La teoremo de Siu por abstraktaj nombroj de Lelong

Christer O. Kiselman

Upsala universitato, Upsalo, Svedujo

Resumo. En la artikolo estas enkondukitaj pliĝeneraligoj de la nocio de nombro de Lelong de plursubharmona funkcio. Por tiuj ĉi validas la teoremo de Siu, t. e. la supernivelaj aroj estas analitaj.

1. Enkonduko

La nombro de Lelong $\nu_f(x)$ de plursubharmona funkcio f ĉe punkto x enhavas informon pri la loka konduto de la funkcio. Estas ekzemple konate ke se $\nu_f(x) \geqslant 2n$, tiam e^{-f} ne estas loke integrebla ĉe x; aliflanke, se $\nu_f(x) < 2$, tiam e^{-f} loke integreblas ĉe x. (Vidu propozicion 7.1 de Skoda 1972.) Sed se $2 \leqslant \nu_f(x) < 2n$, povas okazi aŭ ne ke e^{-f} estas loke integrebla. Se f kaj g estas du plursubharmonaj funkcioj kun la sama nombro de Lelong en punkto x, simbole do $\nu_f(x) = \nu_g(x)$, kaj se h estas holomorfa bildigo, tiam oni ne povas konkludi ke $\nu_{f\circ h}(z) = \nu_{g\circ h}(z)$ en punkto z tia ke $h(z) = x$.

Tiuj fenomenoj montras ke kelkfoje estus dezirinde havi pli detalan informon pri la konduto de f ĉirkaŭ x ol la nuran nombron $\nu_f(x)$. Tian pli detalan informon liveras la rafinita nombro de Lelong $\nu_f(x, y)$, kie y estas vektoro en $\mathbf{R}^n$, kiu estis enkondukita en Kiselman (1987) kaj kies difinon ni donos ankaŭ sube, vidu difinon 3.1. Delikataj ecoj de la loka konduto de plursubharmonaj funkcioj estas la temo de parenca studo de Abrahamsson (1987).

La teoremo de Siu (1974) diras ke ĉiu supernivela aro

$$E_s = \{x \in \omega\,;\ \nu_f(x) \geqslant s\}$$

de la nombro de Lelong de plursubharmona funkcio (pli ĝenerale de pozitiva kurento fermita) estas analita, t. e. ĝi estas nulejaro de holomorfa bildigo. Tiu ĉi teoremo

Publikigita en *Aktoj de Internacia Scienca Akademio Comenius*, Ĉina Esperanto-Eldonejo, Pekino, 1992, pp. 56–65. ISBN 7-5052-0042-9.

vidigas gravan ligon inter la plursubharmonaj funkcioj kaj holomorfeco. Ĉu ankaŭ por la rafinitaj nombroj $\nu_f(x, y)$ analoga rezulto validas? La respondo estas jesa; vidu teoremon 5.2. Sed ni donos pruvon kiu ebligos al ni trakti multe pli ĝeneralajn funkcionalojn ol $\nu_f(x, y)$ (kiujn ni — eble iom atende — nomas "abstraktaj nombroj de Lelong"), vidu difinojn 4.1 kaj 4.2 kaj teoremon 5.1. Ĉi tiu pruvo estas bazita sur la pruvo de la teoremo de Siu donita en Kiselman (1979), paĝo 301.

Por $y \in \mathbf{R}^n$ la nombro $\nu_f(x, y)$ estas speciala kazo de multe pli ĝenerala nombro de Lelong enkondukita de Demailly (1985) kaj difinita helpe de alia plursubharmona funkcio φ. Vidu Demailly (1985), ekzemplo 4.6, paĝo 44; $\nu_f(x, y)$ respondas al la elekto de $\varphi(z) = \sup_j y_j^{-1} \log |z_j|$. Tamen, la intereso de $\nu_f(x, y)$ ŝajnas esti ligita ne tiom al la valoro de $\nu_f(x, y)$ por iu y fiksa, kiom al la tuta funkcio konkava $y \mapsto \nu_f(x, y)$ al kiu ni povas apliki la metodojn de la konveksa analitiko. Vidu ĉirilate Kiselman (1987). La abstraktaj nombroj de Lelong, enkondukitaj en la nuna artikolo en difinoj 4.1 kaj 4.2, estas pliĝeneraligoj de $\nu_f(x, y)$ en alia direkto.

Teoremo 5.2 estis pruvita en aprilo 1986 kaj ties pliĝeneraligo teoremo 5.1 en majo 1986. La ĉefaj rezultoj de la artikolo estis prezentitaj en junio 1986 al la konferenco "Geometric and Quantitative Complex Analysis" en Wuppertal, Federa Respubliko Germanujo. Ankaŭ por la nombroj de Lelong de Demailly (1985) validas la teoremo de Siu, pruvita de Demailly (1986), teoremo 4.14.

2. Mezvaloroj sur sferoj

Se μ estas pozitiveda mezuro en $\mathbf{C}^n$, ĝia $(2n-2)$-dimensia denso ĉe punkto x estas laŭdifine (se la limeso ekzistas)

$$\theta_\mu(x) = \lim_{r \to 0} \frac{\mu(x + rB)}{\lambda(rB \cap \mathbf{C}^{n-1})}$$

kie $x + rB$ signas la fermitan globon (bulon) kun centro x kaj radiuso r, kaj λ la Lebesgue-an mezuron en $\mathbf{C}^{n-1} \cong \mathbf{R}^{2n-2}$.

Estu nun f plursubharmona en malfermita subaro ω de $\mathbf{C}^n$; ni signos tion per $f \in PSH(\omega)$. Ĝia Laplace-aĵo

$$\mu = \frac{1}{2\pi} \triangle f = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial z_n \partial \bar{z}_n} \right)$$

estas pozitiveda mezuro, kaj ties $(2n-2)$-denso, kiu ĉiam ekzistas, estas nomata *la nombro de Lelong de f ĉe x*. Vidu Lelong (1969), paĝon 72, aŭ Lelong kaj Gruman (1986), ĉapitron 2. Ĝi estos notita $\nu_f(x) = \theta_\mu(x)$.

Ni nun konsideru la mezan valoron de f sur sfero $x + rS$ kun radiuso $r = |e^t|$:

$$u(x, t) = \fint_{|z| = |e^t|} f(x + z)\,, \qquad x + e^t B \subset \omega,$$

kie la centro x estas punkto tia ke la tuta globo $x + e^t B$ estas entenata en ω. La trastrekita integrosigno signifas mezvaloron: tute ĝenerale

$$\fint_A g = \int_A g \Big/ \int_A 1 \qquad \text{se} \qquad 0 < \int_A 1 < +\infty.$$

La nombro de Lelong de f ĉe la punkto x estas la dekliveco asimptota de la funkcio u rilate al t kiam t strebas al minus nefinio:

$$\nu_f(x) = \lim_{t\to-\infty} \frac{u(x,t)}{t}, \qquad x \in \omega.$$

Por vidi tion ni faros kalkulon unue supozante ke f estas funkcio glata:

$$\mu(x+rB) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{x+rB} \triangle f = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{x+rS} \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{2\pi} A_{2n-1} r^{2n-1} \fint\limits_{x+rS} \frac{\partial f}{\partial r} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} A_{2n-1} r^{2n-1} \frac{\partial}{\partial r} u(x, \log r) = \frac{1}{2\pi} A_{2n-1} r^{2n-2} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t),$$

kie A_{2n-1} estas la areo de unuradiusa sfero en $\mathbf{C}^n$ kaj $t = \log r$. Nun

$$\lambda(rB \cap \mathbf{C}^{n-1}) = r^{2n-2} \lambda(B \cap \mathbf{C}^{n-1}) = \frac{1}{2\pi} A_{2n-1} r^{2n-2},$$

kaj tial la meza denso en la globo $x + rB$ estas

$$\frac{\mu(x+rB)}{\lambda(rB \cap \mathbf{C}^{n-1})} = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t), \qquad t = \log r \in \mathbf{R}.$$

Strebiginte la radiuson nulen, ni ekhavas la sekvan esprimon por la punkta denso ĉe x :

$$\theta_\mu(x) = \nu_f(x) = \lim_{t\to\ -\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \lim_{t\to\ -\infty} \frac{u(x,t)}{t},$$

ĉar $t \to -\infty$ egalvaloras al $r \to 0$. Se f ne glatas, tiu ĉi formulo tamen validas se ni nur interpretas la derivaĵon $\partial u/\partial t$ kiel dedekstran aŭ demaldekstran derivaĵon.

Estu nun Ω malfermita subaro de la kartezia produto $\omega \times \mathbf{C}$ havanta la formon

$$\Omega = \{(x,t) \in \omega \times \mathbf{C}\ ; \quad \operatorname{Re} t + q(x) < 0\}$$

kie $q \in \mathit{PSH}(\omega)$. Ni supozu ke el $(x,t) \in \Omega$ sekvas ke $x + e^t B \subset \omega$, alivorte ke $\exp(-q(x))$ ne superas la distancon $d_\omega(x)$ de x al la rando de ω. Tio kompreneble nur eblas se ω estas pseŭdokonveksa. Oni scias ke tiam $u \in \mathit{PSH}(\Omega)$, kaj ni povas difini

$$f_\tau(x) = \inf_t \big(u(x,t) - \tau \operatorname{Re} t\ ; \quad (x,t) \in \Omega\big), \qquad x \in \omega, \quad \tau \geqslant 0. \tag{2.1}$$

Tiam f_τ estas plursubharmona en ω laŭ la principo pri minimumo de Kiselman (1978).

Teoremo 2.1. (Kiselman 1979). *Estu $f, q \in \mathit{PSH}(\omega)$ kun $q \geqslant -\log d_\omega$. Se $\nu_q(x) = 0$ ĉie, tiam la nombro de Lelong de f_τ estas*

$$\nu_{f_\tau}(x) = \max\big(\nu_f(x) - \tau\ ,\ 0\big), \qquad x \in \omega, \quad \tau \geqslant 0. \tag{2.2}$$

Notinda fakto estas ke $\nu_{f_\tau}(x)$ estas determinita de $\nu_f(x)$ kaj τ. Se ni fiksas la punkton $x \in \omega$, la epigrafio $\{(\tau, \alpha)\,;\ \alpha \geqslant \nu_{f_\tau}(x)\}$ estas konveksa aro en $\mathbf{R}^2$ difinita per tri neegalaĵoj, nome

$$\tau \geqslant 0\ , \qquad \alpha \geqslant 0 \qquad \text{kaj} \qquad \alpha + \tau \geqslant \nu_f(x).$$

Rimarkigo. La pruvo de teoremo 1.1 en Kiselman (1979) fakte montras ke por ke (2.2) estu valida, ne necesas supozi ke ν_q nulas ĉie en ω; sufiĉas ke $\nu_q(x) = 0$ en la konsiderata punkto x. Estas eble ankaŭ interese noti ke nur iom malpli forta rezulto povas esti pruvita pli rapide ol en Kiselman (1979); nome ni povas doni pruvon per la jenaj etapoj:
A. $\nu_{f_\tau} \geqslant \nu_f(x) - \tau$;
B. $\tau \mapsto \nu_{f_\tau}(x)$ estas konveksa funkcio;
C. Se $\tau > \nu_f(x)$ kaj $q(x) > -\infty$, tiam $f_\tau(x) > -\infty$ kaj sekve $\nu_{f_\tau}(x) = 0$.

El tio sekvas ke (2.2) validas ĉie kie q estas finia. En punkto x tia ke $q(x) = -\infty$ la pli komplika pruvo de Kiselman (1979) ŝajnas esti bezonata. Tiaj polusaj punktoj de q kompreneble povas ekzisti nur se ω egalas al la tuta spaco $\mathbf{C}^n$.

3. Mezvaloroj sur plurcirkloj

Tute analoge al la mezvaloroj sur sferoj ni nun studu la mezvaloron de plursubharmona funkcio sur plurcirklo, pli precize sur la firsto de plurdisko

$$\{x + z\ ;\quad |z_j| \leqslant |e^{y_j}|,\ j = 1, ..., n\}$$

entenata en ω, do

$$v(x, y) = \fint_{|z_j| = |e^{y_j}|} f(x + z) = \tag{3.1}$$

$$= (2\pi)^{-n} \int_0^{2\pi} ds_1 ... \int_0^{2\pi} ds_n\, f\left(x_1 + e^{y_1 + is_1}, ..., x_n + e^{y_n + is_n}\right).$$

Laŭ konataj ecoj de plursubharmonaj funkcioj, v estas plursubharmona funkcio de la variabloj $(x, y) \in \omega \times \mathbf{C}^n$ se $\operatorname{Re} y_j \ll 0$. Ni devas fiksi ĝian argumentaron, kaj tial konsideros subaron Ω de $\omega \times \mathbf{C}^n$ tian ke

$$(x, y) \in \Omega \ \text{ kaj } \ |z_j| \leqslant |e^{y_j}| \ \text{ implicas ke } \ x + z \in \omega; \qquad \text{kaj} \tag{3.2}$$

$$\text{el } \ (x, y) \in \Omega \ \text{ kaj } \ \operatorname{Re} y'_j \leqslant \operatorname{Re} y_j \ \text{ sekvas ke } \ (x, y') \in \Omega. \tag{3.3}$$

Tiam ni scias ke $v \in \mathit{PSH}(\Omega)$. En Kiselman (1987) ni enkondukis la jenan difinon:

Difino 3.1. Estu $f \in \mathit{PSH}(\omega)$ kaj estu v donita per (3.1). Tiam la funkcio

$$\mathbf{R}^n \ni y \mapsto \nu_f(x, y) = \lim_{t \to -\infty} \frac{v(x, ty)}{t}\,, \qquad x \in \omega\,,$$

estos nomita *la rafinita nombro de Lelong de f ĉe la punkto x.*

Klaras ke $\nu_f(x, y)$ estas konkava kiel funkcio de $y \in \mathbf{R}^n$ se x estas fiksa. Ĝiaj valoroj estas finiaj tie kie ĉiuj y_j pozitivas, escepte se f egalas al minus nefinio en tuta ĉirkaŭaĵo de x. Ja $y \mapsto \nu_f(x, y)$ estas tutsimple la asimptota funkcio de la funkcio konkava $y \mapsto -v(x, -y)$. Se iu y_j negativas, povas okazi ke $\nu_f(x, y) = -\infty$; ĝenerale dirite oni interesiĝas nur pri vektoroj y tiaj ke $y_j > 0$.

La rafinita nombro $y \mapsto \nu_f(x, y)$ (kiu estas do funkcio) enhavas pli da informo ol la nura nombro $\nu_f(x)$. Ĉi lasta estas speciala kazo de la unua:

Propozicio 3.2. *Estu $f \in PSH(\omega)$, $x \in \omega$ kaj $\mathbf{1} = (1, 1, ..., 1) \in \mathbf{R}^n$. Tiam $\nu_f(x,\mathbf{1}) = \nu_f(x)$.*

La pruvo de tiu ĉi rezulto estas trovebla en Kiselman (1987), propozicio 3.2.

Lemo 3.3. *Se $f \in PSH(\omega)$, $x \in \omega$ kaj $a_j > 0$, tiam*

$$\min a_j\ \nu_f(x) \leqslant \nu_f(x, a) \leqslant \max a_j\ \nu_f(x).$$

Pruvo. Kiel jam rimarkigite, la funkcio $y \mapsto \nu_f(x, y)$ estas konkava kaj pozitiveda tie kie $y_j > 0$. Tial ĝi kreskas laŭ ĉiu variablo y_j kiam la aliaj estas fiksaj, kaj la neegalaĵoj $\min a_j \leqslant a_k \leqslant \max a_j, k = 1, ..., n$, montras ke

$$\nu_f(x, (\min a_j)\mathbf{1}) \leqslant \nu_f(x, a) \leqslant \nu_f(x, (\max a_j)\mathbf{1}).$$

Ni nun apliku la propozicion 3.2, memorante la homogenecon.

Ni uzos la funkciojn

$$g_\eta(x) = \inf_y \big(v(x, y) - \operatorname{Re} y \cdot \eta\,; \quad (x, y) \in \Omega\big), \qquad x \in \omega,\ \ \eta \in \mathbf{R}^n, \tag{3.4}$$

kie $y \cdot \eta = y_1\eta_1 + ... + y_n\eta_n$. Oni kompreneble povas demandi pri la rafinita nombro $\nu_{g_\eta}(x, y)$ de g_η. Baza demando, al kiu mi ne konas la respondon, estas ĉu ĝi estas determinita de $\nu_f(x, y)$, η kaj y, analoge al (2.2). Ni tamen posedas partan informon pri $\nu_{g_\eta}(x, y)$ kiun ni prezentos en la du sekvaj lemoj, kaj kiu sufiĉos por pruvo de la teoremo de Siu en sekcioj 4 kaj 5.

Lemo 3.4. *Estu $f \in PSH(\omega)$, kaj estu g_η difinita per (3.4). Ni tiam havas*

$$\nu_{g_\eta}(x, y) \geqslant \nu_f(x, y) - y \cdot \eta, \qquad x \in \omega,\ \eta \in \mathbf{R}^n,\ y \in \mathbf{R}^n.$$

Pruvo. Ĉiam validas $g_\eta(x) \leqslant v(x, y') - y' \cdot \eta$ se $y' \in \mathbf{R}^n$. Prenante la mezan valoron sur $\{x + z\,;\ |z_j| = \exp y_j\}$, kie $y \in \mathbf{R}^n$, kaj skribante

$$r_j = \exp y_j, \qquad r'_j = \exp y'_j, \qquad r''_j = \exp y''_j,$$

ni ekhavas

$$v_{g_\eta}(x, y) = \fint_{|z_j|=r_j} g_\eta(x + z) \leqslant \fint_{|z_j|=r_j} v(x + z, y') - y' \cdot \eta =$$

$$= \fint_{|z_j|=r_j} \fint_{|z'_j|=r'_j} f(x+z+z') - y'\cdot\eta \leqslant$$

$$\leqslant \fint_{|z''_j|=r''_j} f(x+z'') - y'\cdot\eta = v_f(x,y'') - y'\cdot\eta,$$

kie v_{g_η} kaj $v = v_f$ signas la mezajn valorojn de g_η respektive f (vidu (3.1)), kaj kie $\exp y''_j = r''_j = r_j + r'_j = \exp y_j + \exp y'_j$. Tial

$$v_{g_\eta}(x,y) \leqslant v_f(x,y'') - y'\cdot\eta$$

por ĉiu y kaj ĉiu y' kun y'' determinita de la du unuaj vektoroj. Ni povas ekzemple meti $y' = y$, el kio sekvas ke $y''_j = y_j + \log 2$ kaj

$$v_{g_\eta}(x,y) \leqslant v_f(x, y + (\log 2)\,\mathbf{1}) - y\cdot\eta$$

kie $\mathbf{1} = (1,1,...,1)$. La neegalaĵo $\nu_{g_\eta}(x,y) \geqslant \nu_f(x,y) - y\cdot\eta$ facile sekvas el tio.

Lemo 3.5. *Estu $f \in PSH(\omega)$, kaj estu g_η difinita en Ω per (3.4). Estu $x \in \omega$ donita. Ni supozu ke x kaj Ω estas tiaj ke $\operatorname{Re} y_j$ estas supren barita kiam $(x,y) \in \Omega$. Se $a \in \mathbf{R}^n$ estas tia ke ĉiu komponanto a_j pozitivas, kaj se $\nu_f(x,a) < c$, tiam ekzistas $\eta \in \mathbf{R}^n$ tia ke $a\cdot\eta < c$ kaj $g_\eta(x) > -\infty$. Sekve ankaŭ $\nu_{g_\eta}(x,z) = 0$ por ĉiu z kun $z_j > 0$.*

Pruvo. Se $\nu_f(x,a) < c$, ekzistas malpliedanto afina sur la rekto difinita per a : se t_0 negativas kun $-t_0$ sufiĉe granda, ekzistas nombro $b < c$ tia ke

$$-\infty < v(x,t_0 a) + b(t - t_0) \leqslant v(x, ta)$$

por ĉiu t (laŭdifine v egalas al $+\infty$ ekster Ω; do $v(x,ta) = +\infty$ kiam $t \gg 0$, kio fakte gravas en la pruvo). Laŭ la teoremo de Hahn kaj Banach, al tiu ĉi malpliedanto eblas trovi afinan malpliedanton en la tuta spaco, do ekzistas η tia ke $a\cdot\eta = b < c$ kaj

$$v(x,t_0 a) + (y - t_0 a)\cdot\eta \leqslant v(x,y) \qquad \text{por ĉiu } y.$$

Sekve

$$-\infty < C = v(x,t_0 a) - t_0 a\cdot\eta \leqslant v(x,y) - y\cdot\eta$$

kaj $-\infty < C \leqslant \inf_y \big(v(x,y) - y\cdot\eta\big) = g_\eta(x)$.

4. Abstraktaj nombroj de Lelong

Ni nun supozu ke al ĉiu objekto u de iu klaso estas donita tuta familio $(u_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ da plursubharmonaj funkcioj u_γ en malfermita aro ω en $\mathbf{C}^n$. La objektoj u povas esti tre diversaj; unuavice ni pensas pri kurentoj aŭ funkcioj. Se ekzemple ili estas plursubharmonaj funkcioj, ni do havas operacion T :

$$PSH(\omega)\times\Gamma \ni (u,\gamma) \mapsto T(u,\gamma) = u_\gamma \in PSH(\omega).$$

Ni ne supozas ke T havas iun kroman econ.

Difino 4.1. Per tia operacio T ni difinas la *abstraktan nombron de Lelong de u ĉe punkto x en ω* tiel: $N_u(x) =$

$$= \sup\big(c > 0\,;\quad \text{por ĉiu } \gamma \in \Gamma, \quad \exp(-T(u/c,\gamma)) \text{ ne integreblas ĉe } x\big).$$

Klaras ke se b estas pozitiva nombro, tiam $N_{bu}(x) = bN_u(x)$.

Estas konate ke se u estas plursubharmona kaj se $u(x) > -\infty$, tiam ekzistas ĉirkaŭaĵo V de x tia ke la integraĵo de e^{-u} sur V estas finia; vidu Hörmander (1973), teoremon 4.4.5. Pro tio ni enkondukas iom modifitan nombron $N'_u(x)$ per

Difino 4.2. $N'_u(x) =$

$$= \sup\big(c > 0\,;\ (u/c)_\gamma(x) = T(u/c,\gamma)(x) = -\infty \text{ por ĉiu } \gamma \in \Gamma\big).$$

La menciita rezulto montras ke $N'_u(x) \geqslant N_u(x)$. En ĉiuj kazoj kiujn mi studis oni havas egalecon aŭ ekhavas egalecon post negrava ŝanĝo de u_γ. Tiam la pli simpla difino de $N'_u(x)$ taŭgas.

Ni nun montru ke la rafinita nombro de Lelong $\nu_f(x,a)$ estas la abstrakta nombro de Lelong por iu operacio T.

Estu $a \in \mathbf{R}^n$ kun ĉiu komponanto a_j pozitiva. Ni difinu $\nu_f(x,a)$ per difino 3.1 kaj g_γ per (3.4) kun Ω malfermita aro pseŭdokonveksa en $\omega \times \mathbf{C}^n$, plenumanta la kondiĉojn (3.2) kaj (3.3). Helpe de la principo pri minimumo ni scias ke $g_\gamma \in PSH(\omega)$; vidu Kiselman (1978), teoremon 2.2.

Teoremo 4.3. *Estu $a \in \mathbf{R}^n$ kun pozitivaj komponantoj a_j, kaj*

$$\Gamma = \{\gamma \in \mathbf{R}^n\,;\ \gamma_j \geqslant 0 \text{ kaj } a\cdot\gamma < 1\}.$$

Ni difinu $T(u,\gamma) = u_\gamma = A_\gamma g_\gamma$ por ĉiu $\gamma \in \Gamma$, kie g_γ estas donita per (3.4) kaj A_γ estas pozitiva konstanto. Ni supozu ke Ω estas pseŭdokonveksa kaj plenumas la kondiĉojn (3.2) kaj (3.3). Ni ankaŭ supozu ke Ω kaj $x \in \omega$ estas tiaj ke $\operatorname{Re} y_j$ *estas barita supren kiam (x,y) apartenas al Ω. Tiam la rafinita nombro de Lelong $\nu_f(x,a)$ de funkcio $f \in PSH(\omega)$ egalas al la abstrakta nombro de Lelong $N'_f(x)$. Se krome la konstantoj A_γ estas tiaj ke*

$$A_\gamma \geqslant \frac{2n \max a_j}{1 - a\cdot\gamma},$$

tiam ankaŭ $\nu_f(x,a) = N_f(x) = N'_f(x)$.

Pruvo. Unua etapo: ni montru ke $\nu_f(x,a) \geqslant 1$ implicas ke $N_f(x) \geqslant 1$. Ni scias laŭ lemo 3.4 ke $\nu_{g_\gamma}(x,a) \geqslant \nu_f(x,a) - a\cdot\gamma$. Do, se $\nu_f(x,a) \geqslant 1$ kaj $\gamma \in \Gamma$, la nombro $\nu_{g_\gamma}(x,a)$ pozitivas, ĉar

$$\nu_{g_\gamma}(x,a) \geqslant \nu_f(x,a) - a\cdot\gamma \geqslant 1 - a\cdot\gamma > 0.$$

Pro lemo 3.3 ni povas aserti ke

$$\nu_{g_\gamma}(x) \geqslant \frac{1}{\max a_j} \nu_{g_\gamma}(x, a),$$

kaj sekvas ke

$$\nu_{u_\gamma}(x) = A_\gamma \nu_{g_\gamma}(x) \geqslant \frac{A_\gamma}{\max a_j} \nu_{g_\gamma}(x, a) \geqslant \frac{A_\gamma}{\max a_j}(1 - a \cdot \gamma) \geqslant 2n.$$

Laŭ Skoda (1972), propozicio 7.1, ĉiu plursubharmona funkcio v kun nombro de Lelong $\geqslant 2n$ estas tia ke e^{-v} ne integreblas. Tial ni scias ke $\exp(-u_\gamma)$ ne integreblas ĉe x, kaj vidas ke la nombro $c = 1$ konkuras en la supro kiu difinas la nombron $N_u(x)$; sekve $N'_u(x) \geqslant N_u(x) \geqslant 1$.

Dua etapo: se $\nu_f(x, a) < 1$, tiam laŭ lemo 3.5 ekzistas η tia ke $a \cdot \eta < 1$ kaj $g_\eta(x) > -\infty$. Tio signifas ke $\eta \in \Gamma$ kaj ke $u_\eta(x) > -\infty$. La nombro $c = 1$ do ne povas konkuri en la supro de difino 4.2. Sed la rezono validas ankaŭ por la funkcio f/c se $c > 1$, kio signifas ke neniu nombro $c > 1$ povas konkuri en difino 4.2. Sekve $N'_f(x) \leqslant 1$. La ĵus pruvita implico

$$\nu_f(x, a) < 1 \implies N'_f(x) \leqslant 1$$

montras ke ĝenerale $N_f(x) \leqslant N'_f(x) \leqslant \nu_f(x, a)$.

Resume, ni havas $\nu_f(x, a) = N_f(x) = N'_f(x)$ kun la indikitaj elektoj de Γ kaj $A_\gamma, \gamma \in \Gamma$. Se oni ŝanĝas la nombrojn A_γ al aliaj konstantoj pozitivaj, $N'_f(x)$ restas la sama; do ĉiam $\nu_f(x, a) = N'_f(x)$.

5. La teoremo de Siu

Teoremo 5.1. *Estu $N_u(x)$ la abstrakta nombro de Lelong de iu objekto u difinita per difino 4.1. Tiam la supernivela aro*

$$E_s = \{x \in \omega\ ;\ N_u(x) \geqslant s\}$$

estas analita subaro de ω.

La ĉefa rezulto sur kiu baziĝas tiu ĉi teoremo estas la teoremo de Hörmander kaj Bombieri (vidu Hörmander 1973, teoremon 4.4.4): se $u \in \mathit{PSH}(\omega)$, kun ω pseŭdokonveksa en $\mathbf{C}^n$, kaj se e^{-u} integreblas ĉe x, tiam ekzistas holomorfa funkcio h en ω tia ke $h(x) = 1$ kaj

$$\int_\omega |h|^2 e^{-u}(1 + |z|^2)^{-3n} d\lambda(z) < +\infty. \tag{5.1}$$

Ni notu per $\mathcal{O}(\omega, u)$ la aron de ĉiuj funkcioj h holomorfaj en ω tiaj ke (5.1) validas, kaj per

$$Z(\omega, u) = \bigcap_{h \in \mathcal{O}(\omega, u)} h^{-1}(0)$$

la aron de la nulejoj kiuj estas komunaj al ĉiuj h en $\mathcal{O}(\omega, u)$. Tiu aro estas do analita en ω. Kun la enkondukita notado la teoremo de Hörmander kaj Bombieri diras ke se e^{-u} integreblas ĉe $x \in \omega$, tiam $x \notin Z(\omega, u)$. Aliflanke evidentas ke se e^{-u} ne integreblas, tiam $x \in Z(\omega, u)$. Do resume,

$$Z(\omega, u) = \{x \in \omega \ ; \ e^{-u} \text{ ne integreblas ĉe } x\},$$

kaj la difino de la abstrakta nombro de Lelong skribiĝas:

$$N_u(x) = \sup\big(c > 0 \ ; \ x \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} Z(\omega, (u/c)_\gamma)\big). \tag{5.2}$$

Pruvo de teoremo 5.1. Ĉar la rezulto estas loka, ni povas supozi ke ω pseŭdokonveksas. Se $N_u(x) \leqslant s$, tiam ni havas

$$N_{u/b}(x) = \frac{1}{b} N_u(x) \leqslant \frac{s}{b} < 1$$

por ĉiu nombro $b > s$. Laŭ difino 4.1, la nombro 1 ne povas konkuri en la supro kiu difinas $N_{u/b}(x)$; do, laŭ (5.2), ekzistas $\gamma \in \Gamma$ tia ke
$x \notin Z(\omega, (u/b)_\gamma)$. Prenante la komplementojn de tiuj ĉi aroj, ni ekhavas

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} Z(\omega, (u/b)_\gamma) \subset E_s,$$

por ĉiuj s kaj b kun $b > s$. Sekve, variiginte s, ni povas konkludi ke

$$A(u/b) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} Z(\omega, (u/b)_\gamma) \subset \bigcap_{s < b} E_s = E_b.$$

La maldekstra aro $A(u/b)$ ĉi tie estas analita.

Alidirekte, se $x \in E_s$, do se $N_u(x) \geqslant s$, tiam ekzistas nombroj
$c_j \leqslant s$, $c_j \to s$, tiaj ke, por ĉiu $\gamma \in \Gamma$, $\exp(-(u/c_j)_\gamma)$ ne integreblas ĉe x. Nun evidentas ke

$$x \in \bigcap_{\gamma} Z(\omega, (u/c_j)_\gamma) = A(u/c_j).$$

Kune kun la unua parto de la pruvo tio donas

$$E_s \subset A(u/c_j) \subset E_{c_j}.$$

Ni nun prenu la komunaĵon laŭ j :

$$E_s \subset \bigcap_j A(u/c_j) \subset \bigcap_j E_{c_j} = E_s.$$

La aro E_s do egalas al la analita aro $\bigcap A(u/c_j)$.

Kombininte la teoremojn 4.3 kaj 5.1 ni finfine ekhavas:

Teoremo 5.2. *Estu* $\nu_f(x, a)$ *la rafinita nombro de Lelong de plursubharmona funkcio* f *en malfermita aro* ω *en* $\mathbf{C}^n$ *(vidu difinon 3.1). Tiam*

$$\{x \in \omega \ ; \ \nu_f(x, a) \geqslant s\}$$

estas analita aro.

Bibliografio

Abrahamsson, Leif

1987 Microlocal Lelong numbers of plurisubharmonic functions. *Raporto 1987:4,* Matematika instituto, Upsala universitato.

Demailly, Jean-Pierre

1985 Mesures de Monge-Ampère et caractérisation géométrique des variétés algébriques affines. *Mem. Soc. Math. France (N.S.)* **19**, 1-125.

1986 Nombres de Lelong généralisés, théorèmes d'intégralité et d'analyticité. *Manuskripto,* Universitato de Grenoblo I.

Hörmander, Lars

1973 *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables.* North-Holland.

Kiselman, Christer O.

1978 The partial Legendre transformation for plurisubharmonic functions. *Invent. Math.* **49**, 137-148.

1979 Densité des fonctions plurisousharmoniques. *Bull. Soc. Math. France* **107**, 295-304.

1987 Un nombre de Lelong raffiné. *Séminaire d'Analyse Complexe et Géométrie 1985–87*, 61–70. Faculté des Sciences de Tunis & Faculté des Sciences et Techniques de Monastir.

Lelong, Pierre

1969 *Plurisubharmonic Functions and Positive Differential Forms.* Gordon and Breach.

Lelong, Pierre, kaj Gruman, Lawrence

1986 *Entire Functions of Several Complex Variables.* Springer-Verlag.

Siu, Yum-Tong

1974 Analyticity of sets associated to Lelong numbers and the extension of closed positive currents. *Invent. Math.* **27**, 53-156.

Skoda, Henri

1972 Sous-ensembles analytiques d'ordre fini ou infini dans $\mathbf{C}^n$. *Bull. Soc. Math. France* **100**, 353-408.

Postnoto verkita 2000 08 29: Nuntempe mi diras *plusubharmonia* por la malnova vorto *plursubharmona* kaj *analitika* respektive *supremo* por la eksperimente uzitaj vortoj *analita* kaj *supro.*