UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen

ÖVNINGAR, Blad 1
Fouriermetoder, K & W
2000 08 29 ovning000829

1.1. Bestäm Laplacetransformerna till a) $2t^2 - e^{-t}$, b) $(t^2+1)^2$,

c) $(\sin t - \cos t)^2$, d) $\cosh^2 4t$, e) $e^{2t}\sin 3t$, f) $t^3 \sin 3t$.

1.2. Bestäm inversa Laplacetransformen av a) $\dfrac{1}{s(s+1)}$, b) $\dfrac{3}{(s-1)^2}$, c) $\dfrac{1}{s(s+2)^2}$,

d) $\dfrac{5}{s^2(s-5)^2}$, e) $\dfrac{1}{(s-a)(s-b)}$ (två fall!), f) $\dfrac{1}{s^2+4s+29}$.

1.3. Bestäm inversa Laplacetransformen av a) $\dfrac{1+e^{-s}}{s}$, b) $\dfrac{e^{-s}}{(s-1)(s-2)}$,

c) $\ln\dfrac{s+3}{s+2}$, d) $\ln\dfrac{s^2+1}{s(s+3)}$, e) $\dfrac{s+1}{s^{4/3}}$, f) $\dfrac{\sqrt{s}-1}{s}$.
[I c) och d) kan man använda regeln $\mathcal{L}(f)' = -\mathcal{L}(tf)$. I e) och f) kan man använda formeln $\mathcal{L}(t^a) = \Gamma(a+1)s^{-a-1}$, $\operatorname{Re} a > -1$. Dessa formler finns i *Beta,* β:232:L6, resp. β:234:L46.]

1.4. Bestäm Laplacetransformen till $f_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon & \text{för } 0 < t < \varepsilon, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$
Vad händer med $\mathcal{L}(f_\varepsilon)$ då $\varepsilon \to 0$?

1.5. Laplacetransformera $f(t) = \begin{cases} (t-1)^2 & \text{för } t > 1, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$

1.6. Låt H beteckna Heavisides språngfunktion. Bestäm Laplacetransformen till $f(t) = t\,e^{-2t}\,H(t-1)$.

1.7. Bestäm Laplacetransformen av $f(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u}\,du$.

1.8. Beräkna $\displaystyle\int_0^\infty t\,e^{-3t}\sin t\,dt$. (Ledning: beräkna $\mathcal{L}(f)(3)$ för lämpligt f.)

1.9. Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-3t}-e^{-6t}}{t}\,dt$.

1.10. Ett radioaktivt preparat minskar sin massa u enligt formeln $u'(t) = -0,0004u(t)$, där t mäts i år och där $u(0) = 1\,\mathrm{g}$. Bestäm halveringstiden och Laplacetransformen $\mathcal{L}(u)$.

1.11. En oscillator styrs av differentialekvationen $h''(t) + 4h(t) = 0$. Hur stort blir största utslaget och när inträffar det om ingångsvärdena är $h(0) = 0\,\mathrm{m}$, $h'(0) = 1\,\mathrm{m/s}$? Vad blir $\mathcal{L}(h)$?