UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen

ÖVNINGAR, Blad 1
Fouriermetoder
2001 08 26 ovning010826

1.1. Bevisa med hjälp av definitionen $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ räkneregeln $(d/dt)e^{ct} = ce^{ct}$, $t \in \mathbf{R}$, där $c = a + ib$ är en komplex konstant. Visa sedan samma regel om man i stället definierar $e^z = \sum_0^\infty z^n/n!$ (och räknar friskt med konvergenta serier).

1.2. Radium ${}^{226}_{88}\mathrm{Ra}$ övergår under utsändande av α-strålar till radon ${}^{222}_{86}\mathrm{Rn}$, varvid mängden radium minskar enligt formeln $u'(t) = -0,0004327u(t)$, där t mäts i år. Bestäm halveringstiden. Bestäm också Laplacetransformen $\mathcal{L}(u)$, om $u(0) = 1\,\mathrm{g}$. Ange $\mathcal{L}(u)(0)$ i kilogramår.

1.3. En oscillator styrs av differentialekvationen $h''(t) + 4h(t) = 0$, där t mäts i sekunder och h i meter. Hur stort blir största utslaget och när inträffar det om ingångsvärdena är $h(0) = 0\,\mathrm{m}$, $h'(0) = 0,01$ meter per sekund (m/s)? Vad blir $\mathcal{L}(h)$? Ange $\mathcal{L}(h)(0)$ i sekundmeter (sm). Vad är medelhastigheten under tiden fram till den första största avvikelsen? Hur blir det om i stället $h'(0) = 0,02\,\mathrm{m/s}$?

1.4. Bestäm Laplacetransformen av $f(t) = e^{t^2/2}$.

1.5. Bestäm Laplacetransformerna till a) $2t^2 - e^{-t}$, b) $(t^2+1)^2$,

c) $(\sin t - \cos t)^2$, d) $\cosh^2 4t$, e) $e^{2t}\sin 3t$, f) $t^3 \sin 3t$.

1.6. Bestäm inversa Laplacetransformen av a) $\dfrac{1}{s(s+1)}$, b) $\dfrac{3}{(s-1)^2}$, c) $\dfrac{1}{s(s+2)^2}$,

d) $\dfrac{5}{s^2(s-5)^2}$, e) $\dfrac{1}{(s-a)(s-b)}$ (två fall), f) $\dfrac{1}{s^2+4s+29}$.

1.7. Bestäm inversa Laplacetransformen av a) $\dfrac{1+e^{-s}}{s}$, b) $\dfrac{e^{-s}}{(s-1)(s-2)}$,

c) $\ln\dfrac{s+3}{s+2}$, d) $\ln\dfrac{s^2+1}{s(s+3)}$, e) $\dfrac{s+1}{s^{4/3}}$, f) $\dfrac{\sqrt{s}-1}{s}$.
[I c) och d) kan man använda regeln $\mathcal{L}(f)' = -\mathcal{L}(tf)$. I e) och f) kan man använda formeln $\mathcal{L}(t^a) = \Gamma(a+1)s^{-a-1}$, $\operatorname{Re} a > -1$. Dessa formler finns i *Beta,* fjärde upplagan, 326:L6, resp. 329:L55.]

1.8. Bestäm Laplacetransformen till $f_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon & \text{för } 0 < t < \varepsilon, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$
Vad händer med $\mathcal{L}(f_\varepsilon)$ då $\varepsilon \to 0$?

1.9. Laplacetransformera $f(t) = \begin{cases} (t-1)^2 & \text{för } t > 1, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$

1.10. Låt H beteckna Heavisides språngfunktion. Bestäm Laplacetransformen till $f(t) = t\,e^{-2t}\,H(t-1)$.

1.11. Bestäm Laplacetransformen av $f(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u}\,du$.

1.12. Beräkna $\displaystyle\int_0^\infty t\,e^{-3t}\sin t\,dt$. (Ledning: beräkna $\mathcal{L}(f)(3)$ för lämpligt f.)

1.13. Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-3t}-e^{-6t}}{t}\,dt$.

Svar och anvisningar till vissa av övningarna på blad 1, 2001 08 26

1.2. Man får att $\mathcal{L}(u')(s) = s\mathcal{L}(u)(s) - u(0) = -0,0004327\mathcal{L}(u)(s)$, vilket ger $\mathcal{L}(u) = u(0)/(s+0,0004327)$ och $\mathcal{L}(u)(0) = 2311,07$ g·år = 2,31107 kg·år. Vidare blir $u(t) = u(0)e^{-0,0004327t}$, vilket gör att halveringstiden $t_{1/2}$ måste uppfylla $1/2 = e^{-0,0004327t_{1/2}}$. Av detta följer $t_{1/2} = (\log 2)/0,0004327 = 1602$ år.

1.3. Laplacetransformen för h'' måste uppfylla $\mathcal{L}(h'')(s) = s^2\mathcal{L}(h) - sh(0) - h'(0) = -4\mathcal{L}(h)(s)$, varav $\mathcal{L}(h)(s) = h'(0)/(s^2+4)$ och $h(t) = \frac{1}{2}h'(0)\sin 2t$. Speciellt gäller $\mathcal{L}(h)(0) = h'(0)/4 = 2,5\,\mathrm{s{\cdot}mm}$. Det största utslaget blir $\frac{1}{2}h'(0) = 0,005\,\mathrm{m} = 5\,\mathrm{mm}$. Det inträffar första gången vid tiden $t = \pi/4 \approx 0,7854\,\mathrm{s}$. Medelhastigheten under denna tid är alltså $5 \cdot 4/\pi \approx 6,366\,\mathrm{mm/s}$, vilket verkar rimligt med tanke på initialhastigheten $10\,\mathrm{mm/s}$. Om $h'(0)$ i stället är $20\,\mathrm{mm/s}$ så ökar utslaget med en faktor två, liksom alla hastigheter. Däremot ändras inte perioden.

1.4. Funktionen har inte någon Laplacetransform.

1.5. (a) $4/s^3 - 1/(s+1)$. (b) $4!s^{-5} + 4s^{-3} + s^{-1} = s^{-5}(s^4+4s^2+24)$. (c) $1/s - 2/(s^2+4)$. (d)

$$\frac{1}{4}\frac{1}{s-8} + \frac{1}{2s} + \frac{1}{4}\frac{1}{s+8}.$$

(e)

$$\frac{3}{(s-2)^2+9} = \frac{3}{s^2-4s+13}.$$

(f)

$$\frac{72(s^3-9s)}{(s^2+9)^4}.$$

1.6. (a) $1 - e^{-t}$. (b) $3te^t$. (c) $\frac{1}{4}(1 - e^{-2t} - 2te^{-2t})$. (d) $\frac{1}{25}(2 + 5t - 2e^{5t} + 5te^{5t})$. (e) Om $a \neq b$ så är den inversa transformen

$$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a - b};$$

om $a = b$ så är den te^{at}. (f) $\frac{1}{5}e^{-2t}\sin 5t$.

1.7. (a) $H(t) - H(t-1)$. (b) $e^{2(t-1)}H(t-1) - e^{t-1}H(t-1)$. (c) $(e^{-2t} - e^{-3t})/t$. (d) $(1 + e^{-3t} - 2\cos t)/t$. (e)

$$\frac{t^{-2/3}}{\Gamma(1/3)} + \frac{t^{1/3}}{\Gamma(4/3)}.$$

(f) $t^{-1/2}/\Gamma(\frac{1}{2}) - 1$.

1.8. $\mathcal{L}(f_\varepsilon)(s) = (\varepsilon s)^{-1}(1 - e^{-\varepsilon s})$ då $s \neq 0$; $\mathcal{L}(f_\varepsilon)(0) = 1$. Då ε går mot noll, så går $\mathcal{L}(f_\varepsilon)(s)$ mot 1 för alla s. Gränsvärdet av f_ε är det ideala elementet δ, vars Laplacetransform är 1 överallt.

1.9. Transformen blir $2s^{-3}e^{-s}$.

1.10. Transformen blir $e^{2-s}(s+3)(s+2)^{-2}$.

1.11. Man får att $\mathcal{L}(f')' = 1/(s+1) - 1/s$, varav $\mathcal{L}(f') = \log\frac{s+1}{s} + C$ med noll som enda möjliga värde på konstanten C. Därför blir $\mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) = \log\frac{s+1}{s}$ och $\mathcal{L}(f)(s) = s^{-1}\log(1 + 1/s)$.

1.12. Sätt $f(t) = t\sin t$. Man räknar ut att $\mathcal{L}(f)(3) = 0,06$.

1.13. Man ser att integralen är $\mathcal{L}(f)(0)$, där $tf(t) = e^{-3t} - e^{-6t}$. Då blir $\mathcal{L}(f') = -\mathcal{L}(tf) = 1/(s+6) - 1/(s+3)$, varav $\mathcal{L}(f) = \log\frac{s+6}{s+3} + C$. Med det enda möjliga värdet $C = 0$ ger detta $\mathcal{L}(f)(0) = \log 2$.