UPPSALA UNIVERSITET | ÖVNINGAR, Blad 2
Matematiska institutionen | Fouriermetoder
2001 09 14 ovning010914

2.1. Låt oss säga att två funktioner $f, g\colon [0, +\infty[\to \mathbf{R}$ är *väsentligen samma funktion* om det finns två positiva konstanter a, b sådana att $g(t) = bf(t/a)$, $t \geqslant 0$. (Varje teckning som illustrerar f duger då också för g om man ändrar skalorna längs axlarna.) Visa att om f och g är väsentligen samma funktion, så är deras Laplacetransformer $\mathcal{L}(f)$ och $\mathcal{L}(g)$ väsentligen samma funktion. Ange den exakta relationen.

2.2. Lös faltningsekvationen

$$f(t) + \int_0^t f(t-x)\sin x\,dx = 1, \qquad t \geqslant 0,$$

till exempel medelst Laplacetransformationen.

2.3. Beräkna faltningsprodukten $u = x * y$ av följderna $x = (2,2,2,2,2,0,0,...)$ och $y = (1,-1,0,0,...)$. Beräkna deras z-transformer X, Y och U. Verifiera att $U(z) = X(z)Y(z)$.

2.4. En växelströmsignal ges av formeln

$$f(t) = A\cos 100\pi(t - t_0), \qquad t \in \mathbf{R},$$

där t_0 är den tidpunkt då strömmen är starkast i positiv riktning. Den kan då skrivas om till

$$f(t) = a_{50}\cos 100\pi t + b_{50}\sin 100\pi t,$$

där de nya konstanterna a_{50} och b_{50} beror på tiden t_0. Ange a_{50} och b_{50} som funktioner av t_0. Visa sedan att den totala effekten hos signalen, uttryckt som $a_{50}^2 + b_{50}^2$, inte beror på t_0. (Fasförskjutning påverkar alltså inte effekten.)

2.5. Studera signalen

$$f(t) = 1 + A\cos 100\pi t + B\sin 200\pi t, \qquad t \in \mathbf{R},$$

där huvudperioden är $T = 1$ sekund och $\Omega = 2\pi/T = 2\pi$. Bestäm (med hjälp av Parsevals formel) de reella konstanterna A och B så att precis lika mycket effekt finns hos likströmmen $f_0(t) = 1$ som hos den växelströmskomponent som har frekvensen 50 Hz och den komponent som har frekvensen 100 Hz. Vad blir då signalens totala effekt?

2.6. Formulera uppgift 2.1 för funktioner $f, g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ och deras Fouriertransformer $\hat{f}, \hat{g}$ och lös denna nya uppgift.

Svar och anvisningar till övningsproblemen på blad 2, 2001 09 14

2.1. Man får $\mathcal{L}(g)(s) = ab\mathcal{L}(f)(as)$, $s \gg 0$.

2.2. Den enda lösningen med Laplacetransform är $f(t) = \frac{1}{2}(1 + \cos\sqrt{2}t)$, $t \geqslant 0$.

2.3. Man får att $u = (2, 0, 0, 0, 0, -2, 0, 0, ...)$. Vidare blir $X(z) = 2 + 2/z + 2/z^2 + 2/z^3 + 2/z^4$, $Y(z) = 1 - 1/z$, $U(z) = 2 - 2/z^5 = X(z)Y(z)$.

2.4. Man räknar ut att $a_{50} = A\cos 100\pi t_0$, $b_{50} = A\sin 100\pi t_0$. Därför blir effekten

$$\tfrac{1}{2}(a_{50}^2 + b_{50}^2) = \tfrac{1}{2}A^2(\cos^2 100\pi t_0 + \sin^2 100\pi t_0) = \tfrac{1}{2}A^2$$

oberoende av t_0.

2.5. Parseval säger att effekterna är respektive $|a_0/2|^2 = 1$, $\frac{1}{2}|a_{50}|^2 = \frac{1}{2}A^2$ och $\frac{1}{2}|b_{100}|^2 = \frac{1}{2}B^2$. För att de tre effekterna skall vara lika är det nödvändigt och tillräckligt att $1 = \frac{1}{2}A^2 = \frac{1}{2}B^2$, dvs. $A = \pm B = \pm\sqrt{2}$. Effekten blir då 3 (kilowatt eller så).

2.6. Vi sätter nu $g(x) = bf(x/a)$, $x \in \mathbf{R}$, och finner att relationen mellan transformerna blir densamma som i 2.1: $\hat{g}(\xi) = ab\hat{f}(a\xi)$, $\xi \in \mathbf{R}$.