Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, XX, n^o spécial, 2011, 19–32

Les mathématiques de Nguyen Thanh Van

Christer O. Kiselman

Résumé. — Les travaux de Nguyen Thanh Van en analyse de plusieurs variables complexes, y compris la théorie des fonctions holomorphes dans les espaces de dimension infinie, ainsi que sa coopération avec le Viêtnam sont présentés.

Abstract. Nguyen Thanh Van's mathematics.
Nguyen Thanh Van has done work on analysis in several complex variables, including the theory of holomorphic functions in spaces of infinite dimension. In the article his mathematical work as well as his cooperation with Vietnam is summarized.

1. Introduction

Nguyen Thanh Van a publié des trauvaux en analyse de plusieurs variables complexes, y compris la théorie des fonctions holomorphes dans les espaces de dimension infinie.

Il a été le directeur du Laboratoire d'analyse complexe à l'Université Paul Sabatier depuis les années 1980 jusqu'à sa fusion avec le Laboratoire Émile Picard en 1994.

Van a aussi soutenu et inspiré la collaboration mathématique avec le Viêtnam de façon admirable pendant des nombreuses années.

Les résultats de Nguyen Thanh Van sont d'une grande finesse. Dans cette brève note j'essayerai en donner mon impression personnelle.

2. Premiers travaux

Nguyen Thanh Van publie son premier travail dès 1965. Il s'agissait des bases de Schauder dans les espaces vectoriels topologiques, un sujet sur lequel il est revenu maintes fois : [1965, 1966, 1967, 1968a, 1969, 1972b, 1975a, 2003, 2006a (avec Patrice Lassère)].

Dans la note de 1966, par exemple, il démontre que pour deux suites données, (e_n) d'éléments d'un espace localement convexe réflexif E et (e'_m) d'éléments de son dual fort E', satisfaisant à $\langle e_n, e'_m\rangle = \delta_n^m$, l'une est une base de Schauder si et seulement si l'autre en est une. Il étudie aussi dans cette note des bases des fonctions entières d'ordre $< \rho$ et de type $< \sigma$, et dans un article de 1968 des bases des fonctions holomorphes dans un polydisque.

Dans une note [1967] Van étudie de façon détaillée la dualité bien connue entre l'espace $\mathscr{O}(\Omega)$ des fonctions holomorphes dans un domaine simplement connexe Ω du plan complexe et l'espace $\mathscr{O}_0\left(\complement\Omega\right)$ des fonctions holomorphes au voisinage du complément de Ω s'annulant à l'infini ; il trouve une condition nécessaire pour que, étant donné un système biorthogonal (F_n, Φ_n) avec $F_n \in \mathscr{O}(\Omega)$, $\Phi_n \in \mathscr{O}_0(\complement\Omega)$, la suite (F_n) soit une base de Schauder de $\mathscr{O}(\Omega)$:

Il existe un ouvert U contenant $\complement\Omega$ tel que les Φ_n soient holomorphes dans U et pour tout compact $K \subset \Omega$ il existe un ouvert V, $\complement\Omega \subset V \subset U$, tel que la série $\sum F_n(z)\Phi_n(w)$ converge et sa somme vaille $1/(w-z)$ *pour* $(z,w) \in K \times V$.

En 1972 Van a publié un article sur la relation entre croissance et meilleure approximation polynomiale des fonctions entières [1972a]. Une fonction f définie sur un compact E de $\mathbf{C}$ est la restriction d'une fonction d'ordre ρ et de type τ si et seulement si

$$\limsup_{n\to+\infty} n^{1/\rho}\|f-P_n\|_p^{1/n} = (e\rho\tau)^{1/\rho},$$

où P_n est la meilleure approximante polynomiale de degré $\leqslant n$ à $f\big|_E$ pour la norme L^p. On suppose ici que $2 \leqslant p \leqslant +\infty$ ou que $1 \leqslant p < 2$ mais alors avec E régulier. En effet il y a des résultats correspondants en plusieurs variables, ainsi que des définitions plus générales de l'ordre et du type.

Par cela il a généralisé des résultats de Tadeusz Winiarski (1970) et John R. Rice (1971).

Van revient à ce problème en [1989b] et encore en [2000], mais alors avec des fonctions séparément harmoniques.

3. La thèse

Dans les notes aux *Comptes Rendus* déjà mentionnées, ainsi que dans deux articles aux *Annales* de Toulouse [1965, 1968a], Nguyen Thanh Van présente des résultats importants sur les bases de Schauder dans les espaces de fonctions holomorphes. Ces résultats aboutiront dans sa thèse, publiée comme un grand article aux *Annales de Fourier* [1972b]. Elle a été écrite sous la direction de Michel Hervé et les bons auspices d'André Martineau (1930–1972).

Le tout se passe dans le cadre des ensembles fortement linéellement convexes introduits par Martineau (1968). Ce sont par définition les ensembles où la dualité entre les fonctions holomorphes dans un ouvert Ω et les fonctions holomorphes sur le complément projectif de Ω s'annulant à l'infini fonctionne de façon parfaite. On définit le complément projectif $\complement^\star A$ d'un ensemble A comme l'ensemble de tous les hyperplans qui ne coupent pas A.

Ainsi on a $\mathscr{O}(\Omega)$, l'espace des fonctions holomorphes dans Ω, et son dual $\mathscr{O}'(\Omega)$, l'espace des fonctionnelles analytiques dans Ω. À toute fonctionnelle analytique $T \in \mathscr{O}'(\Omega)$ on associe la fonction

$$\varphi_T(\zeta) = T(z_1 \mapsto \zeta_0(\zeta_0 + z_1 \cdot \zeta_1)^{-1}),$$

élément de $\mathscr{O}_{P(\mathbf{C}^n),0}(\complement^\star\Omega)$. Les ensembles fortement linéellement convexes sont les ensembles ouverts tels que $\complement^\star\complement^\star\Omega = \Omega$ et tels que l'application $T \mapsto \varphi_T$ soit une bijection de $\mathscr{O}'(\Omega)$ sur $\mathscr{O}_{P(\mathbf{C}^n),0}(\complement^\star\Omega)$.

Cette thèse est un travail majeur tout à fait novateur pour l'époque, avec celui de V. P. (Slava) Zakharyuta, dans la théorie des bases communes holomorphes. L'auteur développe de façon détaillée en une et plusieurs variables complexes cette théorie ; il obtient des résultats très fins. Citons par exemple une étude des systèmes biorthogonaux de fonctions holomorphes sur un ensemble fortement linéellement convexe de $\mathbf{C}^n$ et l'existence de bases communes holomorphes à une paire $(\mathscr{O}(\Omega), \mathscr{O}(K))$ où $K \subset \Omega$ est un compact régulier du plan complexe tel que $\Omega \smallsetminus K$ soit connexe, ainsi que des applications à des problèmes d'interpolation et estimations de ε-entropie. On y trouve les prémices de nombreuses idées et méthodes qui conduiront plus tard, avec Ahmed Zeriahi, Józef Siciak et autres, à de remarquables applications – avec Zeriahi il s'agit des fonctions séparement analytiques par exemple.

4. La fonction extrémale de Siciak–Zakharyuta

Je rappelle des notions classiques.

Étant donné un sous-ensemble E de $\mathbf{C}^n$ on définit la *fonction extrémale de Siciak–Zakharyuta* $z \mapsto L^*(E, z)$ comme la régularisée supérieure de la fonction

$$L(E, \cdot) = \sup_u \big(u \in \mathscr{L}(\mathbf{C}^n); u \leqslant 0 \text{ sur } E\big),$$

où $\mathscr{L}(\mathbf{C}^n)$ est la classe des fonctions plurisousharmoniques de croissance minimale :

$$u \in \mathscr{L}(\mathbf{C}^n) \ \text{ ssi } \ u \in \mathrm{PSH}(\mathbf{C}^n) \text{ et } \sup_{z \in \mathbf{C}^n} \big(u(z) - \log \|z\|\big) < +\infty.$$

5. Les ensembles réguliers

Un sous-ensemble E de $\mathbf{C}^n$ est dit *régulier au sens de Siciak au point* p si $L^*(E, p) = 0$.

On dit que l'ensemble E satisfait à la *condition polynomiale de Leja au point* p si pour toute famille F de polynômes avec $\sup_{f \in F} |f(z)| < +\infty$ pour tout $z \in E$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une constante M et un voisinage U de p tels que

$$|f(z)| \leqslant M \exp(\varepsilon \deg(f)), \qquad z \in U, \ f \in F. \tag{5.1}$$

La condition a été introduite par Józef Siciak (1969). Elle est nommée en l'honneur de Franciszek Leja (1885–1979).

On dit aussi qu'une paire (E, μ), où E est un ensemble et μ une mesure ou une capacité, satisfait à la *condition de Leja* si l'inégalité (5.1) reste valable si on suppose seulement que $\sup_{f \in F} |f(z)| < +\infty$ pour μ-presque tout $z \in E$.

Avec Ahmed Zeriahi, Van a publié un article [1983a] où ils démontrent un résultat important : Pour tout compact E L-régulier dans $\mathbf{C}^n$ il existe une mesure de Radon $\mu \geqslant 0$ telle que pour tout $X \subset E$ avec $\mu(X) = 0$, la différence $E \smallsetminus X$ est aussi L-régulier. Ils en déduisent une inégalité de type Bernstein–Markov et un résultat nouveau sur le prolongement analytique.

Dans un article [1984b] Nguyen Thanh Van et Wiesław Pleśniak établissent l'invariance sous des applications holomorphes de la notion de point régulier au sens de Siciak ainsi que de la condition polynomiale de Leja. C'est-à-dire que si E est régulier au point p et si h est une application holomorphe définie dans un voisinage de $\widehat{E}$ (l'enveloppe polynomialement convexe de E), alors $h(E)$ est régulier en $h(p)$; si la condition de Leja est satisfaite au point p pour une paire (E, μ), alors elle est satisfaite en $h(p)$ par la paire $(h(E), \nu)$ si ν est une mesure telle que l'image inverse $h^{-1}(M)$ de tout sous-ensemble borelien M de $h(E)$ de ν-mesure nulle soit de μ-mesure nulle.

Van a poursuivi cette étude en [1985]. Il était connu que la condition polynomiale de Leja est équivalente à la régularité pour un ensemble compact de $\mathbf{C}^n$. Or il étend cette équivalence : il montre que

- pour tout ensemble borné E, la régularité au point p entraine la condition de Leja en p ;
- réciproquement, si $E \smallsetminus X$ satisfait à la condition de Leja en p pour tout ensemble pluripolaire X, alors E est régulier au point p.

Nguyen Thanh Van et Bachir Djebbar ont publié [1989a] une étude des propriétés asymptotiques d'une suite orthonormale de polynômes harmoniques de deux variables réelles. Ils démontrent que la capacité logarithmique d'un compact K polynomialement convexe et satisfaisant à la condition (H) de Józef Siciak peut être déterminée par le comportement asymptotique des polynômes harmoniques.

Ici la condition (H) veut dire que, pour tout $b > 1$ il existe une constante M et un voisinage U de K tels que $\|h\|_U \leqslant M b^{\deg h} \|h\|_E$ pour tout polynôme harmonique h.

6. Les fonctions séparément holomorphes

Le théorème bien connu de Friedrich Hartogs (1874–1943) sur les fonctions séparément analytiques a été généralisé dans un article de Nguyen Thanh Van et Ahmed Zeriahi [1991b] ; c'est d'après *MathSciNet* l'ouvrage le plus cité de Van. Cet article contient une généralisation d'un théorème de Zakharyuta dans *Sbornik* (1976) et utilise aussi des résultats d'Eric Bedford et B. A. Taylor. Pour énoncer ce théorème on note $z \mapsto \omega^*(D, E, z)$ la régularisée de

$$\omega(D, E, \cdot) = \sup_u \big(u \in \mathrm{PSH}(D); u \leqslant 1 \text{ dans } D, u \leqslant 0 \text{ sur } E\big), \quad z \in D,$$

et on l'appelle la *fonction extrémale relative* de (D, E). Ici $E \subset D \subset \mathbf{C}^n$. Cette fonction a été introduite par Siciak (1969).

Théorème 6.1. — *On suppose que $D_1 \subset \mathbf{C}^{n_1}$ est pseudoconvexe et que E_1 est $\mathscr{K}$-analytique. (On ne fait pas d'hypothèse sur D_2 et E_2.) Si f est une fonction définie sur la croix $X = (D_1 \times E_2) \cup (E_1 \times D_2)$ telle qu'elle soit holomorphe en z_1 pour tout $z_2 \in E_2$ fixé et holomorphe en z_2 pour tout $z_1 \in E_1$ fixé, alors il existe une fonction g holomorphe dans*

$$\widehat{X} = \{(z_1, z_2) \in D_1 \times D_2; \omega^*(D_1, E_1, z_1) + \omega^*(D_2, E_2, z_2) < 1\}$$

telle que $g = f$ dans $\widehat{X} \cap X$.

Si E_j est un compact $\mathbf{C}^{n_j}$-régulier, $j = 1, 2$, on a $\widehat{X} \supset X$ et on retrouve le théorème de Zakharyuta : $g\big|_X = f$.

La démonstration de ce résultat utilise de façon essentielle la théorie des bases communes de deux espaces de fonctions holomorphes.

La démonstration se fait par des généralisations successives : (1) E_1 est compact ; (2) E_1 est de type F_σ ; (3) E_1 est $\mathscr{K}$-analytique.

7. Les systèmes doublement orthogonaux de fonctions holomorphes

Dans un article en commun avec Józef Siciak [1991a] les auteurs étudient comment on peut retrouver la fonction extrémale relative $\omega^*(D, E, \cdot)$ et la fonction extrémale $L^*(E, \cdot)$ à partir des bases formées des polynômes. On utilise l'idée de bases doublement orthogonales : on prend une suite $(B_k)_{k \in \mathbf{N}}$ de polynômes obtenue par le procédure de Gram–Schmidt dans l'espace $L^2(E, \mu)$, où μ est une mesure sur E qui s'annule sur tout ensemble pluripolaire, donc orthonormale dans cet espace, et en même temps orthogonale dans l'espace de Bergman $L^2_B(D)$.

Ahmed Zeriahi avait démontré en 1985 que, sous certaines hypothèses,

$$\limsup_{k \to +\infty} \frac{\log |B_k(z)|}{\deg B_k} = L^*(E, z), \qquad z \notin E.$$

Van et Józef démontrent maintenant que, sous certaines hypothèses, la régularisée ω_0^* de

$$\omega_0 = \limsup_{k \to +\infty} \frac{\log |B_k(z)|}{\log \|B_k\|_{L^2_B(D)}}$$

satisfait à $\omega^*(D,E,z)=\omega_0^*(z)$ si $\omega_0^*(z)\geqslant 0$ et $\omega^*(D,E,z)=0$ si $\omega_0^*(z)<0$. Ici (B_k) est une suite de polynômes orthonormale dans $L^2(E,\mu)$ et orthogonale dans l'espace de Bergman $L^2_B(D)$ – une suite doublement orthogonale.

Les auteurs démontrent aussi la propriété de produit de la fonction extrémale relative : Si on a p domaines pseudoconvexes D_j, chacun dans un espace $\mathbf{C}^{n_j}$, et p sous-ensembles $\mathscr{K}$-analytiques $E_j\subset D_j$, $j=1,\dots,p$, alors la fonction extrémale relative $\omega^*(D,E,z)$ définie pour

$$z=(z_1,\dots,z_p)\in D=D_1\times\cdots\times D_p\subset\mathbf{C}^n=\mathbf{C}^{n_1}\times\cdots\times\mathbf{C}^{n_p},\ \text{et}$$

$$E=E_1\times\cdots\times E_p,$$

est égale au maximum des fonctions extrémales relatives $\omega^*(D_j,E_j,z_j)$, donc

$$\omega^*(D,E,z)=\max_{j=1,\dots,p}\omega^*(D_j,E_j,z_j),\qquad z=(z_1,\dots,z_p)\in D.$$

Nguyen Thanh Van et Patrice Lassère étudient encore le phénomème des bases communes des fonctions holomorphes [1993]. On dit qu'un ouvert Ω de $\mathbf{C}\cup\{\infty\}$ est de *type* (*) si pour tout compact K de Ω et toute suite $(\Omega_k)_k$ d'ouverts tels que $K\subset\Omega_k\subset\Omega_{k+1}\subset\Omega$ et $\bigcup\Omega_k=\Omega$ on a

$$\lim_{k\to\infty}\omega^*(\Omega_k,K,z)=\omega^*(\Omega,K,z),\qquad z\in\Omega.$$

Alors les auteurs démontrent que si Ω et $(\mathbf{C}\cup\{\infty\})\smallsetminus K$ sont tous les deux de type (*), si $\mathscr{O}(\Omega)$ et $\mathscr{O}(K)$ ont une base commune (f_n) et si la frontière de $\Omega_\alpha=\{z\in\Omega;\omega^*(\Omega,K,z)<\alpha\}$ dans $\mathbf{C}\cup\{\infty\}$ pour un certain nombre $\alpha\in\,]0,1[$ est contenue dans $\Omega\smallsetminus K$, alors (f_n) est aussi une base de $\mathscr{O}(\Omega_\alpha)$ pour cet α. Sous une hypothèse supplémentaire (Ω est supposé simplement connexe) ils démontrent que $\omega^*(\Omega,K,z)=0$ pour tout $z\in K$ et que (f_n) est une base dans $\mathscr{O}(\Omega_\alpha)$ pour tout $\alpha\in\,]0,1[$.

À la suite des articles [1991b] et [1995] de Van et Ahmed, Omar Alehyane et Jean-Marc Hécart (2004) démontrent une propriété de stabilité de la fonction extrémale relative : ils disent qu'un domaine D possède la *propriété* (P^*) si pour tout sous-ensemble E de D on a

$$\lim_{k\to\infty}\omega^*(D_k,E,z)=\omega^*(D,E,z),\qquad z\in D,$$

où (D_k) est une suite exhaustive quelconque de D. Les auteurs constatent que tout ouvert borné de $\mathbf{C}^n$ admet la propriété (P^*), mais il démontrent l'existence d'ouverts pseudoconvexes de $\mathbf{C}^n$ qui ne le l'admettent pas. Ensuite ils donnent plusieurs caractérisations des domaines qui possèdent la propriété (P^*).

Dans un travail récent Patrice et Van [2006a] reviennent à la théorie des bases de Schauder communes et la relient aux fonctions qui ont les domaines Ω_α comme domaines naturels.

8. Les fonctions séparément harmoniques

Déjà Pierre Lelong (1961:554) avait démontré un résultat sur l'analyticité des fonctions $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q \ni (x, y) \mapsto f(x, y)$ qui sont analytiques en x pour y fixé et analytiques en y pour x fixé.

Nguyen Thanh Van étudie les fonctions séparément harmoniques [2000] en affaiblissant les hypothèses de Lelong et en introduisant la condition polynomiale de Leja. On prend deux domaines $D_1 \subset \mathbf{R}^{n_1}$ et $D_2 \subset \mathbf{R}^{n_2}$ et un sous-ensemble $E_1 \subset D_1$. On suppose que $f\colon D_1 \times D_2 \to \mathbf{R}$, que $f(x, \cdot)$ est harmonique dans D_2 pour tout $x \in E_1$ et que $f(\cdot, y)$ est harmonique dans D_1 pour tout $y \in D_2$. On suppose aussi que E_1 est localement d'unicité pour les fonctions harmoniques en un certain point a de D_1 et que E_1 vérifie la condition de Leja au même point a ; enfin qu'il existe un compact K_1 dans D_1 qui contient a et E_1 tel que $\mathbf{R}^{n_1} \smallsetminus K_1$ soit connexe. Alors, f est harmonique dans $D_1 \times D_2$ [1974:74].

Les fonctions holomorphes d'une variable complexe sont des solutions de l'équation elliptique de Cauchy–Riemann. Dans sa conférence à Bielsko-Biała en 2001 [2003], Van généralise des résultats sur les fonctions séparément analytiques aux fonctions qui satisfont à d'autres équations elliptiques homogènes.

Jean-Marc Hécart (2001) reprend ces méthodes et démontre un théorème du type de Lelong, mais en affaiblissant les hypothèses et en utilisant aussi la condition polynomiale de Leja.

9. Collaboration et inspiration

Comme je l'ai déjà dit, Nguyen Thanh Van a soutenu et inspiré la collaboration mathématique avec le Viêtnam de façon admirable pendant beaucoup d'années.

Il a par exemple organisé trois colloques internationaux au Viêtnam, à savoir à l'Université de Dalat en 1994 (auquel j'ai participé) ; à l'Institut de mathématiques de Hanoï, en 1996 ; et encore en 1998 à l'Institut de mathématiques de Hanoï.

Van a fait trois cours de Master au Viêtnam, à savoir à l'École normale supérieure de Saïgon en août–septembre 2003 ; à l'École normale supériere de Saïgon juillet 2004 ; et à l'Institut de mathématiques de Hanoï en décembre 2006. Il a monté avec Ha Huy Khoai et Ahmed Zeriahi une école d'été d'analyse complexe en 2004.

Le programme *ForMathVietnam* a comme but l'aide à la formation des jeunes chercheurs en mathématiques au Viêtnam, fondé en 1996 à l'initiative des mathématiciens français et vietnamiens, à savoir : Frédéric Pham (Nice), Nguyen Thanh Van et Jean-Pierre Ramis (Toulouse), Bernard Malgrange (Grenoble), Ha Huy Khoai et Dinh Dung (Hanoï).

Ce travail a abouti à l'organisation de quatre congrès internationaux entre 1995 et 2005, et en plusieurs thèses en co-tutelle. Dans ces activités la géométrie complexe et l'analyse en plusieurs variables complexes, en particulier la théorie pluripotentiel, donc justement les domaines de recherche de Nguyen Thanh Van, prennent une place importante. Nguyen Thanh Van lui-même ainsi que d'autres mathématiciens toulousains comme Ahmed Zeriahi, Pascal Thomas et Jean-Paul Calvi y ont joué un grand rôle. En témoignent les vingt-sept thèses soutenues dans le cadre de cette coopération, dont des thèses en co-tutelle (directeur de thèse vietnamien, codirecteur ou parrain français) :

1996. Dang Duc Trong (Université de HCM-ville), thèse soutenue le 13 juin 1996 à l'École Polytechnique (Paris).

1998. Dinh Ngoc Thanh (Paris 13 ; Université de HCM-ville). [A. Grigis ; Dang Dinh Ang.]

1999. Nguyên Thanh Quang (Grenoble 1, ENS de Vinh). [A. Panichkin ; Ha Huy Khoai, IM de Hanoï.] En poste à l'Université de Vinh.

2000. Pham Tiên Son (Université de Dalat). En poste à Dalat.

2000. Huynh Van Ngai (Université de Quy Nhon). Soutenance à Limoges le 6 Avril 2000. En poste à Quy Nhon.

2000. Nguyên Quang Diêu (Toulouse 3, ENS de Hanoï), *Convexité locale des unions de graphes totalement réels et hyperbolicité complète des domaines de Hartogs* [Dirigée par Pascal Thomas (Université Paul Sabatier, Toulouse) et Do Duc Thai (ENS de Hanoï).] Bourse BDI/PED CNRS de 3 ans à compter d'octobre 1997 ; soutenance en 2000.

2001. Ta Thi Hoai An (Grenble 1, IM de Hanoï), *Ensemble d'unicité pour les foncteurs méromorphes et p-adiques.* [A. Panichkin, Université Joseph Fourier Grenoble ; Ha Huy Khoai.]

2001. Le Thi Thanh Nhan (Grenoble 1, IM de Hanoï). [Marcel Morales, Nguyen Tu Cuong.] En poste à Thai Nguyen.

2001. Nguyên Viêt Anh (Marseille). [E. H. Youssfi.] En poste à Paris 11.

2002. Trinh Duc Tai (Université de Dalat), *Analyse spectrale d'opérateurs complexes.* [Frédéric Pham (Nice), E. Delabaere, Nguyen Huu Duc (Dalat).] En poste à l'Université de Dalat.

2002. Nguyên Thi Tuyêt Mai (Toulouse 3, ENS de Hanoï), *Extensions d'applications holomorphes à valeurs dans certains espaces complexes hyperboliques.* [Dirigée par Nguyen Thanh Van (Université Paul Sabatier, Toulouse) et Do Duc Thai (ENS de Hanoï).] En poste à Thai Nguyen.

2002. Nguyên Van Trào (ENS de Hanoï), *Disques extrémaux et applications.* [Dirigée par Pascal Thomas (Université Paul Sabatier, Toulouse) et Do Duc Thai (ENS de Hanoï).] Soutien direct de Formath et de Toulouse. En poste à ENS Hanoï.

2003. Phan Van Thiên (Nice, IM de Hanoï), *Segre upper bound for the regular index of fat points in a projective space.* [Dirigée par André Hirschowitz (Université Nice) et Ngo Viêt Trung (IM Hanoï).] En poste à Hue.

2004. Nguyen Thi Hong Loan (Grenoble 1, IM de Hanoï). [Marcel Morales ; Nguyen Tu Cuong.] En poste à Vinh.

2004. Mai Duc Thanh (Polytechnique Paris). [F. Jouve et Ph. Lefloch.] En poste à l'Université polytechnique de HCM-ville.

2005. Tran Van Tan (Brest, ENS de Hanoï). [G. Detloff ; Do Duc Thai.] En poste ENS de Hanoï.

2005. Ngo Dac Tuan (Paris 11). [F. Laffourge.] En poste CNRS Paris 13.

2005. Tran Ngoc Nam (Paris 13 ; VNU Hanoï). [Lionel Schwartz ; Nguyen Huu Viet Hung.]

2006. Ha Minh Lam, bourse CNRS de trois ans à compter de 2002, soutenance à l'Université Joseph Fourier Grenoble.

2006. Tran Ngoc Nam (UNV Hanoï), bourse CNRS à compter de janvier 2002. Puis en poste UNV Hanoï (thèse soutenue à UNV Hanoï).

2006. Nguyen Manh Hung (Paris 1). [Le Van Cuong, Paris 1 ; Dinh The Luc, Avignon.] En poste à CNRS, Toulouse.

2007. Nguyen Dinh Tuan (Avignon). [Dinh The Luc ; Phan Quoc Khanh.] En poste à l'Université de HCM-ville.

2008. Nguyen Hong Quang (Avignon). [J.-F. Bonastre ; P. Nocera ; Trinh V. Loan.]

2009. Ninh Van Thu (Toulouse 3 ; ENS Hanoï). [François Bertheloot ; Do Duc Thai.]

2010. Nguyen T. Ha Huong (Paris 7). [Jean-Renaud Vialla.]

2010. Trinh Tuan Phong (Paris 13).

2010. Le Vi (Marseille). [E. Pardoux.]

Remerciements

Je tiens à remercier Nguyen Thanh Van, Patrice Lassère et Pascal Thomas de l'aide précieuse qu'ils m'ont donnée pendant la préparation de cette note.

Bibliographie

Alehyane, Omar ; Hécart, Jean-Marc (2004). — Propriété de stabilité de la fonction extrémale relative. *Potential Anal.* **21**, no. 4, 363–373.

Hécart, Jean-Marc (2001). — Sur un théorème de P. Lelong pour les fonctions solutions d'une équation aux dérivées partielles elliptique. *Potential Anal.* **15**, no. 3, 245–254.

Lelong, Pierre (1961). — Fonctions plurisousharmoniques et fonctions analytiques de variables réelles. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **11**, 515–562.

Martineau, André (1968). — Sur la notion d'ensemble fortement linéellement convexe. *An. Acad. Brasil. Ci.* **40**, 427–435.

Rice, John R. (1971). — The degree of convergence for entire functions. *Duke Math. J.* **38**, 429–440.

Siciak, Józef (1969). — Separately analytic functions and envelopes of holomorphy of some lower dimensional subsets of $\boldsymbol{C}^n$. *Ann. Polon. Math.* **22**, no. 2, 145–171.

Winiarski, Tadeusz (1970). — Approximation and interpolation of entire functions. *Ann. Polon. Math.* **23**, no. 3, 259–273.

Zaharjuta, V. P. [Zakharyuta, Vyačeslav] (1976). — Fonctions séparément analytiques, généralisations du théorème de Hartogs et enveloppes d'holomorphie [en russe]. *Mat. Sb. (N.S.)* **101**(143), no. 1, 57–76, 159.

Travaux de Nguyen Thanh Van

[1965]. Nguyen Thanh Van. Bases de Schauder dans certains espaces vectoriels topologiques. *Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse* (4) **28** (1964), 139–147 (1965).

[1966]. Nguyen Thanh Van. Sur l'interpolation d'Abel–Gontcharoff des fonctions entières de n variables complexes. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **263**, A782–A784.

[1967]. Nguyen Thanh Van. Sur les bases de Schauder de l'espace des fonctions holomorphes dans un domaine simplement connexe. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **264**, A1053–A1055.

[1968a]. Nguyen Thanh Van. Sur une classe de bases de l'espace des fonctions holomorphes dans un polydisque. *Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse* (4) **30** (1966), 85–94.

[1968b]. Nguyen Thanh Van. Sur certaines interpolations des fonctions analytiques de n variables complexes. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **266**, A199–A201.

[1969]. Nguyen Thanh Van. Bases communes des espaces de fonctions holomorphes. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **269**, A460–A461.

[1972a]. Nguyen Thanh Van. Croissance et meilleure approximation polynomiale des fonctions entières. *Ann. Polon. Math.* **26**, 325–333 (+ errata).

[1972b]. Nguyen Thanh Van. Bases de Schauder dans certains espaces de fonctions holomorphes. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **22**, no. 2, 169–253. [Article basé sur la thèse de Nguyen Thanh Van.]

[1973]. Nguyen Thanh Van. Bases communes pour certains espaces de fonctions harmoniques. *Bull. Sci. Math.* (2) **97**, 33–49.

[1974]. Siciak, Józef ; Nguyen Thanh Van. Remarques sur l'approximation polynomiale. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A* **279**, 95–98.

[1975a]. Nguyen Thanh Van. Sur l'équivalence des bases de Schauder communes. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **280**, Ai, A1193–A1196.

[1975b]. Nguyen Thanh Van. Familles de polynômes ponctuellement bornées. *Ann. Polon. Math.* **31**, no. 1, 83–90.

[1976/77]. Nguyen Thanh Van. Fonctions séparément analytiques et prolongement analytique faible en dimension infinie. *Proceedings of the Sixth Conference on Analytic Functions (Cracovie, 1974). Ann. Polon. Math.* **33**, no. 1–2, 71–83.

[1977a]. Nguyen Thanh Van. Sur les fonctions analytiques de la forme $f(x,y) = \big(\sum_{|\alpha|\leqslant q} A_\alpha(x)\cdot y^\alpha\big)\exp h(x,y)$. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **284**, no. 22, A1447–A1449.

[1977b]. Nguyen Thanh Van. Sur les fonctions analytiques de la forme $f(x,\,y) = \big(\sum_{\alpha\leqslant q} A_\alpha(x)\cdot y^\alpha\big)\exp h(x,\,y)$. *Colloque d'Analyse Harmonique et Complexe*, 4 pp. Marseille : Université Aix-Marseille I.

[1978]. Nguyen Thanh Van. Sur le lemme de Hartogs dans les espaces vectoriels topologiques de Baire. Avec une remarque par Pierre Lelong. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **287**, no. 6, A421–A424.

[1980]. Nguyen Thanh Van. Sur les bases polynomiales semi-simples de l'espace $H(K)$. *Analytic functions, Kozubnik 1979 (Proc. Seventh Conf., Kozubnik, 1979)*, pp. 370–383. Lecture Notes in Mathematics **798**. Berlin ; New York : Springer.

[1983a]. Nguyen Thanh Van ; Zeriahi, Ahmed. Familles de polynômes presque partout bornées. *Bull. Sci. Math.* (2) **107**, no. 1, 81–91.

[1983b]. Nguyen Thanh Van. Sur les fonctions analytiques $f(x,\,y)$ dont l'ensemble des zéros par rapport à y est algébrique. *Complex analysis (Varsovie 1979)*, 269–273. Banach Center Publ. **11**. Varsovie : PWN.

[1984a]. Analyse complexe. *Proceedings of the conference held at the Université Paul Sabatier, Toulouse, May 24–27, 1983.* É. Amar ; R. Gay ; Nguyen Thanh Van (Réd.). Lecture Notes in Mathematics **1094**. Berlin : Springer-Verlag. ix+184 pp.

[1984b]. Nguyen Thanh Van ; Pleśniak, W[iesław]. Invariance of L-regularity and Leja's polynomial condition under holomorphic mappings. *Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A* **84**, no. 2, 111–115.

[1985]. Nguyen Thanh Van. Condition polynomiale de Leja et L-régularité dans $\mathbf{C}^n$. *Ann. Polon. Math.* **46**, 237–241.

[1989a]. Nguyen Thanh Van ; Djebbar, Bachir. Propriétés asymptotiques d'une suite orthonormale de polynômes harmoniques. *Bull. Sci. Math.* (2) **113**, no. 2, 239–251.

[1989b]. Nguyen Thanh Van. Bases polynomiales et approximation des fonctions séparément harmoniques dans $\mathbb{C}^\nu$. *Bull. Sci. Math.* **113**, no. 3, 349–361.

[1991a]. Nguyen Thanh Van ; Siciak, Józef. Fonctions plurisousharmoniques extrémales et systèmes doublement orthogonaux de fonctions analytiques. *Bull. Sci. Math.* **115**, no. 2, 235–243.

[1991b]. Nguyen Thanh Van ; Zeriahi, Ahmed. Une extension du théorème de Hartogs sur les fonctions séparément analytiques. *Analyse complexe multivariable : récents développements (Guadeloupe, 1988)*, 183–194, Sem. Conf., **5**. Rende : EditEl.

[1993]. Nguyen Thanh Van ; Lassère, Patrice. Bases communes holomorphes : nouvelle extension du théorème de Whittaker. *Ann. Polon. Math.* **58**, no. 3, 311–318.

[1995]. Nguyen Thanh Van ; Zeriahi, Ahmed. Systèmes doublement orthogonaux de fonctions holomorphes et applications. Topics in complex analysis (Warsaw, 1992), 281–297, Banach Center Publications **31**. Varsovie : Polish Academy of Sciences, Institute of Mathematics.

[1997a]. Nguyen Thanh Van. Note on doubly systems [doubly orthogonal systems] of Bergman. Dedicated to Professor Vyacheslav Pavlovich Zahariuta. *Linear Topol. Spaces Complex Anal.* **3**, 157–159.

[1997b]. Nguyen Thanh Van. Separate analyticity and related subjects. *Vietnam J. Math.* **25**, no. 2, 81–90.

[2000]. Nguyen Thanh Van. Fonctions séparément harmoniques, un théorème de type Terada. *Potential Anal.* **12**, no. 1, 73–80.

[2002a]. Ha Huy Khoai ; Nguyen Thanh Van. On the mathematical work of Le Van Thiem. Dedicated to the memory of Le Van Thiem (Hanoï, 1998). *Acta Math. Vietnam.* **27**, no. 3, 249–250.

[2002b]. Dedicated to the memory of Le Van Thiem. Papers from the International Conference on Complex Analysis and Applications held in Hanoi, September 24–26, 1998. Réd. Ha Huy Khoai, Nguyen Thanh Van, Jean-Pierre Ramis et Chung-Chun Yang. *Acta Math. Vietnam.* **27**, no. 3, pp. i–iv et 245–424. Vietnamese Academy of Science and Technology, Institute of Mathematics, Hanoi.

[2003]. Nguyen Thanh Van. Analytic continuation for some classes of separately analytic functions of real variables. *Proceedings of Conference on Complex Analysis (Bielsko-Biała, 2001). Ann. Polon. Math.* **80**, 203–209.

[2006a]. Lassère, Patrice ; Nguyen Thanh Van. Gaps and Fatou theorems for series in Schauder basis of holomorphic functions. *Complex Var. Elliptic Equ.* **51**, no. 2, 161–164.

[2006b]. Lassère, Patrice ; Nguyen Thanh Van. Du vieux et du neuf sur le théorème de changement de Fatou. *Actes des Journées Complexes de Rabat en l'honneur du Pr. Jenane, juin 2006.* [Cet article n'est pas mentionné dans MathSciNet.]

[2008]. Lassère, Patrice ; Nguyen Thanh Van. Hadamard gap theorem and overconvergence for Faber–Erokhin expansions. *Vietnam J. Math.* **36**, no. 4, 387–393.

Adresse de l'auteur : Univerversité d'Uppsala, Boîte postale 480, SE-751 60 Uppsala, Suède
Adresses électroniques : `kiselman@math.uu.se, christer@kiselman.eu`