UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Christer Kiselman, 0708-870708

Prov i matematik
W & K med flera
Fouriermetoder (3 poäng)
2000 10 19

Skrivtid: 9:00–14:00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon, *Beta* (eller kopia eller formelsamling). Varje korrekt löst uppgift ger 8 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng.

Jag avser att komma till skrivsalen omkring klockan 10:00 för att höra om det finns frågor. Läs igenom hela texten till dess och kolla att du förstår alla formuleringar. Fördelen med detta är också att du kan låta ditt undermedvetna arbeta med ett problem medan du löser att annat.

1. Differentialekvationen $u'' + (1+a)u' + au = 0$ med begynnelsevärdena $u(0) = 1$, $u'(0) = -1$ löses av funktionen $u(t) = e^{-t}$, således av en snabbt avtagande funktion. Detta gäller för alla reella värden på a. Man kan nu undra om detta innebär att ekvationen är stabil för alla a.

(a) Vad menas med att differentialekvationen är stabil? Ge definitionen av stabilitet.

(b) Ge ett nödvändigt och tillräckligt villkor, tillämpbart på den karaktäristiska ekvationens rötter, för att differentialekvationen skall vara stabil.

(c) Undersök för vilka reella a differentialekvationen är stabil.

2. Leonardo Fibonacci (cirka 1174 – cirka 1250) upptäckte den underbara *Fibonacciföljden* $f = (f(0), f(1), f(2), ...)$, som definieras av att $f(0) = f(1) = 1$ samt att $f(n+2) = f(n) + f(n+1)$ för alla $n \geqslant 0$. Den förekommer i många sammanhang. Till exempel har en prästkrage (*Leucanthemum vulgare*, lekanto) ofta $f(8)$, $f(9)$ eller $f(10)$ kronblad. Att förklara detta märkliga faktum ingår inte i kursen, däremot följande uppgifter.

(a) Beräkna z-transformen $F(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n}$ av f.

(b) Ange en explicit formel för f: $f(n) = A\alpha^n + B\beta^n$, $n \in \mathbf{N}$.

(c) Har kvoten $f(n-1)/f(n)$ ett gränsvärde? I så fall vilket?

3. Funktionen $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definieras av att den är periodisk med perioden 2π och att den för $-\pi \leqslant t < \pi$ ges av $f(t) = \cosh t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$.

(a) Är funktionen kontinuerlig på hela reella axeln?

(b) Beräkna Fourierserien för f.

(c) Konvergerar Fourierserien? Mot vad?

(d) Använd denna Fourierserie för att beräkna summan $\sigma = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

4. En signal f definieras av att

$$f(t) = \begin{cases} \cos(2\pi\alpha_1 t) + \frac{3}{10}\cos(2\pi\alpha_2 t), & 0 < t < 1, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Här är t tiden mätt i sekunder och $\alpha_1 = 320\,\mathrm{Hz}$, $\alpha_2 = 900\,\mathrm{Hz}$.

(a) Rita upp amplitudspektrum för signalen f, dvs. $|\hat{f}(\omega)|$ som funktion av ω. Det har fyra toppar. Beräkna deras höjder approximativt. Vilken topp är högst? (Topparna till de fyra rena exponentialsvängningar som bygger upp signalen kan beräknas exakt, så det gäller att visa att de övriga tre termerna inte stör alltför mycket där en term har sitt maximum.)

(b) Man vet att vokalen [i] kännetecknas av att dess andra formant ligger omkring tre oktaver högre än dess första formant, medan hos [a] den andra formanten ligger blott en halv oktav högre än den första. Hos [u], slutligen, är den andra formanten betydligt svagare än den första och har en frekvens som är en och en halv oktav högre än den förstas. Vilka av dessa tre vokaler syntetiseras bäst av signalen f?

5. Värmeledningen i en viss del av jorden antas vara styrd av ekvationen $u_t(z,t) = ku_{zz}(z,t)$, där z är djupet under markytan mätt i meter, t tiden mätt i dygn från 2000 01 01, klockan 00:00, och där $u(z,t)$ är temperaturen mätt i °C på djupet z vid tiden t. (Således inga radioaktiva källor av betydelse inom ekvationens giltighetsområde.) Vidare är k en positiv konstant mätt i kvadratmeter per dygn, vars värde beror på jordartens egenskaper.

(a) Visa att det för varje icke-negativt tal α finns icke-negativa tal β och γ sådana att $u(z,t) = e^{-\gamma z}\cos(\alpha t - \beta z)$ löser ekvationen för $z > 0$, $t > 0$. Ange värdet hos β och γ för varje $\alpha \geqslant 0$.

(b) Vi studerar nu temperaturens dagliga och årliga variation, och antar att den vid jordytan, således vid $z = 0$, ges av en formel

$$T(0,t) = \tfrac{1}{2}A_0 + A_1\cos(\alpha_1(t - b_1)) + A_2\cos(\alpha_2(t - b_2)), \qquad t > 0,$$

där $\frac{1}{2}A_0$ är medeltemperaturen, A_1 den dagliga amplituden och A_2 den årliga amplituden. Vidare är $\alpha_1 = 2\pi$ och $\alpha_2 = 2\pi/365$ de vinkelfrekvenser som hör till den dagliga respektive årliga variationen, medan tidpunkterna b_j anger när under dygnet respektive året det är varmast. Vad blir nu (med ledning av (a)) temperaturen $T(z,t)$ på djupet z vid tiden t?

Svar till tentamen i Fouriermetoder (3 poäng) 2000 10 19

1. (a) Ekvationen $P(D)u = 0$ kallas *stabil* om impulssvaret, dvs. lösningen till $P(D)u = \delta$, där δ betecknar enhetsimpulsen (Diracmåttet), går mot noll då tiden går mot $+\infty$ för alla begynnelsevärden (valet $u(0) = 1$, $u'(0) = -1$ är speciellt och det räcker inte för stabilitet). (Jfr. Sollervall & Styf [1999:24].)

(b) Ett nödvändigt och tillräckligt villkor är att alla polerna till överföringsfunktionen $1/P(s)$ har negativ realdel. Dessa poler är desamma som nollställena till polynomet P, eller med andra ord rötterna till den karaktäristiska ekvationen $P(s) = 0$.

(c) Man finner att rötterna till den karaktäristiska ekvationen $s^2 + (1+a)s + a = 0$ är $s = -a$ och $s = -1$. Ekvationen är alltså stabil om och endast om a är positiv.

2. (a) Vi får

$$z^2F(z) - z^2f(0) - zf(1) - zF(z) + zf(0) - F(z) = 0,$$

varav

$$F(z) = \frac{z^2}{z^2 - z - 1} = \frac{Az}{z-\alpha} + \frac{Bz}{z-\beta},$$

där $\alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ och $\beta = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$. Man räknar ut att $A = \alpha/\sqrt{5}$, $B = -\beta/\sqrt{5}$.

(b) Man finner från en tabell att

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}\right), \qquad n \in \mathbf{N}.$$

(c) Vi får

$$\frac{f(n-1)}{f(n)} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}} = \frac{1 - (\beta/\alpha)^n}{\alpha - \beta(\beta/\alpha)^n}.$$

Eftersom $|\beta/\alpha| < 1$ går denna kvot mot $1/\alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = -\beta$. Detta tal kallas *det gyllene snittet* och en rektangel vars sidor står i detta förhållande anses sedan länge vara speciellt vacker.

3. (a) Ja.

(b)

$$\frac{a_0}{2} + a_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} \cos nt,$$

där $a_0 = (e^{\pi} - e^{-\pi})/\pi = 2(\sinh \pi)/\pi$.

(c) Serien konvergerar för alla t och dessutom just mot $f(t)$.

(d) Man finner genom att sätta in $t = \pi$ och använda (c) att

$$\sigma = \frac{1}{2} + \frac{\pi \cosh \pi}{2 \sinh \pi}.$$

4. (a) Topparna inträffar vid de fyra frekvenserna $\pm\alpha_1$, $\pm\alpha_2$. Höjderna blir ungefär $0,5$ vid $\pm\alpha_1$ och $0,15$ vid $\pm\alpha_2$ (hälften av signalens varaktighet gånger amplituden). De toppar som hör till $\pm\alpha_1$ är klart högst. Men varje topp störs av småvågor från de andra topparna, och om topparna ligger alltför nära blir dessa störningar stora. Vi bör alltså för varje frekvens $\pm\alpha_j$ kolla att störningarna från de andra frekvenserna är små jämfört med den aktuella toppen. Vid frekvensen $\alpha_1 = 320\,\text{Hz}$ har den term som hör till den frekvensen sitt maximum, vilket är exakt $0,5$, medan den term som hör till α_2 där inte har större absolutbelopp än $0,3/2\pi|\alpha_1 - \alpha_2| = 0,3/1160\pi \approx 0,00008 \ll 0,5$. Den term som hör till $-\alpha_1$ stör inte heller så mycket vid α_1: dess värde vid α_1 är högst $1/2\pi|\alpha_1 - (-\alpha_1)| = 1/1280\pi \approx 0,00025 \ll 0,5$. På liknande sätt ser man för var och en av de fyra frekvenserna $\pm\alpha_j$ att den term som har sitt maximum där är mycket större än de tre andra termer som inte har maximum där.

(b) För [i] är kvoten mellan den andra och första frekvensen tre oktaver (8 gånger); för [a] är den en halv oktav (1,4 gånger); för [u] är den 1,5 oktav (2,8 gånger); för signalen f är kvoten $\alpha_2/\alpha_1 = 900/320 \approx 2,8$. Av de tre vokalerna är det tydligen [u] som liknar f mest.

5. (a) För att funktionen $e^{-\gamma z}\cos(\alpha t - \beta z)$ skall vara en lösning är det nödvändigt och tillräckligt att $\gamma^2 = \beta^2$ (således att $\gamma = \pm\beta$) och att $\alpha = 2k\beta\gamma$. Eftersom vi antagit att konstanten α är positiv eller noll, så måste β och γ ha samma tecken, och de kan då väljas icke-negativa med $\beta = \gamma = \sqrt{\alpha/2k}$.

(b) Man ser att respektive svängning försvagas med faktorn $e^{-\beta_j z}$ på djupet z samtidigt som det blir en fördröjning i argumentet för cosinus med $\beta_j z$; således blir

$$T(z,t) = \tfrac{1}{2}A_0 + \sum_1^2 A_j e^{-\beta_j z}\cos\big(\alpha_j(t - b_j) - \beta_j z\big), \qquad \text{där } \beta_j = \sqrt{\alpha_j/2k}.$$