La rektoj de Eŭklido

Christer O. Kiselman

En la simpozio

Apliko de Esperanto en la Profesia Agado

AEPA 2013 · Karlovo kaj Sopot

2013 junio 30

Enhavo

Resumo
Mi starigas du demandojn pri la *Elementoj* de Eŭklido: Kiel klarigi ke la propozicioj 16 kaj 27 en lia Unua Libro ne sekvas, strikte dirite, el liaj postulatoj (aŭ eble estas sensencaj)? kaj: Kiuj estas la matematikaj sekvoj de la signifoj de la termino *eŭthéja* kiujn ni hodiaŭ ofte preferas percepti kiel malsamaj?

La respondo al la unua demando estas ke orienteblo estas subkomprenata hipotezo.

La respondo al la dua estas diskuto pri klopodoj faritaj por eviti faktan nefinion, kaj pri la neceso konstrui (en unu senco aŭ alia) ekvivalent-klasojn de strekoj por akiri unikecon.

Du demandoj

La Στοιχεῖα (*Stojĥéja*) de Eŭklido, poste pli konata per sia latina traduko *Elementa* ‘Elementoj’, estas la plej sukcesa verko pri geometrio de ĉiuj tempoj. Ĝi povas ankoraŭ hodiaŭ esti legata, analizata – kaj komprenata. Tamen, mi havis malfacilon kompreni kelkajn rezultojn.

La unua demando. La propozicio 27 de Eŭklido en la unua libro de lia Στοιχεῖα ne sekvas, strikte dirite, el liaj postulatoj (aksiomoj) — aŭ estas eble sensenca. Ĝia pruvo dependas de la propozicio 16, kiu suferas de la sama malfacilo. Devas ekzisti kaŝita hipotezo. Kiu povas esti tiu kaŝita hipotezo?

La propozicio 27 diras:

> *Se rekto falanta sur du rektoj faras la alternajn angulojn egalaj, la rektoj estas paralelaj.* (Traduko apogita de Heath 1926a:307)

La propozicio 16 diras:

> *En ajna triangulo, se unu el la lateroj estas plilongigita, la ekstera angulo estas pli granda ol ĉiu el la du internaj anguloj ĉe la aliaj verticoj* (Traduko apogita de Heath 1926a:279)

Kelkaj sekvantaj rezultoj estos same influitaj.

Mi klopodos savi Eŭklidon per re-ekzamenado de la nocioj de rekto kaj de triangulo kaj per elmontro de ebla kaŝita supozo.

Mi ankaŭ pruvos ke se ni limigas la grandon de la trianguloj konvene, la propozicio 16 fakte estas valida eĉ en la projekcia ebeno.

La dua demando. Kion signifas la vorto εὐϑεῖα (*eŭthéja, eŭt̂éja*)? Ĝi ofte estas tradukita per 'rekto', kiu en esperanto kutime estas komprenata kiel nefinia rekto, sed fakte ofte nepre signifas 'streko, rektlinia segmento, segmento de rekto'. Kiuj estas la matematikaj sekvoj de tiuj signifoj, kiujn ni nuntempe ofte preferas percepti kiel malsamaj?

Provo: ŝ = sh, th = t̂?!

Michel Federspiel konstatis:

> La difino de la rekto estas unu el la grekaj eldiroj matematikaj kiuj kaŭzis plej multajn esplorojn kaj komentojn ĉe la matematikistoj kaj ĉe la historiistoj. (Tradukita el Federspiel 1991:116)

Li tie ne diskutas ĉu *eŭthéja* signifas nefinian rekton, radion aŭ strekon, signifoj kiujn Charles Mugler registras en sia vortaro:

> 1° Rekto nefinia; ankaŭ duonrekto. [...] 2° Segmento de rekto. (Tradukita el Mugler 1958–1959:201–202)

Mi venos al tio poste. Antaŭ ol fari tion mi fiksos la terminojn rilatajn al du modeloj por la aksiomoj de Eŭklido, la ***eŭklida ebeno*** kaj la ***projekcia ebeno***. Mi diskutos la pruvon de la propozicio 16 kaj la nocion de orienteblo.

Miaj vojoj al tiu ĉi teksto

La sekvaj konvinkoj estis la pelantaj fortoj malantaŭ mia laboro.

(1) Geometrio estas fascina, speciale ties logika enhavo – mi ŝuldas tion al Bertil Broström, mia unua instruisto pri matematiko.

(2) Lingvoj estas fascinaj – mi ŝuldas tion al Karl Axnäs, mia instruisto pri la germana kaj mia plej inspira instruisto el ĉiuj kategorioj. Multe pli malfrue mi volis kompreni Eŭklidon kaj studis la klasikan grekan por Ove Strid.

(3) Historio estas fascina – mi ŝuldas tion al mia instruisto pri historio Nils Forssell.

Sekve la prelego estus malfacile klasebla: mi kombinas

(A) laŭvortajn citaĵojn el la libroj de Eŭklido por montri ekzakte kiel la terminoj estis uzataj; kaj

(B) kritikan rigardon al la logiko, kie mi sentas min libera uzi la konojn kiujn mi nun posedas, ne implicante ion ajn pri la konoj kiujn estus posedinta Eŭklido.

Por pruvi ke la propozicio 16 ne sekvas el la aksiomoj, kutima metodo estas elmontri modelon kie la aksiomoj estas veraj dum la aserto en propozicio 16 ne veras. La naturo de la modelo neniel gravas: ĝi povas veni el iu ajn tempo kaj iu ajn loko, kaj ne permesas konkludojn rilevajn [Wim Jansen] por la historio. Tiu argumento estu komparata kun la pruvo fare de Lobačevskiĭ, Bolyai kaj Gaŭso ke la postulato de paraleloj estas sendependa de la aliaj aksiomoj.

Kiel rimarkigis Ulf Persson, la historio similas al la matematiko pro la fakto ke ĝia pritraktaĵo ne (plu) ekzistas, dum la pritraktaĵo de la matematiko neniam ekzistis, krom eble en iu mondo kie vivas Platono. Por aliaj pensoj komparantaj historion kaj matematikon vidu lian eseon (2007) pri la libro de Robin George Collingwood *The idea of history* 'La ideo de la historio' (1966). La nuna studo kombinas historion kaj matematikon, espereble tiel ke la du perspektivoj estas distingeblaj.

La eŭklida kaj la projekcia ebenoj

Rektoj kaj strekoj en la eŭklida ebeno

Mi skribos E_2 por tio kio nun estas konata kiel la *eŭklida ebeno*. Temas pri afina spaco, kiu povas esti provizita per koordinatoj, konsistantaj el elementoj de $\mathbb{R}^2$, do el paroj de reelaj nombroj. Pli precize, se tri punktoj $a, b, c \in E_2$ estas donitaj kaj se ili ne kuŝas sur rekto, ni povas doni al punkto $p \in E_2$ la koordinatojn $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se $p = a + x(b - a) + y(c - a)$. Por paroli pri anguloj kaj areoj ni bezonas provizi la respondan vektoran spacon per interna produto.

En la sekvo mi uzos la jenajn terminojn.

Rekto estas donita per $\{(1-t)a+tb \in \mathbb{R}^2;\ t \in \mathbb{R}\}$, kie $a \neq b$; ĝi estas nefinia en ambaŭ direktoj

Streko, sinonime *rekta segmento*, *segmento de rekto* estas donita per $\{(1-t)a+tb \in \mathbb{R}^2;\ t \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$. Ĉar mi volas eviti ke punkto estos deklarita streko, mi postulas ke $a \neq b$.

Figuro 1: Streko difinita per du punktoj a kaj b.

Radio estas donita per $\{(1-t)a+tb \in \mathbb{R}^2;\ t \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant t\}$, kie $a \neq b$; ĝi estas nefinia en unu direkto.

Rektoj kaj strekoj en la projekcia ebeno

La *projekcia ebeno*, kiun mi notos per P_2, estas du-dimensia sternaĵo, kiun oni povas konstrui el la eŭklida ebeno E_2 per aldono de rekto, nomita la *rekto ĉe nefinio*, tiel aldonante punkton ĉe nefinio al ĉiu rekto. Por mallonga historio pri projekcia geometrio vidu Toretti (1984:110–116). Johannes Kepler estis, laŭ Toretti, la unua en moderna tempo kiu aldonis, en 1604, idealan punkton al rekto.

Ne ekzistas du malsamaj paralelaj rektoj en P_2. Tamen mi konsideras ke ĝi plenumas la postulaton 5:

La postulato de paraleloj

> ε′. *Se rekto falanta sur du rektoj faras ke la internaj anguloj ĉe la sama flanko estas malpli ol du ortoj, la du rektoj, se eltirataj sufiĉe longe, renkontiĝas ĉe la flanko kie troviĝas la anguloj malpli grandaj ol du ortoj.* (Libro I, postulato 5; tradukita el Heath 1926a:202)

Tiu postulato kompreneble devas esti submetita al interpretado en la nova strukturo, kaj tial la eldiro ke P_2 estas modelo ne estas absoluta vero.

Pli bone konata sternaĵo estas la rubando de Möbius, kiu povas esti konstruita el P_2 per forigo de punkto. Nun ekzistas iuj paralelaj rektoj. Tamen, tiu strukturo ne plenumas la postulaton 5 se ni mezuras angulojn kiel ni faros pli poste.

La projekcia ebeno povas ricevi koordinatojn de punktoj en $\mathbb{R}^3$ tiel: Punkto $p \in P_2$ estas reprezentata per triopo $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, kie du triopoj (x, y, z) kaj (x', y', z') reprezentas la saman punkton se kaj nur se $(x', y', z') = t(x, y, z)$ por iu reela nombro $t \neq 0$. Alivorte, ni povas identigi P_2 kun $(\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\})/\sim$, kie $\sim$ estas la rilato de ekvivalento ĵus difinita.

Ni povos ankaŭ diri, egalvalore, ke punkto en P_2 estas rekto tra la origino en $\mathbb{R}^3$ kaj ke rekto en P_2 estas ebeno tra la origino en $\mathbb{R}^3$.

Alia eblo estas pensi pri P_2 kiel la sfero

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

kun *punkto* signifanta 'paro de antipodaj punktoj' kaj *rekto* signifanta 'ĉefcirklo kun antipodaj punktoj identigitaj'. Sekve, kun tia interpreto, $P_2 = S^2/\sim$.

La projekcia ebeno povas esti kovrita per koordinataj pecoj kiuj estas difeomorfaj al $\mathbb{R}^2$. Malfermitan duonsferon ni povas projekcii al la ebeno tanĝanta ĉe ĝia centro. Tiam ĉiuj punktoj krom tiuj sur la rando de la duonsfero estas reprezentitaj.

Sur la sfero ĉiuj anguloj estas bone difinitaj, sed ne en la projekcia ebeno. Por tion klarigi, prenu egallateran triangulon kun verticoj ĉe latitudo $\varphi > 0$ kaj longitudoj 0°, 120° respektive -120°. Tiam ĝiaj anguloj θ sur la sfero povas esti kalkulitaj per la regulo de Neper, kaj estas donitaj de

$$\sin\varphi = \cos(90^\circ - \varphi) = \cot 60^\circ \cot\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cot\frac{\theta}{2}, \qquad 0 < \varphi < 90^\circ.$$

Do θ strebas al 180° kiam $\varphi \to 0$ (granda triangulo proksima al la ekvatoro). La sama validas pri angulo ĉe vertico se ni uzas koordinatan pecon centritan ĉe tiu sama vertico. Sed θ strebas al 60° kiam $\varphi \to 90^\circ$ (malgranda triangulo proksima al la norda poluso).

La projekciaĵo de la triangulo sur la ebenon tanĝantan ĉe $(0,0,1)$ estas kutima egallatera triangulo, sekve kun anguloj egalaj al 60° por ĉiuj valoroj de φ, $0 < \varphi < 90^\circ$. Ni tial ne povos mezuri angulojn en ajna koordinata peco, nur en koordinata peco kun centro ĉe la vertico de la angulo; egalvalore sur la sfero.

Estas konvene tiel mezuri angulojn en la projekcia ebeno kiel ilo por kontroli la grandon de trianguloj. Do, kvankam estas sensence paroli pri anguloj en la projekcia ebeno mem, la sfero povas servi kiel pra-modelo por la projekcia ebeno, kaj la anguloj sur la sfero povas esti utilaj.

Kion signifas *eŭŝéja*?

Charles Mugler skribas:

> [. . .] la lingva instrumento de la greka geometrio donas al la leganto la saman impreson kiel la geometrio mem, tiun de perfekto sen historio. Tiu lingvo sobra kaj eleganta, kun sia vortprovizo preciza kaj distingiva, nevarianta, krom je iuj semantikaj ŝanĝoj, dum mil jaroj de la historio de la greka penso, [. . .]

kaj daŭrigas

> la eldiroj de la *Elementoj*, kiu fiksas la esprimojn de la matematika pensado dum jarcentoj, malkovras sin ĉe la analizo kiel rezulto al kiu kontribuis multnombraj generacioj de geometriistoj. (Traduko el Mugler 1958–1959:7)

Tio sufiĉu por montri ke ni ne klopodas analizi ĉi tie iun efemeran elekton de terminoj.

Linioj

Eŭklido difinas la nocion linio due en sia unua libro:

> βʹ. Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές. (Libro I, difino 2) — Kaj linio estas longo sen larĝo (Traduko apogita de Hoüel 1883:11, Heath 1926a:158, Vitrac 1990:152, Fitzpatrick 2011:6)

Ĉi tie ne estas menciitaj linioj de nefinia longo. En la cetero de la unua libro, plej multaj linioj estas rektoj; por ekhavi sufiĉe da ekzemploj ni nun turnas nin al tiuj ĉi.

Rektoj: *eŭĥéja*

Eŭklido difinas la nocion de *eŭĥéja* en la kvara difino de sia unua libro tiel:

> δʹ. Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται. (Libro I, difino 4) — Rekto estas tiu kiu situas egale rilate al ĉiuj siaj punktoj. (Traduko apogita de Hoüel 1883:11, Heath 1926a:165, Vitrac 1990:154, Fitzpatrick 2011:6)

Hoüel aldonas ke la difino estas formulita per obskuraj terminoj.

La unua postulato de Eŭklido tekstas:

> αʹ. Ἠιτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. (Libro I, postulato 1) — Estu postulita: tiri rekton de ajna punkto al ajna punkto. (Traduko apogita de Hoüel 1883:14, Heath 1926a:195, Vitrac 1990:167, Fitzpatrick 2011:7)

La verbformo Ἠιτήσθω, skribita ᾐτήσθω per minuskloj, estas en meza modo, perfekta imperativo, singularo, tria persono de la verbo αἰτεῖν 'postuli', αἰτέω 'mi postulas'.

La termino kiun li uzas por rekto en la kvara difino kaj la unua postulato estas εὐθεῖα γραμμή (*eutheia grammē*) 'rekta linio', poste, ekzemple en la dua kaj kvina postulatoj, mallongigita al εὐθεῖα 'rekta', la femala formo de adjektivo kun la senco 'rekta'; 'baldaŭa, tuja'; maskle εὐθύς; neŭtrale εὐθύ.

Simile *une droite* estas tre ofte uzata por *une ligne droite* en la franca, kaj прямая (*pryamáya*) por прямая линия (*pryamáya línya*) en la rusa.

Iom surprize, laŭ Frisk (1960), la adjektivo εὐθύς havas neniun etimologian parencon en aliaj lingvoj: "Ohne außergriechische Entsprechung."

Rektoj: *eks ísu kéjtaj*

Ŝlosila elemento en la difino 4 estas la esprimo ἐξ ἴσου [...] κεῖται (*ex isou* [...] *keitai*). Ĝi estas tradukita per 'située semblablement, lies evenly, placée de manière égale', en esperanto 'egale situanta'. La adverbo *egale* estas traduko de la prepozicia esprimo ἐξ ἴσου, kiu funkcias kiel adverbo — aŭ fakte estas adverbo (Federspiel 1991:120).

La verba formo κεῖται signifas 'ĝi kuŝas, ĝi estas kuŝanta' aŭ eble 'ĝi estas kuŝigita, lokita'; meza aŭ pasiva modo, prezenta indikativo, singularo, tria persono.

Rektoj: *sēméjon*

Vitrac (1990:189–190) konstatas ke Eŭklido pritraktas punktojn kiel markojn kiujn oni povas situigi sur rektoj aŭ en rilato kun rektoj. Ke punktoj fakte estas markoj aŭ markiloj estas plue evoluigita en du artikoloj de Federspiel, kiu detale diskutas la signifon de la vorto σημείοις en difino 4, pluralo dativo de σημεῖον. Li estis atendanta la vorton πέρασι 'ekstremaĵoj' en la loko de σημείοις ĉi tie (1992:387), kaj argumentas ke, kvankam ĝenerale σημεῖον certe signifas 'punkton', en tiu ĉi speciala difino ĝi havas pra-eŭklidan signifon, nome 'repère' ("Toute marque servant à signaler un point, un enplacement à des fins précises" (*Grand Larousse* 1977).) 'extrémité' (1992:388), 'signe distinctif' (1992:389), aŭ 'marque, repère' (1998:67) (eble redonita en esperanto kiel *marko, markilo, ekstremaĵo, distinga signo, gvidosigno, gvidomarko, orientilo*.)

La referento estas preskaŭ ĉiam vertico de angulo en plurlatero.

En la astronomio la termino *sēméjon* signifas stelon kiu situas periferie en konstelacio, alivorte kiu estas en ekstrema pozicio rilate al la konstelacio, pli-malpli kiel la verticoj de plurlatero (1992:395), kvinlatero (1998:58), kubo (1998:58) aŭ dudekedro (1998:59).

Ŝajnas kredeble ke la difino de *eŭîéja* unuavice celis strekon, sed ke poste pli vasta uzo de la termino devigis matematikistojn akcepti pli larĝan interpreton.

La matematika signifo de *eŭŝéja*

Kion signifas *eŭŝéja* matematike? Proklos, en sia komentario al la unua libro de Eŭklido (Proclus 1948:92, 1992:83), rimarkigas ke *eŭŝéja* havas kion oni kutime ankaŭ tiam perceptis kiel tri malsamajn signifojn: 'rekto'; 'streko'; kaj 'radio'.

Eŭklido ofte parolas pri disvastigo de rektoj, ekzemple en la fama postulato 5, la Aksiomo de paraleloj jam citita, kiu estis okuponta matematikistojn dum du jarmiloj. La postulato implicas ke la du rektoj dekomence ne nepre renkontiĝas; tial klaras ke li celas strekojn. Ni povas konkludi ke, almenaŭ ĉi tie, *eŭŝéja* signifas strekon, ne nefinian rekton.

Nefinie longaj linioj kontraŭ ekvivalent-klasoj de strekoj

Se du punktoj estas donitaj, ili determinas unikan rekton. Verdire, postulato 1 ne eksplice diras tion, sed la diskuto en Heath (1926a:195), kiu kondukas al la konkludo ke tio estas la intencita signifo, estas tre konvinka. Ĉi tie estus nature por ni en la dudekunua jarcento pensi pri nefinie longaj rektoj, sed estas ankaŭ eble limigi la konsiderojn al strekoj per la formado de la familio de ĉiuj strekoj kiuj enhavas la du donitajn punktojn — aŭ almenaŭ al familio de strekoj kiuj iras ajne longe en ambaŭ direktoj.

Se tiel, ni povas eviti faktan nefinion kaj labori nur pri potenciala nefinio.

Michel Federspiel skribas tute kategorie: “Ne ekzistas fakta nefinio en la greka geometrio.” (1991:118, noto 10). Tion oni kontrastigu al aserto de Reviel Netz: “[…] Arĥimedo kalkulis kun faktaj nefinioj — rekte kontraŭ ĉio kion matematik-historiistoj ĉiam kredis pri sia fako.” La citaĵo rilatas al kalkulado de volumeno en palimpsesto nun troviĝanta en la Walters Art Museum en Baltimore, MD, Usono (Netz & Noel 2007:199). Al mi ŝajnas ke la bazo de tiu aserto estas ne tre firma. Pli trafa estas la eldiro de Eŭklido mem en lia Libro X: γʹ. […] ὑπάρχουσιν εὐθεῖαι πλήθει ἄπειροι […] (Libro X, difino 3) — […] ekzistas nefinia aro de rektoj […] (Traduko apogita de Fitzpatrick 2011:282).

Ni notu ke Proklos distingas inter “partie infinies en acte” (fakta nefinio) kaj “en puissance seulement” (potenciala nefinio) (1948:140); “La dua aserto [nefinia nombro de partoj] faras nefinian nombron fakta, la unua [grando estas nefinie dividebla] nur potenciala; la dua asignas ekziston al la nefinio, la alia nur naskiĝeblon” (1992:125).

Tamen, se ni agas tiel – ĉu sub la premo de Aristotelo aŭ ne – estos multaj strekoj kiuj enhavas la du donitajn punktojn: eble unu kun la longo de unu hemiplethron, poste unu kun la longo de unu plethron, unu stadion, unu hippikon, poste unu kun la longo de parasang, kaj unu kun la longo de unu stathmos, kaj tiel plu – ne estos halto. Sed ĉiuj tiuj strekoj reprezentas la *saman* rekton: estu nur unu rekto. Ke la strekoj *prezentas* aŭ *reprezentas* la saman linion oni hodiaŭ konvene esprimas en la lingvaĵo de ekvivalent-klasoj. La formado de ekvivalent-klasoj estas metodo akiri unuecon – unuigi la multajn strekojn en unu solan enton.

Mi emfazu ke du punktoj determinas strekon se ni estas en E_2, kaj ke, inverse, streko determinas unike du punktojn, nome siajn finpunktojn. Se tio estus ĉio, ni havus perfektan unikecon en ambaŭ direktoj. Sed se ni vastigas strekon al pli longa streko, ni ricevas du malsamajn strekojn, kiuj, tamen, *reprezentas* la *saman* rekton. Kion do signifas *reprezentas*? Kaj kion signifas la *saman*? Mi ne scias kiel pensis Eŭklido, sed li devus esti konscia pri la problemo de ne-unikeco. Se ni nuntempe povas paroli pri ekvivalent-klasoj, tio estas konvena metodo kompreni la verbon *(re)prezenti*, sed tio estas nur helpo por la hodiaŭa leganto, kaj ne implicas ion ajn rilate al la pensoj de Eŭklido.

Pri fakta kontraŭ potenciala nefinio ni rajtas kompari kun la primoj: kelkfoje estas dirite ke Eŭklido pruvis ke ekzistas nefinie multaj primoj, sed fakte li pruvis en sia naŭa libro, propozicio 20, ke, se estas donita tri primoj, li povas trovi kvaran. Klare la pruvo funkcias por ajna finia aro de primoj: kun la ideo de la pruvo ni povos iri de n primoj al $n+1$ primoj por ajna $n \geqslant 1$. Ĉiuj primoj ne nepre ekzistas samtempe. Tio estas instrua ekzemplo de potenciala nefinio; ni ne bezonas kredi je la ekzisto de fakta nefinio.

Aristotelo esprimis tre klaran opinion pri la neceso konsideri nefinie longajn rektojn:

> Mi argumentis ke ne ekzistas ia fakta nefinio kiu estus netransirebla, sed tiu pozicio ne forrabas de la matematikistoj ilian studon. Kiel la aferoj estas, ili ne bezonas nefinion, ĉar ili ne uzas ĝin. Ĉio kion ili bezonas estas finie longan strekon de ajna dezirata longo. (*Fiziko*, Libro III, parto 7, citita de Aristotle 1996:75–76 kaj tradukita el la angla)

La postulo pri unikeco tiam kondukas nin al la bezono formi ekvivalent-klasojn de ĉiuj tiuj strekoj.

Fakta nefinio estas ne nur nenecesa por la geometrio; ĝi estas ankaŭ neebla en la fizika mondo:

> [. . .] ne povas ekzisti grando kiu superas ĉiun specifan grandon: tio signifus ke ekzistus io pli granda ol la universo. (*Fiziko*, Libro II, parto 7, citita el Aristotle 1996:75 kaj tradukita el la angla)

Tamen, kiel substrekas Rosenfeld (1988:183), la doktrino de Aristotelo "ke matematikaj nocioj estas akiritaj per abstrakto el objektoj de la reala mondo kapabligas onin disigi sin de la finieco de fizikaj grandoj." Ibn Rushd (Averroes) skribis ke geometriisto rajtas allasi "ajnajn grandojn — kion fizikisto ne povas fari [. . .]".

Ni ankaŭ aldonu ke sur la sfero rekto en la ebeno respondas al ĉefcirklo, μέγιστος κύκλος (*mégistos kúklos*; Mugler 1958–1959:19). Certe Aristotelo ne obĵetus al la konsidero de cirklo sur sfero kiel de kompleta, ekzistanta ento. Sed mi divenas ke li ne vidis ĉefcirklon kiel kompaktigaĵon de rekto, kiel ni nun faras — post tiom da jaroj.

Ekzemploj

Eŭtéja barita

Ke la angla termino *straight line* aŭ *straight-line* povas signifi strekon estas klare el multaj ekzemploj, kaj la sama validas por la responda termino greka, ekzemple en la unuaj propozicioj en Libro I:

> β′. Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι. (Libro I, propozicio 2) — Meti en punkto donita kiel ekstremaĵo rekton egalan al donita rekto. (Traduko apogita de Hoüel 1883:16, Heath 1926a:244, Vitrac 1990:197, Fitzpatrick 2011:8)

Egaleco de linioj ĉi tie signifas egalecon de iliaj longoj.

γʹ. Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων ἀπὸ τῆς μείζονος τῇ ἐλάσσονι ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν. (Libro I, propozicio 3) — Se donitaj estas du malegalaj rektoj, fortranĉi de la pli longa rekton kun longo egala al tiu de la pli mallonga. (Traduko apogita de Hoüel 1883:17, Heath 1926a:246, Vitrac 1990:199, Fitzpatrick 2011:9)

Eŭŝéja nebarita

Tamen kelkfoje εὐθεῖα portas alian kvalifikon:

> β′. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ’ εὐθείας ἐκβαλεῖν. (La verba formo ἐκβαλεῖν estas en la aktiva modo, forta aoristo, infinitivo.) (Libro I, postulato 2) — Plivastigi finian rekton kontinue al rekto. (Traduko apogita de Hoüel 1883:14, Heath 1926a:196, Vitrac 1990:168, Fitzpatrick 2011:7)

El tio estas evidente ke εὐθεῖα povas esti eksplice kvalifikita kiel barita, kio indikas ke la termino povus referenci ankaŭ al nebarita linio. Aŭ, kun potenciala nefinio, al familio de strekoj! Alivorte, ni povas interpreti postulaton 2 tiel ke ni povas plilongigi donitan strekon al alia streko de kiom ajn granda longo, sed ĉiam de finia longo.

α΄. Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι. (Libro I, propozicio 1) – Sur finia rekto donita konstrui egallateran triangulon. (Traduko apogita de Hoüel 1883:15, Heath 1926a:241, Vitrac 1990:194, Fitzpatrick 2011:8) ι′. Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν. (Libro I, propozicio 10) — Duonigi finian rekton donitan. (Traduko apogita de Hoüel 1883:22, Heath 1926a:267, Vitrac 1990:216, Fitzpatrick 2011:15)

La atributo πεπερασμένη 'finia, barita' (pasiva modo, perfekta participo, singularo, femala, nominativo) ne estus necesa se ĉi tie εὐθεῖα ĉiam signifus 'streko'.

En la pruvo de propozicio 12 Eŭklido uzas la fakton ke *eŭtêja* dividas la ebenon en du duon-ebenojn. Tio kompreneble nepre implicas ke la linio estas nefinia en ambaŭ direktoj.

Eŭŝéja kiel radio

Finfine ni notu ke kelkfoje εὐϑεῖα povas signifi ‘radio’:

> Ἐκκείσθω τις εὐϑεῖα ἡ ΔΕ πεπερασμένη μὲν κατὰ τὸ Δ ἄπεροις δὲ κατὰ τὸ Ε, [. . .] (Libro I, Proof of Proposition 22) – Ni tiru rekton DE, limigitan en unu direkto ĉe D, nefinian en la direkto de E. (Traduko apogita de Hoüel 1883:31, Heath 1926a:292, Vitrac 1990:237, Fitzpatrick 2011:25)

En la aserto de tiu ĉi propozicio la linioj estas ĉiuj de finia longo, sed en ties pruvo subite aperas radio.

Propozicio 16

La propozicio 16 diras, kiel ni vidis, ke ekstera angulo en triangulo estas pli granda ol ĉiu el la du kontraŭaj internaj anguloj. Estu donita triangulo kun verticoj a, b, c. Ni trarigardu la pruvon ke la ekstera angulo c estas strikte pli granda ol la interna angulo $\angle bac$ ĉe a. Eŭklido plivastigas la lateron $[b, c]$ trans c al punkto d tia ke c kuŝas inter b kaj d (la ekzakta lokiĝo de d ne gravas; ĝi servas nur por difini la eksteran angulon $\angle acd$ ĉe c). La problemo nun estas pruvi ke la ekstera angulo $\angle acd$ estas pli granda ol la interna angulo $\angle bac$. Eŭklido enkondukas novan punkton e kiel la mezpunkton de la latero $[a, c]$ kaj plivastigas la strekon $[b, e]$ al punkto f, difinita tiel ke e estas la mezpunkto de $[b, f]$. Li tiel akiras du kongruajn triangulojn $\triangle abe$ kaj $\triangle cfe$. Sekve la angulo ĉe c en la triangulo $\triangle cfe$ egalas al la angulo ĉe a en la triangulo $\triangle abe$. Ĝis ĉi tie, ĉio bonas. Tiam Eŭklido diras:

μείζων δέ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΕΓΔ τῆς ὑπὸ ΕΓΖ· (Sjöstedt 1968:22; Fitzpatrick 2011:21) — Sed la angulo $\angle ecd$ estas pli granda ol la angulo $\angle ecf$. — En Interlingue: Ma ECD es plus grand quam ECF (Sjöstedt 1968:23).

Tio estas io kion ni vidus el (trompa) diagramo.

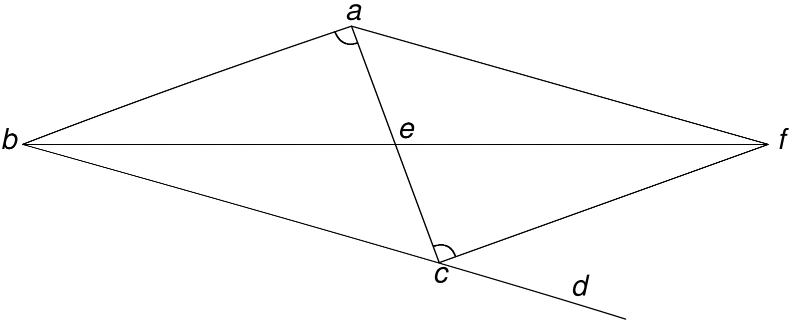
Je tiu ĉi etapo estas konvene daŭrigi la argumenton sur sfero. Ni bezonas nur rigardi triangulon sur sfero tian ke la distanco inter b kaj e estas $90°$. Tiam la distanco inter f kaj b estas $180°$, t.e., ili estas antipodoj kaj estos identigitaj en la projekcia ebeno. Sekva la ĉefcirklo determinita de la latero $[b, c]$ kaj la ĉefcirklo tra b kaj e renkontiĝas ĉe f, kaj la ekstera angulo ĉe c estas egala al la interna angulo ĉe a.

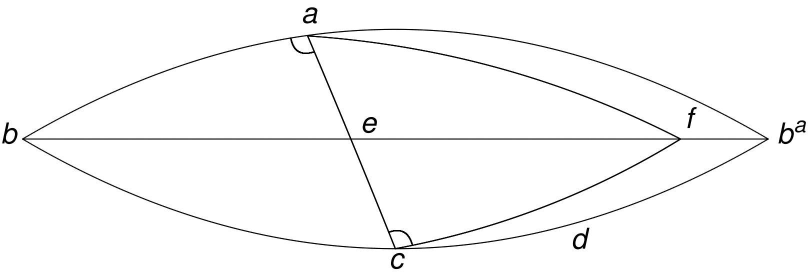
Tiu ĉi estas la plej simpla ekzemplo kiun mi trovis; per iometa perturbo (prenante la distancon inter b kaj e iom pli granda ol 90°), ni povas aranĝi ke la ekstera angulo ĉe c estas pli malgranda ol la interna angulo ĉe a. Fakte la decida grando ĉi tie estas la longo de la mediano $[b, e]$:

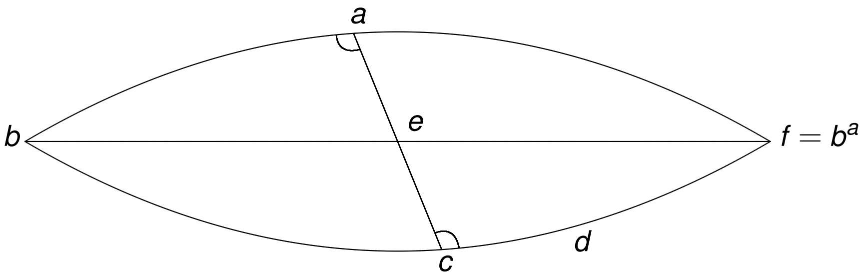
Propozicio

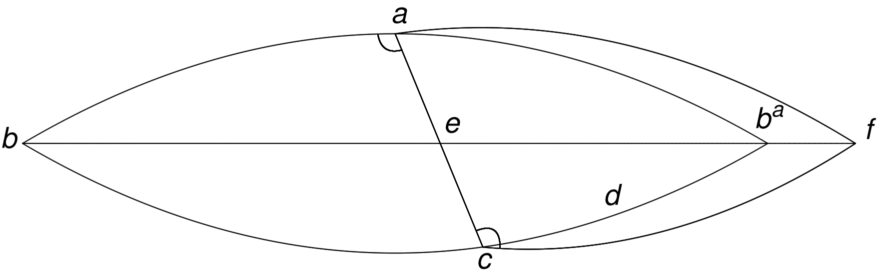
Estu donita triangula regiono sur la sfero kun verticoj en a, b, c. Ni supozu ke ĉiuj lateroj kaj ĉiuj anguloj estas malpli ol 180°. Estu e la mezpunkto sur la latero $[a, c]$.
(1) *Se la distanco inter b kaj e estas malpli granda ol 90°, tiam la konkludo en la propozicio 16 de Eŭklido validas: la ekstera angulo ĉe c estas pli granda ol la interna angulo ĉe a.*
(2) *Se la distanco inter b kaj e egalas al 90°, tiam la ekstera angulo ĉe c egalas al la interna angulo ĉe a.*
(3) *Se la distanco inter b kaj e estas pli granda ol 90°, tiam la ekstera angulo ĉe c estas malpli granda ol la interna angulo ce a.*

Estas motivite supozi ke neniu latero aŭ angulo egalas al aŭ estas pli granda ol 180° — ni evitas la penon difini eksteran angulon de konkava angulo.


a
b
e
f
c
d


a
b
e
f
b^a
c
d


a
b
e
$f = b^a$
c
d


a
e
b^a
b
f
d
c

Notu ke tiu rezulto estas fakte rezulto pri la geometrio de la projekcia ebeno. Mi elektis formuladon por la sfero nur ĉar tiel ĝi estas pli facile videbla.

Pruvo. Ni ne povas paroli pri *la* mezpunkto inter du ne-antipodaj punktoj de la sfero, ĉar ekzistas du mezpunktoj (ili estas antipodaj). Tamen, se triangula regiono estas donita, ni prenas la mezpunkton kiu apartenas al ĝi. Tiel ni difinas la punkton e.

Per la Sfera sinus-teoremo, aplikata al la triangulo $\triangle bcf$ ni ricevas

$$\sin(\pi - \angle ecd + \angle ecf) \sin d(b,c) = \sin(\angle bfc) \sin d(b,f).$$

Nun

$$\sin(\pi - \angle ecd + \angle ecf) = \sin(\angle ecd - \angle ecf) = \sin(\angle ecd - \angle bac),$$

kaj ĉar $\sin d(b,c)$ kaj $\sin(\angle bfc) = \sin(\angle abc)$ estas pozitivaj pro nia supozo, la sinuso de la diferenco $\angle ecd - \angle bac$ havas la saman signon kiel $\sin d(b,f) = \sin 2d(b,e)$. La tri kazoj (1), (2), (3) aperas se respektive $d(b,e) < 90°$, $= 90°$, kaj $> 90°$. $\square$

Sekve, se ĉiuj tri medianoj en la triangulo estas malpli grandaj ol $90°$, Eŭklido pravas.

Orienteblo

Orienteblo de sternaĵo signifas, iom krude dirite, ke vi povos promeni kun horloĝo kaj la montriloj de la horloĝo daŭre iros en la sama direkto (rigardate el la ekstero) kiam vi revenos al la deirpunkto post la ekskurso. La eŭklida ebeno E_2 kaj la sfero S_2 ambaŭ estas orienteblaj. Sed la sfero ne estas modelo por la aksiomoj (postulatoj) de Eŭklido, ĉar du rektoj ĝenerale intersekcas en du punktoj, ne en unu, kaj du antipodaj punktoj ne determinas unikan ĉefcirklon. Ĝuste tio devigas nin identigi antipodoj; la projekcia ebeno fariĝas *bona fide* modelo — almenaŭ ni tiel argumentis — sed orienteblo estas perdita. Tamen, ofte estas konvene argumenti sur sfero kiel mi faris.

Postulato 5, la *postulato de paraleloj*, citita en la komenco, diras ke du linioj renkontiĝas ĉe certa flanko. En la projekcia ebeno estas sensence paroli pri flanko de rekto. Se punkto sur rekto estas donita, vi povas difini du flankojn en najbaraĵo de la punkto, sed se vi promenas laŭ la rekto kun via horloĝo sur maldekstra brako, vi revenas post iom da tempo kun la horloĝo sur via dekstra brako (vidite de la ekstero). La nura fakto ke Eŭklido parolas pri "la sama flanko" kaj "tiu ĉi flanko" signifas ke li supozas la ebenon orientebla. Sekve projekcia geometrio estas ekskludita.

Ni povas konservi de postulato 5 nur ke linioj ne estas paralelaj, t.e. ke ili renkontiĝas ie, ne menciante iun flankon. En tiu modifita formo la postulato 5 veras ankaŭ por la projekcia ebeno.

Konkludoj

La unua demando

Propozicioj 16 kaj 27 fariĝas veraj se ni supozas orienteblo aŭ enkondukas alian hipotezon kiu ekskludas la projekcian ebenon. Kaj orienteblo estas motivita hipotezo: Eŭklido en sia postulato 5 parolas pri flankoj de rekto, kio estas sensenca sen orienteblo.

Kun la projekcia ebeno kiel modelo, ni povas aŭ konkludi ke la propozicio 16 estas sensenca, ĉar ni ne povas kompari angulojn, aŭ malvera se ni mezuras angulojn kiel ni faris.

Propozicio 27 povas esti interpretata kiel dirante ke la menciitaj rektoj ne renkontiĝas, kaj se tiel, ĝi estas malvera ĉu ni mezuras la angulojn aŭ ne. La sola motivita vojo ekster tiu ĉi ĥaoso estas, denove, akcepti la silentan hipotezon de orienteblo.

Se nia amata instruisto povus vidi mian tekston, li povus reagi en du eblaj direktoj. Aŭ:

> α'. Certe, filo mia, mi jes ja supozas orienteblon — mi nur forgesis enskribi ĝin. (Mi estis tro okupita pensante pri postulato Kvin.) En la venonta eldono, kiu nun estas preparata ĉi tie en la Μουσεῖον, mi inkludos orienteblon kiel postulaton Ses. Kiu cetere volas vivi sur rubando de Möbius?

β′. Ἰδού! — Ha! Estas interese! Ŝajnas esti pli ĝenerala geometrio. Mi verkos pri ĝi en Libro Dek Kvar. Kaj mi ŝatas la regulon de Neper kaj la Sfera sinus-teoremo, kiujn vi lernis de via naviganta patro Sam Svensson eĉ antaŭ ol studi mian geometrion kaj la ebenan trigonometrion por Bertil Broström. Ni ĉiuj estas navigantoj ĉi tie en Afriko, ĉu ne? *Navigare necesse est*, kiel iu spritulo baldaŭ formulos sian saĝon.

Divenu ĉu li elektus α′ aŭ β′!

La dua demando

1. Ni observis ke la termino εὐθεῖα ofte signifas strekon. Verŝajne tiu estas ĝia plej origina kaj baza signifo.

2. En aliaj kuntekstoj ĝi povas esti interpretata kiel nefinian rekton, sed ankaŭ, se ni deziras eviti faktan nefinion, kiel familion de ekvivalentaj strekoj, do kiel potencialan nefinion. Tamen, en la projekcia geometrio, la nefiniaj rektoj estas nur ĉefcirkloj kun antipodaj punktoj identigitaj, do apenaŭ nefinie grandaj. Tio donas al ni unu plian argumenton kredi ke Eŭklido ne pensis pri projekcia geometrio.

3. Finfine, sed malofte, ĝi povas signifi 'radion'.

Por rektoj kiuj estas nefiniaj en unu aŭ du direktoj aperas la problemo de fakta nefinio; se ni evitas ĝin per konsidero nur de strekoj, ni devas akiri unikecon per la formado de ekvivalent-klasoj, kio certe estas anakronisma vidpunkto, sed eble estas ekzakte tio kion Eŭklido faris implice.

Ni ankoraŭfoje aŭskultu nian amatan instruiston, ĉifoje pri *eŭtêja*:

γ'. Ληρεῖτε! — Baf! Kio estas rekta estas rekta, kaj la saĝuloj komprenos. Mi ne malŝparas vortojn en mia geometrio. Vi junuloj uzas tro da ili. Verŝajne vi forlasis Afrikon tro frue. Mi timas ke vi devos krei Terminologian centron en vana klopodo kontraŭbatali la inundon.

Kaj pri la nefinio:

δ'. Aristotelo kaj lia bando de fizikistoj nin matematikistojn turmentas. Lia disĉiplo – kiel li nomiĝas? – kredis ke li povas konkeri la tutan mondon, sed ĉio kion li atingis estis perturbi niajn cirklojn. Nuntempe ni devas esti prudentaj skribante pri nefinio – potenciala nefinio rapide fariĝis ΠΟ – sed dumnokte mi estas libera pensi pri fakta nefinio. Mi povas ĝin eĉ vidi.

Referencoj

Aristotle (1996). *Physics*. Translated by Robin Waterfield; with an introduction and notes by David Bostock. Oksfordo; Nov-Jorko: Oxford University Press.

Collingwood, R[obin] G[eorge] (1966). *The idea of history*. Oksfordo: Oxford University Press.

Euclide d'Alexandrie (1990). *Les Éléments traduits du texte de Heiberg*. Vol. I. Introduction générale par Maurice Caveing; Livres I–IV: Géométrie plane. Traduction et commentaires par Bernard Vitrac. Parizo: Presses Universitaires de France.

Federspiel, Michel (1991). Sur la définition euclidienne de la droite. **En:** *Mathématiques et philosophie de l'antiquité à l'âge classique*, Hommage à J. Vuillemin (R. Rashed, Ed.), pp. 115–130. Parizo: Éditions du Centre national de la Recherche scientifique.

Federspiel, Michel (1992). Sur l'origine du mot σημεῖον en géométrie. *Revue des Études grecques*. Publication de l'Association pour l'Enseignement des Études grecques, Volumo **105**, 385–405.

Federspiel, Michel (1995). Sur l'opposition *défini/indéfini* dans la langue des mathématiques grecques. *Les Études Classiques* **63**, 249–293.

Federspiel, Michel (1998). Sur un emploi de *sèmeion* dans les mathématiques grecques. **En:** *Sciences exactes et sciences appliquées à Alexandrie*. Actes du Colloque International de Saint-Étienne (6–8 juin 1996), pp. 55–78. Saint Étienne: Université de Saint-Étienne.

Federspiel, Michel (2005). Sur l'expression linguistique du rayon dans les mathématiques grecques. *Les Études Classiques* **73**, 97–108.

Fitzpatrick, Richard (2011). *Euclid's Elements Translated from the Text of Heiberg.* Volume I, Books I and II. Dua eldono. Kembriĝo: Cambridge University Press. Reeldonita en 1956 kaj poste en Nov-Jorko de Dover Publications, Inc. x + 432 pp.

Heath, Thomas L. (1926b). *The Thirteen Books of Euclid's Elements Translated from the Text of Heiberg.* Volume II, Books III–IX. Dua eldono. Kembriĝo: Cambridge University Press. Reeldonita en 1956 kaj poste en Nov-Jorko de Dover Publications, Inc. 436 pp.

Hoüel, J. [Guillaume-Jules] (1883). *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire, ou commentaire sur les XXXII premières propositions d'Euclide*. Dua eldono. Parizo: Gauthiers-Villars. (Unua eldono 1867; reeldonita 2011.)

Kiselman, Christer O. (2011). Characterizing digital straightness and digital convexity by means of difference operators. *Mathematika* **57**, 355–380.

Mugler, Charles (1958–1959). *Dictionnaire historique de la terminologie géométrique des Grecs*. Parizo: Librairie C. Klincksieck.

Netz, Reviel; Noel, William (2007). *The Archimedes codex: revealing the secrets of the world's greatest palimpsest*. Londono: Weidenfeld & Nicolson. ix + 305 pp.

Persson, Ulf (2007). *The idea of history*. (Pri la samtitola libro de Robin George Collingwood.) Havigebla ĉe `www.math.chalmers.se/~ulfp/Review/collingwood.pdf` (kontrolita 2013-04-15).

Proclus (1948). *Les commentaires sur le premier livre des Éléments d'Euclide*. Translated and with an introduction and notes by Paul Ver Eecke. Bruĝo: Desclée de Brouwer.

Proclus (1992). *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*. Translated with introduction and notes by Glenn R. Morrow. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Rosenfeld, B. A. (1988). *A History of Non-Euclidean Geometry. Evolution of the Concept of a Geometric Space*. Translated from the Russian by Abe Shenitzer. Nov-Jorko k.a.: Springer.

Sjöstedt, C. E. [Carl-Erik] (1968). *Le axiome de paralleles de Euclides a Hilbert. Un probleme cardinal en le evolution del geometrie*. Stokholmo: Natur och Kultur. XXVIII + 940 + 14 pp.

Vitrac, Bernard (1990). Traduction et commentaires. **En:** Euclide d'Alexandrie (1990:149–531).

Dankon por via atento!

Благодаря!

Kaj dankon por la invito!