \in C^1(\mathbf{R})$ kaj f aŭ g nulas ekster barita aro. Tial oni povus imagi ke $f' * g = f * g'$ ankaŭ se $f, g \in C^1(\mathbf{R})$ kaj f' kaj g' nulas ekster barita aro – tiam ja la du kunfaldaĵoj estas bone difinitaj. Sed ili ne nepre estas egalaj. Ekzemple, se $G\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ estas glata kaj tia ke $G(x) = 0$ kiam $x \leqslant 0$ kaj $G(x) = 1$ kiam $x \geqslant 1$, tiam, kun $f = 1$ kaj $g = G$,

$$f' * g = 1' * G = 0 * G = 0, \text{ dum } f * g' = 1 * G' = \int_{\mathbf{R}} G'(x)\mathrm{d}x = 1. \tag{7.5}$$

Se $1 * G$ havus bonan sencon, tiam laŭ la formulo (7.2) oni ja havus $(1 * G)' = 1' * G = 1 * G'$, do kontraŭdiro al (7.5). Sed $1 * G$ ne havas bonan sencon. Estas fakte neeble difini la kunfaldaĵon $1 * G$; pro tio ne estas kontraŭdiro. (Se ni supozas ke G estas pozitiveda kaj difinas $G_j(x) = G(x)G(j - x)$, tiam $1 * G_j = \int_{\mathbf{R}} G_j(x)\mathrm{d}x \geqslant j - 2$ estas bone difinita. Sed G_j kreskas al G kaj $1 * G_j$ kreskas al $+\infty$; sekve la sola ebla difino de $1 * G$ estas $+\infty$.)

Ni iom pli detale rigardu la funkcion G de la antaŭa alineo. Tiam $1 * G'$ kaj $1 * G''$ havas bonan sencon kaj $1 * G' = \int_{\mathbf{R}} G'(x)\mathrm{d}x = 1$, dum $1 * G'' = \int_{\mathbf{R}} G''(x)\mathrm{d}x = 0$. Ni povas rekte pruvi ke

$$1 * (G' * G') = \int_{\mathbf{R}} G'(x)\mathrm{d}x \int_{\mathbf{R}} G'(y)\mathrm{d}y = 1.$$

Ni nun vidas ke

$$(1 * G'') * G = 0 * G = 0, \text{ dum } 1 * (G'' * G) = 1 * (G' * G') = 1. \tag{7.6}$$

Notu ke ni ĉi tie kalkulas nur pri kunfaldaĵoj kie unu el la du faktoroj nulas ekster barita intervalo. Sed ni vidas ke la asocieca leĝo ne validas: $(1*G'')*G \neq 1 * (G'' * G)$. La neeblo difini $1 * G$ detruas la asociecan leĝon, kvankam tiu kunfaldaĵo ne eksplice aperas en la kalkulo. Ni do lernis ke ne eblas difini kunfaldaĵon de du kontinuaj funkcioj sen iu kondiĉo pri ilia kresko.

Estas same neeble difini la kunfaldaĵon ĝenerale inter distribucioj. La malnova ekzemplo (7.6) ja validas, sed ni povas simpligi ĝin nun, anstataŭigante G per la hevisida funkcio H, kies derivaĵo estas la diraka mezuro δ. Ni havas do

$$(1 * \delta') * H = 0 * H = 0, \text{ dum } 1 * (\delta' * H) = 1 * (\delta * H') = 1 * \delta = 1. \tag{7.7}$$

Ĉi tie ni uzas ke $1 * \delta' = 1' * \delta = 0 * \delta$. La neeblo difini la kunfaldaĵon $1 * H$ detruas la asociecan leĝon.

8. Divido de distribucioj

Ni vidis kiel oni povas multipliki distribucion per glata funkcio. Ĉu oni povas ankaŭ dividi distribucion per glata funkcio? Alivorte, se u estas donita distribucio kaj f donita glata funkcio, ĉu ekzistas distribucio v tia ke $fv = u$? Se f nenie nulas, estas simple: la funkcio $1/f$ estas glata kaj multipliko per ĝi donas la rezulton, $v = (1/f)u$ estas la sola solvo de la ekvacio $fv = u$.

Sed se f nulas en unu punkto a, tiam la solvo ne povas esti unika, ĉar al ĉiu solvo oni povas aldoni oblon de la diraka mezuro en a; ni ja scias ke $f\delta_a = 0$ se f nulas en a (vidu difinojn (5.6) kaj (5.7)).

Ĉu entute ekzistas solvo? Ni pruvu ke oni povas dividi per la funkcio $f(x) = x$, $x \in \mathbf{R}$, kiun ni notos simple x. La demando do estas ĉu ekzistas distribucio v tia ke $xv = u$. Ni respondu al tiu demando en la speciala kazo $u = 1$ (pli precize $u = U_1$).

Ni difinu funkcion $g(x) = x \log|x|$, $x \in \mathbf{R} \smallsetminus \{0\}$, $g(0) = 0$. Ĝi estas kontinua sur la tuta reela akso $\mathbf{R}$. Ĝia popunkta derivaĵo estas $g'(x) = 1 + \log|x|$ en ĉiu nenula punkto x. Tiu ĉi funkcio estas loke integrebla funkcio, kaj do difinas distribucion $U_{g'} \in \mathscr{D}'(\mathbf{R})$. Se ni skribas $v = U_g$, tiam $v' = U_{g'}$, t.e. la derivaĵo de v en la distribucia senco egalas al la efiko de la funkcio g', la popunkta derivaĵo de la funkcio g. Tiu regulo ja validas se $g \in C^1(\mathbf{R})$, sed ĝi fakte validas ankaŭ en la nuna kazo, kvankam $g'(0)$ ne ekzistas.

Kion pri la dua derivaĵo v''? Ĝi ja ekzistas kiel distribucio (kaj egalas al la derivaĵo de $U_{g'}$), kaj ni scias ke

$$v''(\varphi) = -\int_{\mathbf{R}} g'\varphi' \mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} g\varphi'' \mathrm{d}x, \qquad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}).$$

Ekster la origino ni ja havas $g''(x) = 1/x$, kiu estas glata funkcio tie, sed tiu funkcio ne estas integrebla en ĉirkaŭaĵo de la origino. Ĝi ne povas elemente difini distribucion; la efiko $U_{g''}$ ne estas difinita. Tamen v'' ekzistas kiel distribucio.

Ni notu ke la formulo $g'(x) = 1 + \log|x|$ implicas ke $xv' = x + v$, kiun ni derivas al $(xv')' = 1 + v'$. Sed la regulo de Lejbnico montras ke $(xv')' = xv'' + v'$. Ni do havas $xv'' + v' = 1 + v'$, sekve $xv'' = 1$.

Ni do scias ke la distribucio $v'' = (U_g)''$ solvas la ekvacion $xv'' = 1$. Aliaj solvoj estas $v'' + c\delta$, kie c estas ajna konstanto. Ni ankaŭ scias ke tiu distribucio egalas al la funkcio $1/x$ ekster la origino, sed ni ne havas esprimon por ĝi ĉe la orgino.

Por trovi tian esprimon, ni uzu la formulon

$$v''(\varphi) = -\int_{\mathbf{R}} g'\varphi' \mathrm{d}x.$$

Ĉar g' estas loke integrebla, ni scias ke

$$v''(\varphi) = -\lim_{\eta\to 0+}\int_{-\infty}^{-\eta}(1+\log|x|)\varphi'(x)\mathrm{d}x - \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\varepsilon}^{+\infty}(1+\log|x|)\varphi'(x)\mathrm{d}x.$$

La integraĵon

$$-\int_{\varepsilon}^{+\infty}(1+\log|x|)\varphi'(x)\mathrm{d}x$$

oni povas facile kalkuli kiel

$$-\Big[(1+\log|x|)\varphi(x)\Big]_{\varepsilon}^{+\infty}+\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x = (1+\log\varepsilon)\varphi(\varepsilon)+\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x. \tag{8.1}$$

Same ni trovas ke $-\int_{-\infty}^{-\eta}(1+\log|x|)\varphi'(x)\mathrm{d}x$ egalas al

$$-(1+\log\eta)\varphi(-\eta)+\int_{-\infty}^{-\eta}\frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x. \tag{8.2}$$

Se ni adicias la du esprimojn (8.1) kaj (8.2), ni ricevas

$$v''(\varphi) = \lim_{\varepsilon,\eta\to 0+}\left[\varphi(\varepsilon)\log\varepsilon - \varphi(-\eta)\log\eta + \int_{\complement[-\eta,\varepsilon]}\frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x\right].$$

(Ĉi tie $\complement[-\eta,\varepsilon]$ estas la komplemento de la intervalo $[-\eta,\varepsilon]$, do $\mathbf{R}\smallsetminus[-\eta,\varepsilon]$.) Sekve ekzistas ankaŭ la limeso kiam $\eta=\varepsilon$. Tiam la esprimo

$$\varphi(\varepsilon)\log\varepsilon - \varphi(-\eta)\log\eta$$

egalas al $\big(\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon)\big)\log\varepsilon$. Ni scias ke, kiam $\varepsilon\to 0$, $\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon)$ strebas al nulo tiom rapide ke la logaritmo ne povas malhelpi ke ankaŭ la produto

$$\big(\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon)\big)\log\varepsilon$$

strebas nulen. Tial ni havas

$$v''(\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x. \tag{8.3}$$

Ni jam pruvis ke la limeso ekzistas, sed estas facile rekte vidi tion per alia esprimo. Al donita testa funkcio φ ni prenu pozitivan nombron a tiom grandan ke $\varphi(x)$ nulas kiam $|x|\geqslant a$. Tiam

$$\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x = \int_{\varepsilon<|x|<a}\frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x = \int_{\varepsilon<|x|<a}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\mathrm{d}x,$$

kie la lasta egalaĵo devenas de la fakto ke la funkcio $\varphi(0)/x$ estas nepara kaj tial havas nulan integraĵon sur la simetria aro $]-a, a[\setminus [-\varepsilon, \varepsilon]$. Kaj nun la limeso kiam ε strebas nulen evidente ekzistas; ni povas skribi

$$v''(\varphi) = \int_{-a}^{a} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \mathrm{d}x,$$

kie la integraĵo estas bone difinita, ĉar $\big(\varphi(x) - \varphi(0)\big)/x$ estas integrebla ĉe la origino (fakte la integrato estas kontinua ĉie se oni difinas ĝin kiel $\varphi'(0)$ ĉe la origino). La lasta formulo havas do elementan signifon, sed ni memoru ke la nombro a dependas de la testa funkcio φ.

Ni nun donas nomon al la trovita distribucio v''. Ni nomas ĝin la *precipa valoro* (aŭ *valoro precipa*) de $\frac{1}{x}$, simbole $v'' = \mathsf{vp}\frac{1}{x}$. Tiu esprimo devenas de la studo de integraĵo

$$\int_{\complement[-\eta,\varepsilon]} f(x)\mathrm{d}x,$$

kiu povas malhavi limeson kiam η kaj ε strebas nulen nedepende unu de la alia, sed kiu tamen povas havi limeson kiam η egalas al ε kaj strebas nulen. Tiel ja estas pri la integraĵo en (8.3). Se ni forprenas nesimetrian intervalon $[-\eta, \varepsilon]$, la limeso de integraĵo povas ne ekzisti, dum ĝi jes ja povas ekzisti se ni forprenas simetrian intervalon $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Tian limeson oni nomas la *precipa valoro de Koŝio* de la integraĵo (nomata tiel pro Koŝio, Augustin Louis Cauchy, 1789—1857.)

Kion pri la derivaĵo de v'', la tria derivaĵo de v? Ĝi ja ekzistas kiel distribucio. Laŭ Lejbnico ĝi plenumas $xv''' = -\mathsf{vp}\frac{1}{x}$, ĉar $xv'' = 1$ implicas $(xv'')' = xv''' + v'' = 0$. El tio sekvas ke $-x^2 v''' = 1$; ni povas do dividi 1 per x^2. Ni nomos la distribucion $-v'''$ la *pseŭdofunkcio* $1/x^2$, simbole $\mathsf{pf}\frac{1}{x^2}$. Ni do scias ke ĝi egalas al $-\big(\mathsf{vp}\frac{1}{x}\big)'$, sed kiel esprimi ĝin? Validas $-v'''(\varphi) = v''(\varphi')$, kiu egalas al

$$\int_{-a}^{a} \frac{\varphi'(x) - \varphi'(0)}{x} \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{\varepsilon < |x| < a} \frac{\varphi(x) - \varphi'(0)x}{x^2} \mathrm{d}x - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon} \right].$$

Ĉi tie la lasta egalaĵo rezultas el poparta integro. Subtrahinte kaj adiciinte $\varphi(0)x^{-2}$ al la integrata funkcio ni povas skribi la lastan esprimon tiel:

$$\int_{|x|<a} \frac{\varphi(x) - \varphi'(0)x - \varphi(0)}{x^2} \mathrm{d}x - \frac{2\varphi(0)}{a}, \tag{8.4}$$

ĉar

$$\int_{\varepsilon < |x| < a} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{2}{\varepsilon} - \frac{2}{a}.$$

Ni notas ke

$$\int_{\varepsilon<|x|<a} \frac{\varphi(x)}{x^2} \mathrm{d}x = \int_{\varepsilon<|x|<a} \frac{\varphi(x) - \varphi'(0)x - \varphi(0)}{x^2} \mathrm{d}x - \frac{2\varphi(0)}{a} + \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon}.$$

Ĉi tie la lasta termo strebas al nefinio kiam ε strebas nulen (krom se $\varphi(0) = 0$). La du aliaj termoj havas finian limeson (8.4) kiam $\varepsilon \to 0$. Oni nomas la esprimon (8.4) la *finia parto* de la integraĵo $\int_{|x|<a} \varphi(x)x^{-2}\mathrm{d}x$. Ĝi ne dependas de a se a estas tiom granda ke $\operatorname{supp}\varphi \subset [-a, a]$. Kaj oni mallongigas la esprimon *parto finia* al pf (france *partie finie*). Ĝin enkondukis Jacques Hadamard (1865—1963) en 1903 kaj samjare kaj nedepende Robert d'Adhémar (Maz′ya kaj Shaposhnikova 1998:477, 2005:422). Sed jam en 1826 Koŝio konsideris "intégrales extraordinaires" (eksterordinarajn integraĵojn), kiuj estas ekvivalentaj al la partoj finiaj de diverĝentaj integraĵoj (Maz′ya kaj Shaposhnikova 1998:478, 2005:423). Ni do povas skribi

$$\left(\mathsf{pf}\frac{1}{x^2}\right)(\varphi) = \mathsf{pf}\int_{|x|<a} \frac{\varphi(x)}{x^2}\mathrm{d}x,$$

kie la unua pf pronconiĝas "pseŭdofunkcio", la dua "parto finia" – vortludo de Laurent Schwartz. Oni nun povas strebigi a al nefinio sen problemo, se φ estas testa funkcio.

Oni ankaŭ uzas la simbolon pf en la kazo de $1/x$, do

$$\left(\mathsf{pf}\frac{1}{x}\right)(\varphi) = \mathsf{vp}\int_{\mathbf{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x,$$

sed, ĉar la pli elementa valoro precipa ekzistas en tiu kazo, ĝi ne estas same necesa kiel por $1/x^2$.

9. Maleblo multipliki distribuciojn

Ni rigardu la sekvajn formulojn:

$$(\delta x)v'' = 0 \cdot v'' = 0; \quad \delta(xv'') = \delta \cdot 1 = \delta,$$

kie $v = U_g$ estas la distribucio difinita de la funkcio $g(x) = x\log|x|$; kp. sekcion 8. En tiuj du formuloj oni uzas multiplikon inter glataj funkcioj (x, 0 kaj 1) kaj distribucioj (δ kaj v''). Ni ja lernis ke tia multipliko estas permesita kaj donas bone difinitajn distribuciojn. Sed la du formuloj montras ke oni ne povas difini asociecan multiplikon inter tiuj objektoj. (Notu ke la produto $\delta v''$, kiun ni ne difinis, ne aperas en la formuloj.)

Tiu ekzemplo, kiu estis publikigita de Schwartz en (1954), montras tre konvinke ke ne ekzistas asocieca multipliko de distribucioj. Ĝi estas tute analoga al la ekzemploj (7.6) kaj (7.7) pri la neeblo difini asociecan kunfaldon. Kaj ne surprize: kunfaldo kaj multipliko ja respondas unu al la alia sub la furiera transformo.

10. Aliaj difinoj de distribucioj

Ekzistas alternativa vojo al la distribucioj ellaborita de Mikusiński (1948) kaj Temple (1955), kaj prezentita en la lernolibroj de Lighthill (1958) kaj Antosik k.a. (1973). Oni povas pruvi ke al ĉiu distribucio u en malfermita aro Ω ekzistas vico $(f_j)_{j\in\mathbf{N}}$ de kontinuaj funkcioj tia ke f_j konverĝas al u en la senco ke, por ĉiu $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$,

$$U_{f_j}(\varphi) \to u(\varphi) \text{ kiam } j \to +\infty.$$

Ni do povas konsideri distribucion kiel limeson de vico de kontinuaj, aŭ eĉ glataj, funkcioj. Kaj tiu estas la elirpunkto por la vica aliro al la teorio. Ni konsideras vicojn $(f_j)_{j\in\mathbf{N}}$ de glataj funkcioj kaj diras ke ĝi estas *koŝia vico* se la nombrovalora vico $(U_{f_j}(\varphi))_{j\in\mathbf{N}}$ estas koŝia vico por ĉiu testa funkcio φ. La lasta signifas ke, por ĉiu testa funkcio φ kaj ĉiu $\varepsilon > 0$, ekzistas indekso m tia ke $|U_{f_j}(\varphi) - U_{f_k}(\varphi)| \leqslant \varepsilon$ kiam $j, k \geqslant m$. Poste ni identigas du koŝiajn vicojn $(f_j)_{j\in\mathbf{N}}$ kaj $(g_j)_{j\in\mathbf{N}}$ se la miksita vico $(f_0, g_0, f_1, g_1, f_2, g_2, \dots)$ estas koŝia vico. La procedo estas tute analoga al la konstruo de la reelaj nombroj ekde la racionalaj. La distribucioj do estas la ekvivalentoklasoj de tiuj vicoj. Derivaĵo $\partial_{x_k} u$ de distribucio estas reprezentita de vico $(\partial_{x_k} f_j)_{j\in\mathbf{N}}$, kaj simile pri la aliaj operacioj sur distribucioj.

La teorio fondita sur tiuj vicoj de glataj funkcioj estas tute egalvalora al tiu de Schwartz.

11. Aliaj ĝeneraligitaj funkcioj

Ekzistas variaĵoj de la distribucioj. Ni jam vidis ke oni povas uzi kiel testajn funkciojn ne nur $\mathscr{D}(\Omega)$ sed ankaŭ la spacon $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ de Schwartz. Kaj ekzistas multaj tiaj spacoj. La verko de Gel′fand kaj Ŝilov (1953) donas multajn ekzemplojn de tiaj spacoj, ofte pli malgrandaj ol $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$, kiuj do permesas pli grandajn spacojn de linearaj funkcionaloj, t.e. pli grandajn spacojn de distribucioj. Gel′fand kaj Ŝilov ĝenerale dirite ne postulas ke la spaco Φ de testaj funkcioj plenumu $\varphi \in \Phi$ se kaj nur se $\hat{\varphi} \in \Phi$. Se u estas funkcionalo sur spaco Φ de testaj funkcioj, tiam ĝia furiera transformaĵo $\hat{u}$ estas (ĉiam laŭ la formulo (6.1)) funkcionalo sur la spaco $\hat{\Phi} = \{\hat{\varphi}; \varphi \in \Phi\}$, do eventuale sur alia spaco ol Φ. Sed McKennon (1976) konstruis spacon tian ke $\hat{\Phi} = \Phi$, same kiel la Schwartz-a spaco $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$.

Carleman (1944) difinis la furieran transformon por funkcioj kiuj estas ĉerandaj valoroj de holomorfaj funkcioj. Li do iel antaŭvidis la enkondukon de la hiperfunkcioj de Mikio Sato (1958a, b, c, 1959, 1960). La hiperfunkcioj en unu variablo estas la diferenco inter la ĉerandaj valoroj de holomorfa funkcio de supre kaj de malsupre.

Ni vidu la plej simplan ekzemplon de tiaj ĉerandaj valoroj, nome la formulo de Plemelj, aŭ Sohockij–Plemelj. Ni difinu $g_y(x) = 1/(x + iy)$ kiel funkcion kun unu reela variablo x, kaj kun parametro $y \neq 0$. Oni povas montri ke la distribucio U_{g_y} konverĝas al distribucio $u_{0+} = \mathsf{vp}\left(\frac{1}{x}\right) - i\pi\delta$ kiam $y > 0$, $y \to 0$. Same ĝi konverĝas al $u_{0-} = \mathsf{vp}\left(\frac{1}{x}\right) + i\pi\delta$ kiam $y < 0$, $y \to 0$. Tio signifas ke la diferenco inter la ĉerandaj valoroj prenitaj desupre kaj tiuj prenitaj demalsupre estas $-2\pi i\delta$: la mezuro de Dirako estas reprezentita de la holomorfa funkcio $z \mapsto -1/(2\pi iz)$.

En pluraj variabloj la hiperfunkcioj estas malpli facile kompreneblaj, ĉar ili postulas kohomologion de garboj.

12. Konkludo

La teorio pri distribucioj malaperigas multajn problemojn en la klasika analitiko: miksitaj derivaĵoj $\partial_x\partial_y u$ kaj $\partial_y\partial_x u$ ĉiam estas egalaj, kaj la tuta teorio pri partaj diferentialaj ekvacioj ricevas firman kaj unuecan bazon. La kunfaldo vastiĝas, same kiel la furiera transformo, kiu fariĝas tute simetria.

13. Literaturo

Piotr Antosik; Jan Mikusiński; Roman Sikorski

1973 *Theory of Distributions: The Sequential Approach.* Amsterdamo: Elsevier; Varsovio: PWN, xiv + 273 pp.

T[orsten] Carleman

1944 *L'intégrale de Fourier et questions qui s'y rattachent.* Publications Scientifiques de l'Institut Mittag-Leffler, 1. 119 pp. (Represita en 1967 kun aldona noto sur la paĝo 107.)

F. G. Friedlander; M. Joshi

1998 *Introduction to the theory of distributions.* Cambridge: Cambridge University Press. x + 175 pp. (Dua eldono; la unua aperis en 1982.)

I. M. Gel′fand; G. E. Šilov

1953 "Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши." *Успехи матем. наук* **8**, numero 6(58), 3—54.

1959 Обобщенные функции и действия над ними. Moskvo.

Lars Gårding

1997 *Some Points of Analysis and Their History.* (Ĉapitro 12: The impact of distributions in analysis.) University Lecture Series, Volume 11. Providence, RI: American Mathematical Society; Beijing: Higher Education Press.

Michel Hervé

1986 *Transformation de Fourier et distributions.* Parizo: Presses Universitaires de France, 182 pp.

Lars Hörmander

1983 *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I. Distribution Theory and Fourier Analysis.* Berlino: Springer-Verlag, IX + 391 pp. (Dua eldono 1990, XI + 440 pp.)

Jean-Michel Kantor

2004a "Mathematics east and west, theory and practice: the example of distributions. With an appendix by Adolf P. Yushkevich." *Mathematical Intelligencer* **26**, n-ro. 1, 39—50.

2004b "Mathématiques d'Est en Ouest. Théorie et pratique : l'exemple des distributions." *Gazette des mathématiciens,* n-ro. 100, 33—43.

Yitzhak Katznelson

1968 *An introduction to harmonic analysis* Nov-Jorko: Wiley. (Nova eldono 1976, Nov-Jorko: Dover.)

Christer O. Kiselman

2002 "Generalized Fourier transformations: the work of Bochner and Carleman viewed in the light of the theories of Schwartz and Sato." En: *Microlocal Analysis and Complex Fourier Analysis,* pp. 166—185. (Red. Takahiro Kawai, Keiko Fujita.) Singapuro: World Scientific.

M. J. Lighthill

1958 *Introduction to Fourier analysis and generalised functions.* Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics. New York: Cambridge University Press. viii + 79 pp.

Jesper Lützen

1982 *The Prehistory of the Theory of Distributions.* Nov-Jorko: Springer-Verlag. viii + 232 pp.

Kelly McKennon

1976 "Analytic distributions." *J. reine angew. Math.* **281**, 164—178.

Vladimir Maz′ya; Tatyana Shaposhnikova

1998 *Jacques Hadamard, A Universal Mathematician.* American Mathematical Society; London Mathematical Society. xxv + 574 pp.

2005 *Jacques Hadamard, un mathématicien universel.* Les Ulis: EDP Sciences. xvii + 535 pp.

Jan G. Mikusiński

1948 "Sur la méthode de généralisation de Laurent Schwartz et sur la convergence faible." *Fund. Math.* **35**, 235—239.

Mikio Sato

1958a "On a generalization of the concept of functions." *Proc. Japan Acad.* **34**, 126–130.

1958b "On a generalization of the concept of functions. II." *Proc. Japan Acad.* **34**, 604–608.

1958c "Theory of hyperfunctions." [Japanlingva.] *Sukagu* **10**, 1–27.

1959 "Theory of hyperfunctions I." *J. Fac. Sci. Tokyo* Sect. I, **8**, 139–193.

1960 "Theory of hyperfunctions II." *J. Fac. Sci. Tokyo* Sect. I, **8**, 387–437.

Laurent Schwartz

1945 "Généralisation de la notion de fonction, de dérivation, de transformation de Fourier, et applications mathématiques et physiques." *Annales Univ. Grenoble* **21**, 57—74.

1947-48 "Théorie des distributions et transformation de Fourier." *Annales Univ. Grenoble* **23**, 7—24.

1950/51 *Théorie des distributions.* Vol. I, II. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, numeroj 9 kaj 10; Actualités scientifiques et industrielles, numeroj 1091 kaj 1122.

1954 "Sur l'impossibilité de la multiplication des distributions." *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (Paris),* **239**, 847—848.

1965 *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques.* Parizo: Hermann, 392 pp.

1966 *Théorie des distributions.* Parizo: Hermann, XIII + 420 pp.

S. Soboleff (S. Sobolev, S. L. Sobolev)

1934 "Nouvelle méthode de résolution du problème de Cauchy pour les équations aux dérivées partielles de second ordre." (En la rusa kaj franca.) *Doklady Acad. Sci. URSS* **1**, 433—438.

1935 "Le problème de Cauchy dans l'espace des fonctionnelles." *Doklady Acad. Sci. URSS,* n. Ser., n-ro 3, 291—294.

1936 "Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations hyperboliques normales." *Matematičeskij sbornik* **1**, 39—71.

Robert S. Strichartz
2003 *A Guide to Distribution Theory and Fourier Transforms.* New Jersey - London - Singapore - Hong-kongo: World Scientific. (Dua eldono; la unua aperis en 1994.)

G. Temple
1955 "The theory of generalized functions." *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.* **228**, 175—190.

Karl Weierstrass
1895 "Über continuirliche Functionen eines reellen Arguments, die für keinen Werth des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen. (Gelesen in der Königl. Akademie der Wissenschaften am 18. Juli 1872.)" En: *Mathematische Werke von Karl Weierstrass,* dua volumo, pp. 71—74. Berlino: Mayer & Müller.

Adolphe P. Yus[h]kevitch
2004 "Quelques remarques sur l'histoire de la théorie des solutions généralisées d'équations aux dérivées partielles et des fonctions généralisées." *Gazette des mathématiciens* n-ro. 100, 44—50.

Claude Zuily
1986 *Distributions et équations aux dérivées partielles : Exercices corrigés.* Parizo: Hermann, 244 pp.

Adreso de la aŭtoro: Upsala universitato, Matematika instituto
Poŝtkesto 480, SE-751 06 Uppsala, Svedio
Komputilreta adreso: `kiselman@math.uu.se`