Publié dans le *Bulletin des Sciences Mathématiques* **124** (2000), 75–92.

Ensembles de sous-niveau et images inverses des fonctions plurisousharmoniques

PAR

CHRISTER O. KISELMAN

[Université d'Uppsala]

Sommaire :

RESUMO. – *Subnivelaj aroj kaj inversaj bildoj de plursubharmonaj funkcioj*
Ni trovas ekzaktan supozon sub kiu la nombro de Lelong de la inversa bildo de plursubharmona funkcio per holomorfa bildigo malplias ol oblo de la nombro de Lelong de la origina funkcio. La pruvmetodo dependas de studo de la volumeno de la subnivelaj aroj de plursubharmona funkcio.

RÉSUMÉ. – Nous déterminons quand le nombre de Lelong de l'image inverse d'une fonction plurisousharmonique par une application holomorphe peut être majoré par une constante fois le nombre de Lelong de la fonction de départ. La méthode de démonstration utilise des majorations du volume des ensembles de sous-niveau des fonctions plurisousharmoniques.

ABSTRACT. – *Sublevel sets and pull-backs of plurisubharmonic functions*
We determine when the Lelong number of the pull-back of a plurisubharmonic function by a holomorphic mapping can be majorized by a constant times the Lelong number of the original function. The method of proof uses estimates of the volume of the sublevel sets of plurisubharmonic functions.

1. Introduction

Le nombre de Lelong d'une fonction plurisousharmonique ou d'un courant positif fermé contient une information très importante pour la géometrie complexe. En effet ce nombre est la densité $(2n-2)$-dimensionelle d'une masse – la masse de Riesz de la fonction ou la mesure trace du courant. Il est bien connu que ce nombre est invariant par applications biholomorphes. Notre but ici est d'étudier dans quelle mesure ceci demeure vrai pour les images inverses par des applications holomorphes non nécessairement biholomorphes.

Soient h une application holomorphe d'un ouvert de $\mathbf{C}^m$ dans $\mathbf{C}^n$ et f une fonction plurisousharmonique définie dans un ouvert de $\mathbf{C}^n$. Alors la fonction composée $f \circ h = h^*(f)$, l'image inverse (ou pull-back) de f par h, est plurisousharmonique dans un ouvert de $\mathbf{C}^m$ et on peut démontrer facilement que le nombre de Lelong $\nu_{f\circ h}$

de $f \circ h$ majore celui de f :

$$\nu_{f\circ h}(a) \geqslant \nu_f(h(a)) \tag{1.1}$$

pour tout point $a \in \mathbf{C}^m$ où ces expressions ont un sens. Il est naturel de demander si on a une inégalité dans l'autre sens :

$$\nu_{f\circ h}(a) \leqslant C\nu_f(h(a)), \tag{1.2}$$

où C dépend de h mais non pas de f.

Nous allons démontrer que l'inégalité (1.2) est vraie si et seulement si l'image de h a des points intérieurs (voir le théorème 5.1). La démonstration s'appuie sur une étude du volume des ensembles de sous-niveau des fonctions plurisousharmoniques (voir le théorème 3.1).

Si l'image de h est pluripolaire (donc *a fortiori* si elle est contenue dans une hypersurface analytique), alors l'inégalité (1.2) n'est pas possible. Nous démontrerons que l'image est pluripolaire si et seulement si elle n'a pas de point intérieur.

C'est le problème de calculer le nombre de Lelong d'une fonction composée $f \circ h$ qui m'a conduit à l'introduction des nombres de Lelong raffinés en 1986. En particulier si h est de la forme spéciale

$$h(w) = (w_1^{p_{11}} w_2^{p_{12}} \cdots w_n^{p_{1n}}, \ldots, w_1^{p_{n1}} w_2^{p_{n2}} \cdots w_n^{p_{nn}}) \in \mathbf{C}^n, \qquad w \in \mathbf{C}^n,$$

où p_{jk} sont des entiers strictement positifs tels que $\text{dét}(p_{jk}) \neq 0$, on a une relation très nette entre les nombres de Lelong raffinés de $f \circ h$ et ceux de f ; voir Kiselman [1987: Proposition 6.1], [1994a: 187].

Notons λ la mesure de Lebesgue dans $\mathbf{C}^n$. Soient $\|\cdot\|$ une norme complexe de $\mathbf{C}^n$ et B la boule unité ouverte correspondante : $B = \{z \in \mathbf{C}^n;\ \|z\| < 1\}$. On sait que son volume est $\lambda(B) = (2\pi)^n/(2n)!$ si $\|z\| = \|z\|_1 = \sum |z_j|$ est la norme l^1, que $\lambda(B) = \pi^n/n!$ si $\|z\| = \|z\|_2$ est la norme euclidienne l^2 et que $\lambda(B) = \pi^n$ si $\|z\| = \|z\|_\infty = \max |z_j|$ est la norme l^∞. Dans la suite on fixe une norme complexe arbitraire.

Nous rappelons que le *nombre de Lelong* en un point $a \in \mathbf{C}^n$ d'une fonction plurisousharmonique f définie au voisinage de a est la limite

$$\nu_f(a) = \lim_{r\to 0} \frac{\sup_{\|z\|<r} f(a+z)}{\log r} \in [0, +\infty],$$

limite qui existe toujours car la fonction $s \mapsto \sup_{\|z\|<e^s} f(a+z)$ est convexe. Pour la définition de ce nombre comme densité de la mesure de Riesz de f voir par exemple Lelong [1964]; pour l'équivalence des deux définitions voir par exemple Kiselman [1994b].

Les *ensembles de sous-niveau*

$$A_f(t) = \{z \in \Omega;\ f(z) \leqslant t\}, \qquad t \in \mathbf{R}, \tag{1.3}$$

ont un lien avec les nombres de Lelong de f dans Ω. Cependant, ce lien n'est pas précis (voir les exemples 1.1 et 1.2 ci-dessous). Le résultat essentiel est que le volume

$\lambda(\omega \cap A_f(t))$ décroît exponentiellement quand t tend vers $-\infty$ si ω est un ouvert relativement compact dans Ω, plus précisement qu'il existe des constantes $\alpha > 0$ et C telles que $\lambda(\omega \cap A_f(t)) \leqslant Ce^{\alpha t}$, $t \ll 0$, bien que la constante α dans l'exposant puisse être très petit si les nombres de Lelong sont grands. C'est ce que dit le théorème 3.1.

Il paraît que les estimations du volume des ensembles de sous-niveau des fonctions plurisousharmoniques sont d'intérêt dans la dynamique complexe en plusieurs variables; voir par exemple Diller [1996]. Pour une étude générale des images inverses des courants positifs fermés nous renvoyons à Meo [1996a, b]. Kołodziej [1998: Lemma 2.5.1] a trouvé une majoration du volume des ensembles de sous-niveau par une fonction de la masse de Monge–Ampère de la fonction.

Des exemples très simples montrent que l'on doit accepter chez $\lambda(A_f(t))$ des comportements asymptotiques divers :

Exemple 1.1. — Soit $f(z) = a\log\|z\| + b$, $z \in \mathbf{C}^n$, $\|z\| < R$. Alors, en mettant $t = a\log r + b$ on trouve

$$\lambda(A_f(t)) = \lambda(rB) = \lambda(B)r^{2n} = \lambda(B)e^{\alpha(t-b)}, \qquad t < a\log R + b,$$

où $\alpha = 2n/a = 2n/\nu_f(0)$.

Exemple 1.2. — Soit $f(z) = a\log|z_1| + b$, $z \in \mathbf{C}^n$, $\|z\| < R$. Alors, en notant B^{2n-2} l'intersection de la boule unité avec l'hyperplan $\{z \in \mathbf{C}^n;\ z_1 = 0\}$ et $t = a\log r + b$, on a

$$\lambda(A_f(t)) \approx \lambda_{2n-2}(B^{2n-2})R^{2n-2}\pi r^2 = \lambda_{2n-2}(B^{2n-2})R^{2n-2}\pi e^{\alpha(t-b)}, \qquad t \ll b,$$

(même exactement si $\|z\| = \|z\|_\infty$). Ici $\alpha = 2/a = 2/\nu_f(0)$.

Exemple 1.3. — Étant donnée une fonction g convexe et strictement croissante sur $]-\infty, s_0]$ on pose $f(z) = g(\log\|z\|)$, $\|z\| < e^{s_0}$. Alors f est plurisousharmonique et son nombre de Lelong à l'origine est

$$\nu_f(0) = \lim_{s\to-\infty}\frac{g(s)}{s} = \lim_{t\to-\infty}\frac{t}{g^{-1}(t)},$$

g^{-1} étant l'inverse de g. Le volume des ensembles de sous-niveau est donné par la formule

$$\log\lambda(A_f(t)) = \log(\lambda(B)) + 2ng^{-1}(t), \qquad t \leqslant t_0 = g(s_0). \tag{1.4}$$

Exemple 1.4 (László Lempert; communication personnelle). Soit Ω la réunion d'une famille disjointe d'ouverts Ω_j, $j \in \mathbf{N}$. Alors toute fonction à valeurs constantes dans chaque Ω_j est plurisousharmonique. La fonction $\lambda(A_f(t))$ n'admet aucune régularité. Dans ce cas Ω n'est pas connexe, mais si les adhérences $\overline{\Omega}_j$ sont disjointes on peut les joindre avec des tubes très minces et approcher la fonction par une fonction plurisousharmonique dans le domaine obtenu, de façon qu'aucune régularité n'est présente non plus dans le cas d'un ouvert connexe.

En combinant des fonctions obtenues dans l'exemple 1.1 on peut construire une fonction f telle que le volume $\lambda(A_f(t))$ admette un développement asymptotique

$$\lambda(A_f(t)) \approx \sum A_j e^{\alpha_j t}, \qquad t \to -\infty, \tag{1.5}$$

où α_j et A_j sont des constantes strictement positives et $\alpha_j \to +\infty$ quand $j \to +\infty$. Notons que $t \mapsto \log\lambda\big(\sum A_j e^{\alpha_j t}\big)$ est convexe si la somme converge.

Cependant, la fonction $t \mapsto \log\lambda(A_f(t))$ n'est pas toujours convexe : on voit facilement de (1.4) qu'étant donnée une fonction φ concave et croissante sur $]-\infty, t_0]$, il existe une fonction plurisousharmonique f telle que $\log\lambda(A_f(t)) = \varphi(t)$, $t \leqslant t_0$. La fonction construite satisfait à des inégalités $\lambda(A_f(t)) \leqslant C_\alpha e^{\alpha t}$, $t \ll 0$, pour tout α dans l'intervalle $0 < \alpha < 2n/\nu_f(0)$, en particulier pour tout α positif si $\nu_f(0) = 0$.

En prenant $g^{-1}(t) = t + \sqrt{-t}$, $t \leqslant -1$, dans l'exemple 1.3 on obtient une fonction plurisousharmonique dont le volume n'admet pas de développement asymptotique de la forme (1.5).

Dans les exemples 1.1, 1.2 et 1.3 ci-dessus on voit que la limite

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{\log\lambda(A_f(t))}{t}$$

existe. L'exemple 1.4 montre que ce n'est pas toujours le cas. Or il paraît raisonnable de conjecturer que la limite

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{\log\lambda(\omega \cap A_f(t))}{t}$$

existe si ω est un ouvert relativement compact dans Ω.

Les résultats principaux de cet article ont été présentés le 29 juin 1998 au *Colloque d'Analyse Complexe* tenu à Lille en l'honneur de Gérard Cœuré.

Je tiens a remercier mes amis Charles Favre, László Lempert, Joël Merker, Wiesław Pleśniak et Ahmed Zeriahi des discussions fructueuses sur ce sujet. C'est Charles Favre qui a réveillé de nouveau mon intérêt pour les nombres de Lelong et qui m'a communiqué le très intéressant exemple 5.4. Il a trouvé indépendamment [1999] une autre démonstration du théorème 5.1. Enfin il a bien voulu corriger mon français. Wiesław Pleśniak m'a montré son article avec Wiesław Pawłucki [1986] et m'a expliqué la notion des cusps polynomiaux. Joël Merker m'a encouragé à remplacer l'utilisation du résultat profond de Pawłucki et Pleśniak par une démonstration plus élémentaire. László Lempert a attiré mon attention à l'exemple 1.4. Ahmed Zeriahi a proposé une simplification de la démonstration du théorème 3.1. De tout cela je leur suis très reconnaissant.

2. Minoration du volume des ensembles de sous-niveau

Bien qu'une minoration du volume des ensembles de sous-niveau ne soit pas nécessaire pour l'étude des fonctions composées, il convient de mettre les choses en évidence.

PROPOSITION 2.1. — *Soit f une fonction plurisousharmonique négative dans un ouvert Ω de $\mathbf{C}^n$, $\Omega \neq \mathbf{C}^n$. Notons par $d_\Omega(z)$ la distance de z à la frontière de Ω et par $A_f(t)$ les ensembles de sous-niveau de f (voir (1.3)). Alors le volume de $A_f(t)$ admet la minoration suivante :*

$$\lambda(A_f(t)) \geqslant \lambda(B) d_\Omega(z)^{2n} e^{\beta(z)(t-T(z))} \geqslant \lambda(B) d_\Omega(z)^{2n} e^{\beta(z)t}, \quad z \in \Omega,\ t < T(z), \tag{2.1}$$

où

$$\beta(z) = \frac{2n}{\nu_f(z)} \quad \text{et} \quad T(z) = \sup_{z+d_\Omega(z)B} f \leqslant 0, \qquad z \in \Omega.$$

Démonstration. — Pour $z \in \Omega$ notons $S(z) = \log d_\Omega(z)$, de sorte que $z + e^{S(z)}B$ soit la plus grande boule ouverte de centre z contenue dans Ω. Comme f est plurisousharmonique dans cette boule, le rapport

$$\frac{T(z) - \sup_{z+e^s B} f}{S(z) - s} = \frac{\sup_{z+e^{S(z)}B} f - \sup_{z+e^s B} f}{S(z) - s}, \qquad s < S(z),$$

est croissant en s et sa limite quand s tend vers $-\infty$ est $\nu_f(z)$. Donc

$$\sup_{z+e^s B} f \leqslant T(z) - \nu_f(z)(S(z) - s), \qquad s < S(z).$$

Notons par t le membre de droite, de telle sorte que

$$s = S(z) + \frac{t - T(z)}{\nu_f(z)}.$$

Ceci implique que $A_f(t)$ contient $z + e^s B$ et par conséquent

$$\lambda(A_f(t)) \geqslant \lambda(z + e^s B) = \lambda(B) e^{2ns} = \lambda(B) e^{2nS(z)} e^{2n(t-T(z))/\nu_f(z)},$$

d'où le résultat.

COROLLAIRE 2.2. — *Avec les hypothèses et notations de la proposition 2.1 on a*

$$\limsup_{t \to -\infty} \frac{\log \lambda(\omega \cap A_f(t))}{t} \leqslant \frac{2n}{\sup_{z \in \omega} \nu_f(z)} \tag{2.2}$$

pour tout ensemble ouvert ω contenu dans Ω.

Corollaire 2.3. — *Avec les hypothèses et notations de la proposition 2.1 on a pour tout ouvert ω tel que $\omega + rB \subset \Omega$:*

$$\lambda(A_f(t)) \geqslant \lambda(B) r^{2n} e^{\beta_\omega t}, \qquad t < T_\omega,$$

où

$$\beta_\omega = \inf_{z\in\omega} \beta(z) = \frac{2n}{\sup\limits_{z\in\omega} \nu_f(z)},$$

et

$$T_\omega = \inf_{z\in\omega} T(z) = \inf_{z\in\omega} \sup_{z+d_\Omega(z)B} f \leqslant 0.$$

Si $T_\omega = -\infty$, le corollaire ne dit rien. Or $T_\omega > -\infty$ dès que ω est borné et f ne vaut $-\infty$ identiquement dans aucune composante de Ω, car alors

$$T_\omega \geqslant \inf_{z\in\omega} \sup_{z+rB} f > -\infty,$$

la fonction $z \mapsto \sup_{z+rB} f$ étant continue.

3. Majoration du volume des ensembles de sous-niveau

Théorème 3.1. — *Soient f une fonction plurisousharmonique dans un ouvert Ω de $\mathbf{C}^n$ et K un compact dans Ω. Alors pour tout nombre positif $\alpha < 2/\sup_{z\in K} \nu_f(z)$ il existe une constante C_α telle que*

$$\lambda(K \cap A_f(t)) \leqslant C_\alpha e^{\alpha t}, \qquad t \in \mathbf{R}. \tag{3.1}$$

Démonstration. — D'après Skoda [1972: Proposition 7.1] on sait que $e^{-g} \in L^1_{\text{loc}}(a)$ si g est plurisousharmonique au voisinage d'un point a où $\nu_g(a) < 2$. Avec $g = \alpha f$ on a $e^{-\alpha f} \in L^1(K)$ par compacticité. L'inégalité $e^{\alpha(t-f(z))} \geqslant 1$ étant évidente pour tout $z \in A_f(t)$, on peut majorer le volume de $K \cap A_f(t)$ comme suit :

$$\lambda(K \cap A_f(t)) \leqslant \int_K e^{\alpha(t-f(z))} d\lambda(z) = e^{\alpha t} \int_K e^{-\alpha f(z)} d\lambda(z),$$

où la dernière intégrale est finie comme nous l'avons déjà vu.

4. L'indice d'intégrabilité

Définition. — Soit g une fonction mesurable définie dans un ensemble mesurable $E \subset \mathbf{C}^n$. On appelera *indice d'intégrabilité* dans E la quantité

$$I_g(E) = \inf_{p>0} \left(p; e^{-g/p}\big|_E \in L^1(E)\right). \tag{4.1}$$

On voit facilement que si E est de volume fini, alors l'ensemble des nombres p tels que $\int_E e^{-g/p} d\lambda$ soit finie est un intervalle, ou bien égal à $[a, +\infty[$ ou bien égal à $]a, +\infty[$ avec $a = I_g(E) \in [0, +\infty]$.

THÉORÈME 4.1. — *Pour toute fonction mesurable g et tout ensemble mesurable E de volume fini on a*

$$I_g(E) = \inf_{p>0} \Big(p ; \exists\, C \text{ telle que } \forall\, t \leqslant 0,\ \lambda(E \cap A_g(t)) \leqslant C e^{t/p} \Big). \tag{4.2}$$

Pour la démonstration on aura besoin des lemmes suivants.

LEMME 4.2. — *Soient E un ensemble mesurable dans $\mathbf{C}^n$ et g une fonction mesurable définie dans E telle que*

$$\int_E e^{-g} d\lambda$$

soit finie. Alors le volume des ensembles de sous-niveau de g admet la majoration

$$\lambda(A_g(t)) \leqslant C e^t, \qquad t \leqslant 0,$$

avec une constante C. Plus précisement on peut prendre $C = \int_E (1 + e^{-g}) d\lambda$.

Démonstration. — Notons E_g l'ensemble des points $z \in E$ où $g(z) < 0$. On a alors

$$+\infty > \int_E e^{-g} d\lambda \geqslant \int_{E_g} e^{-g} d\lambda = \int_1^\infty \lambda(A_g(-\log s)) ds = \int_{-\infty}^0 \lambda(A_g(t)) e^{-t} dt.$$

La démonstration s'achève par une application du lemme suivant.

LEMME 4.3. — *Soit ψ une fonction positive et croissante définie sur $]-\infty, 0]$ telle que*

$$\int_{-\infty}^0 \psi(t) e^{-t} dt$$

soit finie. Alors il existe une constante C telle que

$$\psi(t) \leqslant C e^t, \qquad t \leqslant 0.$$

Plus précisement on peut prendre $C = \psi(0) + \int_{-\infty}^0 \psi(t) e^{-t} dt$.

Démonstration. — Si ψ est différentiable, on peut intégrer par parties :

$$\int_t^0 \psi(s) e^{-s} ds = \Big[-\psi(s) e^{-s} \Big]_t^0 + \int_t^0 \psi'(s) e^{-s} ds \geqslant \psi(t) e^{-t} - \psi(0), \qquad t \leqslant 0,$$

d'où

$$\psi(t) e^{-t} \leqslant \psi(0) + \int_{-\infty}^0 \psi(s) e^{-s} ds = C.$$

Si ψ n'est pas différentiable, on l'approche par une fonction différentiable.

Démonstration du théorème 4.1. — Si $\int_E e^{-g/p} d\lambda$ est finie, alors le lemme 4.2 montre que

$$\lambda(E \cap A_g(pt)) = \lambda(E \cap A_{g/p}(t)) \leqslant C e^t,$$

ce qui équivaut à

$$\lambda(E \cap A_g(t)) \leqslant Ce^{t/p},$$

et montre l'inégalité $\geqslant$ dans (4.2).

Dans l'autre sens il est évident que

$$\int_{E_g} e^{-g/p} d\lambda = \int_1^\infty \lambda(A_{g/p}(-\log s))ds = \frac{1}{p}\int_{-\infty}^0 \lambda(E \cap A_g(t))e^{-t/p}dt$$

est finie si on a une estimation $\lambda(E \cap A_g(t)) \leqslant Ce^{t/q}$ pour un $q < p$. Ceci montre que $I_g(E)$ ne peut pas être plus grand que le membre de droite dans (4.2).

Du théorème 4.1 on déduit facilement que

$$\frac{1}{I_g(E)} = \liminf_{t\to-\infty} \frac{\log \lambda(E \cap A_g(t))}{t} \leqslant \limsup_{t\to-\infty} \frac{\log \lambda(E \cap A_g(t))}{t} \tag{4.3}$$

pour tout ensemble E mesurable et de volume fini; à comparer avec (2.2).

J'ai été amené à étudier un indice d'intégrabilité (au carré) locale :

$$\iota_g(z) = \inf_{p>0} \left(p; e^{-g/p} \in L^2_{\text{loc}}(z)\right),$$

et j'ai démontré que l'on a $\iota_f(z) \leqslant \nu_f(z) \leqslant n\iota_f(z)$ pour toute fonction f plurisousharmonique [1994a, Th. 3.5; 1994b, Th. 2.3.5]. C'est l'inégalité $\iota_f(z) \leqslant \nu_f(z)$, basée sur le résultat de Skoda mentionné plus haut, qui est importante dans la démonstration du théorème 3.1.

On a pour tout compact K contenu dans Ω et toute fonction mesurable f définie dans Ω

$$2I_f(K) \leqslant \sup_{z\in K} \iota_f(z)$$

et par conséquent

$$2I_f(K) \leqslant \sup_{z\in K} \nu_f(z)$$

si f est plurisousharmonique dans Ω. D'autre part

$$\sup_{z\in\omega} \nu_f(z) \leqslant 2nI_f(\omega)$$

pour toute fonction f plurisousharmonique dans Ω et tout ouvert ω relativement compact dans Ω.

5. Majoration du nombre de Lelong d'une fonction composée

Voici le résultat principal de l'article :

THÉORÈME 5.1. — *Soit h une application holomorphe définie au voisinage d'un point $a \in \mathbf{C}^m$ et à valeurs dans $\mathbf{C}^n$.*
(A) — *Si $h(V)$ est d'intérieur non vide pour tout voisinage V de a assez petit, alors il existe une constante C telle que*

$$\nu_{f\circ h}(a) \leqslant C\nu_f(h(a)) \tag{5.1}$$

pour toute fonction f plurisousharmonique définie au voisinage de $h(a) \in \mathbf{C}^n$.
(B) — *Si par contre il existe un voisinage V de a tel que son image $h(V)$ soit d'intérieur vide, alors $h(V)$ est pluripolaire dans $\mathbf{C}^n$ et on n'a pas d'inégalité (5.1).*

Démonstration. (A) — Sans perte de généralité on pourra supposer que $a = 0$, que $h(0) = 0$ et que h est définie et holomorphe dans une boule de centre à l'origine et de rayon > 1. Notons

$$X_r = h(rB), \qquad 0 < r \leqslant 1,$$

l'image de la boule ouverte rB. Fixons un ouvert borné Ω qui contient $K = \overline{X}_1$ et soit f une fonction plurisousharmonique définie dans Ω. Le nombre de Lelong de la fonction composée $f \circ h$ est

$$\nu_{f\circ h}(0) = \lim_{r\to 0} \frac{\sup_{X_r} f}{\log r} = \lim_{r\to 0} \frac{\sup_{X_1} f - \sup_{X_r} f}{\log 1 - \log r},$$

et le rapport

$$\frac{\sup_{X_1} f - \sup_{X_r} f}{\log 1 - \log r}, \qquad 0 < r < 1,$$

étant croissant en r, majore le nombre de Lelong de $f \circ h$ à l'origine, d'où

$$\sup_{X_r} f \leqslant \nu_{f\circ h}(0) \log r + \sup_{X_1} f = t,$$

où la dernière égalité définit un nombre t. Cela signifie que X_r est contenu dans l'ensemble de sous-niveau $A_f(t)$, et par conséquent $\lambda(X_r) \leqslant \lambda(K \cap A_f(t))$. Si on suppose en plus que le nombre de Lelong de f satisfait à $\sup_{z\in K} \nu_f(z) < 2$, alors le théorème 3.1 montre que

$$\lambda(X_r) \leqslant \lambda(K \cap A_f(t)) \leqslant Ce^t = C' r^{\nu_{f\circ h}(0)}, \qquad 0 < r \leqslant 1, \tag{5.2}$$

où C est une constante qui dépend de f mais non pas de r, et où $C' = C \exp(\sup_{X_1} f)$.

Supposons maintenant qu'il existe, pour chaque $j = 1, 2, ...$, une fonction plurisousharmonique f_j définie au voisinage de l'origine telle que le nombre de Lelong de $f_j \circ h$ à l'origine soit au moins j, tandis le nombre de Lelong de f_j à l'origine est $\nu_{f_j}(0) < 2$. Alors il existe une telle fonction qui soit définie dans Ω, car $F_j(z) = f_j(cz)$ ont même nombre de Lelong pour tout $c \neq 0$. On peut même supposer, en faisant si nécessaire encore une homothétie, qu'elle satisfait à $\sup_{z\in K}\nu_{f_j}(z)<2$, l'ensemble $\{z;\,\nu_{f_j}(z)<2\}$ étant un voisinage de l'origine (constat élémentaire). Alors

$$\lambda(X_r)\leqslant C_j r^j,\qquad 0<r\leqslant 1,\ j=1,2,...,\tag{5.3}$$

d'après (5.2). Nous verrons que ceci n'est possible que si X_r est d'intérieur vide.

C'est une conséquence de Pawłucki et Pleśniak [1986] que (5.3) implique que X_r est d'intérieur vide. Pour voir cela, on considère l'ensemble compact

$$\{(h(w),r)\in\mathbf{C}^n\times\mathbf{R};\ w\in r\overline{B}\subset\mathbf{C}^m,\ 0\leqslant r\leqslant 1\},$$

qui est sous-analytique et par conséquent admet une courbe commençant à l'origine et telle que chaque point de la courbe soit centre d'une boule de rayon εr^p avec $\varepsilon>0$; voir Pawłucki et Pleśniak [1986, Th. 6.4]. Cela entraîne que le volume de X_r ne peut pas décroître plus rapidement qu'un monôme r^q quand r tend vers zéro. Avec $j>q$ on obtient une contradiction.

Comme le théorème de Pawłucki et Pleśniak repose sur un théorème très profond de Hironaka, il est souhaitable de trouver une démonstration plus élémentaire.

On peut toujours supposer que $m\geqslant n$ en ajoutant s'il le faut des variables dont h ne dépend effectivement pas. On considère tous les mineurs d'ordre n de la matrice jacobienne $(\partial h_j/\partial w_k)$. Si tous ces mineurs son nuls, le volume de l'image de h est nul et l'image n'a pas de point intérieur. Si, par contre, un des mineurs est non identiquement nul, alors l'image contient des points intérieurs, et il s'agit de démontrer que le volume des X_r ne décroît pas trop vite quand r tend vers zéro. On peut supposer que le mineur formé des dérivées d'après les n premières variables $w_1,...,w_n$ est non identiquement nul, et le problème se réduit alors au cas où $m=n$. On a donc un jacobien J, le déterminant de la matrice jacobienne, qui est une fonction holomorphe non identiquement nulle définie au voisinage de l'origine. Nous allons utiliser la minoration suivante pour le volume de l'image d'un ensemble ω :

$$\lambda(h(\omega))\geqslant\lambda(\omega)\inf_{\omega}|J|^2.\tag{5.4}$$

Or (5.4) n'est valable que si $h\big|_\omega$ est injective – d'où l'intérêt à trouver à la fois une minoration de J et des ensembles ω tels que la restriction $h\big|_\omega$ soit injective. Les deux lemmes suivants nous fournissent de l'information nécessaire.

Lemme 5.2. — *Soient ω un ouvert convexe dans $\mathbf{C}$ et $h\colon\omega\to\mathbf{C}$ une fonction holomorphe. Notons* $\operatorname{diam}(\omega)=\sup_{a,b\in\omega}|a-b|$ *le diamètre de ω. Si*

$$\|h'\|_\infty>\|h''\|_\infty\operatorname{diam}(\omega),$$

alors h est injective.

Démonstration. — Si h n'est pas injective il existe deux points distincts $a,b\in\omega$ tels que $h(a)=h(b)$. Pour tout nombre complexe γ avec $|\gamma|=1$ la fonction $\varphi_\gamma(t)=\operatorname{Re}\big(\gamma h(a+t(b-a))\big)$ prend la même valeur en 0 qu'en 1. Sa dérivée

$$\varphi'_\gamma(t)=\operatorname{Re}\big((b-a)\gamma h'(a+t(b-a))\big)$$

admet donc un zéro dans un point $t_\gamma \in [0,1]$. Notons $c_\gamma = a + t_\gamma(b-a) \in [a,b]$. Pour tout point $w \in \omega$ on a

$$|\operatorname{Re}\gamma(b-a)h'(w)| \leqslant |\operatorname{Re}\gamma(b-a)h'(c_\gamma)| + |b-a|\,\|h''\|_\infty |w-c_\gamma| = |b-a|\,\|h''\|_\infty |w-c_\gamma|,$$

d'où en faisant varier γ et w

$$\begin{aligned} |b-a|\,\|h'\|_\infty = \sup_{w\in\omega}\sup_{|\gamma|=1} |\operatorname{Re}\gamma(b-a)h'(w)| &\leqslant |b-a|\,\|h''\|_\infty \sup_{w\in\omega}\sup_{c\in[a,b]}|w-c| \\ &\leqslant |b-a|\,\|h''\|_\infty \operatorname{diam}(\omega). \end{aligned}$$

Lemme 5.3. — *Soient ω un ouvert convexe dans $\mathbf{C}^n$ et $h\colon \omega \to \mathbf{C}^n$ une application holomorphe. Notons* $\operatorname{diam}(\omega) = \sup_{a,b\in\omega}\|a-b\|_2$ *le diamètre euclidien de ω. Soient M_1 et M_2 les bornes supérieures de toutes les dérivées d'ordre un et deux respectivement des fonctions $\mathbf{R} \ni t \mapsto h(a+tb) \in \mathbf{C}^n$ avec $a, b \in \mathbf{C}^n$, $\|b\|_2 = 1$, et notons* $J = \operatorname{dét}(\partial h_j/\partial z_k)$ *le jacobien complexe de h. Si*

$$\sup_{w\in\omega}|J(w)| > n!M_1^{n-1}M_2 \operatorname{diam}(\omega),$$

alors h est injective.

Démonstration. — Supposons que h n'est pas injective. Alors il existe deux points distincts $a, b \in \omega$ tels que $h_j(a) = h_j(b)$ pour tout $j = 1, ..., n$, les h_j indiquant les composantes de h. Après un changement unitaire des coordonnées, qui ne change ni le jacobien J ni les quantités M_k, ni $\operatorname{diam}(\omega)$, on peut supposer que $a_2 = b_2, ..., a_n = b_n$ tandis que $a_1 \neq b_1$. Les h_j ne sont donc pas injectives comme fonctions de w_1 sur la droite passant par a et b et leurs dérivées admettent d'après le lemme 5.2 une majoration

$$\left|\frac{\partial h_j}{\partial w_1}\right| \leqslant M_2 \operatorname{diam}(\omega), \qquad j = 1, ..., n.$$

Le jacobien vaut

$$J = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1}\frac{\partial h_j}{\partial w_1} D_j,$$

où les D_j sont des mineurs d'ordre $n-1$ formés des dérivées $\partial h_i/\partial w_k$. Ils sont faciles à majorer :

$$|D_j| \leqslant (n-1)!M_1^{n-1}.$$

En combinant avec la majoration pour $\partial h_j/\partial w_1$ on obtient

$$|J(w)| \leqslant nM_2 \operatorname{diam}(\omega)(n-1)!M_1^{n-1}, \quad w \in \omega,$$

ce qui termine la démonstration.

Suite de la démonstration du théorème 5.1. — Comme nous l'avons vu, il suffit de considérer le cas $m = n$. Le jacobien admet après un changement unitaire des coordonnées une représentation

$$J(w) = g(w)\Big(w_n^p + \sum_0^{p-1} a_j(w')w_n^j\Big),$$

où g est holomorphe avec $g(0) \neq 0$ et les a_j sont des fonctions holomorphes de $w' = (w_1, ..., w_{n-1})$ au voisinage de l'origine et s'annulant à l'origine (théorème de préparation de Weierstrass). Il s'en suit que

$$|J(w)| \geqslant \delta_1 |w_n|^p \quad \text{si} \quad |w'| \leqslant \delta_2 |w_n|^p.$$

Pour tout r avec $0 < r \leqslant 1$ on peut trouver une boule ω_r contenue dans $rB \cap \{w;\, |w_n| > r/2\}$, de diamètre égal à $\delta_3 r^p$, telle que J y admette une minoration $\inf_{\omega_r} |J| > 2^{-p}\delta_1 r^p$ et, en plus, δ_3 soit choisi tel que $2^{-p}\delta_1 r^p \geqslant n! M_1^{n-1} M_2 \delta_3 r^p$, donc tel que le lemme 5.3 puisse être appliqué. Par conséquent $h\big|_{\omega_r}$ est injective. Le volume de ω_r est $\lambda(\omega_r) = \delta_4 r^{2np}$ et on obtient une minoration du volume de X_r en se servant de (5.4) :

$$\lambda(X_r) \geqslant \lambda(h(\omega_r)) \geqslant \lambda(\omega_r) \inf_{\omega_r} |J|^2 \geqslant \delta_4 r^{2np} 2^{-2p} \delta_1^2 r^{2p} = \delta_5 r^{2(n+1)p}.$$

Dans tout ceci les δ_j sont bien entendu des quantités strictement positives qui dépendent de h mais non pas de r. Cette minoration de $\lambda(X_r)$ est en contradiction avec (5.3). La partie (A) du théorème 5.1 est donc démontrée.

(B) — Passons au cas où l'image de h est d'intérieur vide par hypothèse. D'après un théorème bien connu, l'image de h est contenue dans la réunion d'une famille dénombrable de variétés analytiques Y_k; voir Čirka [1985: 38]. Les Y_k ne sont pas des sous-variétés de $\mathbf{C}^n$ mais chaque Y_k est sous-variété d'un ouvert Ω_k de $\mathbf{C}^n$. Si l'image n'a pas de point intérieur, la dimension de Y_k ne dépasse pas $n-1$ et Y_k est pluripolaire dans Ω_k. Pour conclure on aura besoin d'un théorème de Josefson [1978] qui dit qu'un ensemble localement pluripolaire l'est aussi globalement. Chaque partie relativement compacte de Y_k est localement pluripolaire dans $\mathbf{C}^n$; donc d'après le théorème de Josefson globalement pluripolaire; comme Y_k est réunion dénombrable de telles parties on obtient bien la conclusion desirée que Y_k est pluripolaire dans $\mathbf{C}^n$. La réunion de toutes les Y_k l'est aussi.

Soit maintenant $u < 0$ une fonction plurisousharmonique non identiquement $-\infty$ dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^n$ telle que $u(z) = -\infty$ pour tout $z = h(w)$ avec w dans un voisinage V de l'origine de $\mathbf{C}^m$. Alors la fonction

$$f(z) = -\sqrt{-u(z)}$$

a un nombre de Lelong nul en tout point, tandis que $f \circ h$ vaut identiquement $-\infty$ dans V, donc $\nu_{f \circ h} = +\infty$ partout dans V. Une modification de cet exemple,

$$f(z) = \max\left(-\sqrt{-u(z)},\ a \log \|z\|\right),$$

donne $\nu_f(0) = 0$ et $(f \circ h)(w) = a \log \|h(w)\|$, donc $\nu_{f \circ h}(0)$ peut être n'importe quel nombre positif – sauf bien entendu dans le cas peu intéressant où h est identiquement nulle. Cela montre que l'inégalité (5.1) n'est pas vraie et achève la démonstration.

Évidemment l'image est pluripolaire si elle est contenue dans une hypersurface analytique. Or la réciproque n'est pas vraie comme montre l'exemple suivant (cf. Hironaka, Lejeune-Jalabert et Teissier [1973: 441]).

Exemple 5.4. — Soit $h\colon \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^3$ définie par

$$h(w_1, w_2) = \big(w_2, w_2 e^{w_1}, w_2 e^{e^{w_1}}\big).$$

Notons $\Omega = \{z \in \mathbf{C}^3;\ z_1 z_2 \neq 0\}$. L'image de h est

$$h(\mathbf{C}^2) = \{z \in \Omega;\ z_3 = z_1 e^{z_2/z_1}\} \cup \{(0,0,0)\}.$$

Cette image n'est contenue dans aucune hypersurface analytique de $\mathbf{C}^3$, même si on se restreint à l'image d'un voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^2$ aussi petit que l'on veut. Elle n'est même pas contenue dans une réunion dénombrable d'hypersurfaces; voir Favre [1999]. Cependant, la partie de l'image qui est dans Ω est bien une hypersurface :

$$h(\mathbf{C}^2) \cap \Omega = \{z \in \Omega;\ z_3 = z_1 e^{z_2/z_1}\}.$$

Donc l'image est égale à la réunion d'une hypersurface dans Ω et l'origine. L'hypersurface dans Ω est bien entendu pluripolaire dans Ω, et vu le théorème de Josefson cité plus haut elle est aussi pluripolaire dans $\mathbf{C}^3$. L'origine est pluripolaire dans $\mathbf{C}^3$ et par conséquent aussi toute l'image $h(\mathbf{C}^2)$.

Bibliographie

Čirka (E. M.)
1985 *Kompleksnye analitičeskie množestva.* Moscou : Nauka. 272 pp.

Diller (Jeffrey)
1996 Dynamics of birational maps of $\mathbf{P}^2$. *Indiana Univ. Math. J.* **45,** 721–772.

Favre (Charles)
1999 Note on pull-back and Lelong number of currents. *Bull. Soc. math. France* **127**, 445–458.

Hironaka (Heisuke), Lejeune-Jalabert (Monique) et Teissier (Bernard)
1973 Platificateur local en géométrie analytique et aplatissement local. *Singularités à Cargèse,* pp. 441–463. *Astérisque,* Nos. 7 et 8.

Josefson (Bengt)
1978 On the equivalence between locally polar and globally polar sets for plurisubharmonic functions on $\mathbf{C}^n$. *Ark. mat.* **16,** 109–115.

Kiselman (Christer O.)
1987 Un nombre de Lelong raffiné. *Séminaire d'Analyse Complexe et Géométrie 1985–87,* 61–70. Faculté des Sciences de Tunis & Faculté des Sciences et Techniques de Monastir.
1994a Attenuating the singularities of plurisubharmonic functions. *Ann. Polon. Math.* **60,** 173–197.
1994b Plurisubharmonic functions and their singularities. Dans : *Complex Potential Theory* (Réd. P. M. Gauthier et G. Sabidussi). NATO ASI Series, Series C, Vol. 439, pp. 273–323. Kluwer Academic Publishers.

Kołodziej (Sławomir)
1998 The complex Monge–Ampère equation. *Acta Math.* **180,** 69–117.

LELONG (Pierre)

1964 Fonctions entières (n variables) et fonctions plurisousharmoniques d'ordre fini dans $\mathbf{C}^n$. *J. Analyse Math.* **12,** 365–407.

MEO (Michel)

1996a *Transformations intégrales pour les courants positifs fermés et théorie de l'intersection.* Thèse de Doctorat de Mathématiques de l'Université Joseph Fourier (Grenoble II). 58 pp.

1996b Image inverse d'un courant positif fermé par une application analytique surjective. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I* **322,** 1141–1144.

PAWŁUCKI (Wiesław) et PLEŚNIAK (Wiesław)

1986 Markov's inequality and C^∞ functions on sets with polynomial cusps. *Math. Ann.* **275,** 467–480.

SKODA (Henri)

1972 Sous-ensembles analytiques d'ordre fini ou infini dans $\mathbf{C}^n$. *Bull. Soc. Math. France* **100,** 353–408.

Adresse de l'auteur : Université d'Uppsala, Département de Mathématiques,
Boîte postale 480, SE-751 06 Uppsala, Suède.

Adresse électronique : kiselman@math.uu.se URL : http://www.math.uu.se/~kiselman

Téléphones : +46–18-471 32 16 (bureau); +46–18-30 07 08 (domicile);
+46–708-87 07 08 (portable) Télécopie : +46–18-471 32 01