Uppsala tekniska högskola
Matematiska institutionen
Christer Kiselman

Inluppar
inlupp2001
2001 09 15

Inlämningsuppgifter på kursen *Fouriermetoder*

Lämna in lösningar på uppgift 1 senast på föreläsningen den 28 september. Märk lösningen med din gruppbeteckning: WA (Christer), WB (Maciej), KA (Anders) eller KB (Karl-Heinz) – det blir gruppledarna som får läsa och kommentera lösningarna. Lämna in lösningar på uppgift 2 senast den 15 oktober.

1. Värmeledningen i jorden antas vara styrd av ekvationen $u_t(z,t) = \kappa u_{zz}(z,t)$, där z är djupet under markytan mätt i meter, t tiden mätt i dagar från 2001 01 01, klockan 00:00, och där $u(z,t)$ är temperaturen mätt i °C på djupet z vid tiden t. Vidare är κ en positiv konstant, vars värde beror på jordens beskaffenhet. Mer precist kallas κ för *värmediffusiviteten* och mäts (i denna uppgift) i kvadratmeter per dygn.

(a) Ta reda på värdet hos κ för olika jordarter och bergarter, samt gärna också för olika metaller. Om tabellerna du konsulterar inte listar värmediffusiviteten, så kan den beräknas mätt i kvadratmeter per sekund som $\kappa = \lambda/\rho c$, där λ är värmekonduktiviteten (mäts i W/m·K), ρ densiteten (mäts i kg/m^3) och c värmekapacitiviteten (mäts i J/kg·K).

(b) Visa att det för varje positivt tal α finns positiva tal β och γ sådana att $u(z,t) = e^{-\beta z}\cos(\alpha t - \gamma z)$ löser ekvationen för $z > 0$, $t > 0$. Ange värdet hos β och γ för varje α. (Termen $-\gamma z$ medför att vågen försenas med $\gamma z/\alpha$ dygn.)

(c) Vi studerar nu temperaturens dagliga och årliga variation, och antar att den vid jordytan, således vid $z = 0$, ges av en formel

$$u(0,t) = \tfrac{1}{2}A_0 + A_1\cos(\alpha_1(t-t_1)) + A_2\cos(\alpha_2(t-t_2)), \qquad t > 0,$$

där $\frac{1}{2}A_0$ är medeltemperaturen, A_1 den dagliga amplituden och A_2 den årliga amplituden. Vidare är $\alpha_1 = 2\pi$ och $\alpha_2 = 2\pi/365$ de vinkelfrekvenser som hör till den dagliga respektive årliga variationen, medan tidpunkterna t_j anger när under dagen respektive året det är varmast. Vad blir nu (med ledning av (b)) temperaturen $u(z,t)$ på djupet z och vid tiden t?

(d) På vissa djup, som vi beteckar med $d_{11} < d_{12} < d_{13} < \cdots$, är fasen motsatt den vid ytan för den dagliga variationen (dvs. det är kallast när det är varmast vid ytan), och på vissa djup, som vi betecknar med $d_{21} < d_{22} < d_{23} < \cdots$, är fasen hos den årliga variationen motsatt den vid ytan. Bestäm d_{11} och d_{21} samt kvoten d_{21}/d_{11} (för några vanliga jordarter eller bergarter).

(e) Vad blir den dagliga amplituden hos temperaturen på djupet d_{11}?

(f) Vad blir den årliga amplituden hos temperaturen på djupet d_{21}?

2. En signal f definieras av att

$$f(t) = \begin{cases} \cos(2\pi\alpha_1 t) + \frac{3}{10}\cos(2\pi\alpha_2 t), & 0 \le t < \frac{2}{5}, \\ \cos(2\pi\beta_1 t) + \frac{7}{10}\cos(2\pi\beta_2 t), & \frac{2}{5} \le t < 1, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Här är t tiden mätt i sekunder, och $\alpha_1 = 320\,\text{Hz}$, $\alpha_2 = 900\,\text{Hz}$, $\beta_1 = 290\,\text{Hz}$, $\beta_2 = 2300\,\text{Hz}$.

(a) Rita upp amplitudspektrum för signalen f, dvs. $|\hat{f}(\omega)|$ som funktion av $\omega > 0$. Det har fyra toppar. Beräkna deras höjder approximativt. Vilken topp är högst? (Topparna till de åtta rena exponentialsvängningar som bygger upp signalen kan beräknas exakt, så det gäller att visa att där en viss term har sitt maximum de övriga sju termerna inte stör alltför mycket.)

(b) Dela nu upp signalen f i fem delsignaler $f_1, ..., f_5$ genom att definiera

$$f_j(t) = \begin{cases} f(t), & \frac{1}{5}(j-1) \le t < \frac{1}{5}j, \\ 0, & \text{annars,} \end{cases} \qquad j = 1, ..., 5.$$

Rita upp amplitudspektrum för var och en av signalerna f_j. Rita också ett spektrogram, dvs. ett diagram med tiden t som abskissa och frekvensen ω som ordinata, och där en stark signal anges medelst svärtning. (Spektrogrammet innehåller fyra linjestycken, svarande mot de fyra frekvenserna, och dessas lägen skall ritas in.)

(c) Man vet att vokalen [i] kännetecknas av att dess andra formant ligger omkring tre oktaver högre än dess första formant, medan hos [a] den andra formanten ligger blott en halv oktav högre än den första. Hos [u], slutligen, är den andra formanten betydligt svagare än den första och har en frekvens som är en och en halv oktav högre än den förstas. Vilka av dessa tre vokaler syntetiseras bäst av signalerna $f_1, ..., f_5$?