UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Christer Kiselman, 0708-870708

Prov i matematik
W & K med flera
Fouriermetoder (3 poäng)
2001 01 10

Skrivtid: 8:00–13:00. Tillåtna hjälpmedel: (1) skrivdon; (2) *Beta* (eller kopia eller formelsamling); (3) räknare. Varje korrekt löst uppgift ger 8 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng.

Jag avser att komma till skrivsalen omkring klockan 09:00 för att höra om det finns frågor. Läs gärna igenom hela texten till dess och kolla att du förstår alla formuleringar.

1. (a) Vad menas med faltningsprodukten av två funktioner f och g som är definierade på reella axeln? Ange definitionen. Ange något lämpligt villkor på f och g som gör att faltningsprodukten $(f * g)(t)$ säkert existerar för alla $t \in \mathbf{R}$.

(b) Ange hur definitionen ser ut om man antar att f och g är noll på den negativa halvaxeln. Ange ett lämpligt villkor (svagare än i (a)) på funktionerna för att faltningen skall existera i detta fall.

(b) Vi antar att en funktion $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ är definierad på hela reella axeln och att den är noll för negativa värden hos argumentet. Vidare antar vi att f har en Laplacetransform och uppfyller ekvationen

$$f(t) + \int_0^t f(x)e^{t-x}dx = \sin t, \qquad t \geqslant 0.$$

Lös ekvationen med hjälp av Laplacetransformationen.

2. Tillståndet hos en viss storhet u ett visst år beror av tillståndet under de två närmast föregående åren, så att $u(n+2)$ är en funktion av $u(n+1)$ och $u(n)$. Vi antar att sambandet ges av en ekvation, något oegentligt kallad differensekvation,

$$u(n+2) - (a + (2a)^{-1})u(n+1) + \tfrac{1}{2}u(n) = \delta, \qquad n \in \mathbf{N},$$

där $u = (u(n))_{n\in\mathbf{N}}$ är den okända följden av värden, a en reell parameter, och δ betecknar enhetsimpulsen, som definieras av att $\delta(0) = 1$, $\delta(n) = 0$ då $n \geqslant 1$.

(a) Vad menas med att differensekvationen är stabil? Ge definitionen av stabilitet.

(b) Ange ett nödvändigt och tillräckligt villkor, tillämpbart på den karaktäristiska ekvationens rötter, för att differensekvationen skall vara stabil.

(c) Undersök med hjälp av villkoret i (b) för vilka reella värden på parametern a som differensekvationen är stabil.

(d) Vi lägger nu till begynnelsevillkoren $u(0) = u(1) = 0$ till ekvationen och fastlägger värdet hos parametern a till $1/\sqrt{2}$. Beräkna under dessa förutsättningar z-transformen $U(z) = \sum_{n\in\mathbf{N}} u(n)z^{-n}$ av u. Ange därefter $u(n)$, $n \in \mathbf{N}$.

3. Beräkna Fouriertransformen av funktionen $f(t) = e^{-3|t-4|}$, $t \in \mathbf{R}$.

4. En signal f, definierad för alla tider $t \in \mathbf{R}$, har Fouriertransformen $\hat{f}$, även kallad *spektrum* för f. Vi delar nu upp signalen i ett antal delsignaler f_j, $j \in \mathbf{Z}$, genom att sätta f_j lika med f i ett intervall $[j\varepsilon, (j+1)\varepsilon[$, $j \in \mathbf{Z}$, och lika med noll utanför detta intervall. Här är ε ett positivt tal (en kort tid). Således blir $f = \sum_{j \in \mathbf{Z}} f_j$. Samlingen av alla spektra $(\hat{f}_j)_{j \in \mathbf{Z}}$ kallas för signalens *spektrogram* och innehåller viktig information. Vi kan åskådliggöra spektrogrammet genom att tänka oss en funktion av två variabler, nämligen j, som anger tiden, fast diskret, och ω, som anger frekvensen, argumentet för varje funktion $\hat{f}_j$. Denna funktion skall ju strängt taget återges i ett tredimensionellt diagram, men vi kan förenkla presentationen genom att i ett tvådimensionellt diagram svärta de punkter (j, ω) där $|\hat{f}_j(\omega)|$ överskrider en viss nivå. Eftersom f antas reell i tillämpningarna är det onödigt att använda negativa frekvenser: vi markerar endast punkter (j, ω) med $\omega \geqslant 0$. Vidare gör vi konventionen att den diskreta tiden j avsätts horisontellt och frekvensen ω vertikalt i det tvådimensionella diagrammet (man kan givetvis göra tvärtom, men vi fastlägger denna konvention för att kunna tala om horisontella streck och vertikala streck i fortsättningen).

Vi studerar nu följande tonsignaler:

A. En ren sinussvängning.
B. En skarp knall.
C. En ton med två övertoner, dvs. en sinussvängning och två andra sinussvängningar med högre frekvens.
D. Ett väsande, som det svenska *s*-ljudet eller *sje*-ljudet, eller en knölsvans väsande, som pågår under två sekunder.

Vår kraftfulla dator analyserar tonerna och levererar tydliga spektrogram. På grund av brådska eller slarv eller bådadera blir dock ordningsföljden något omkastad och ett spektrogram av en femte signal har kommit med:

α. En rektangel.
β. Ett vertikalt streck.
γ. Tre horisontella streck.
δ. Två horisontella streck efter varandra, varav det andra ligger något lägre än det första.
ε. Ett horisontellt streck.

Ange för var och en av signalerna A, B, C, D vilket av spektrogrammen α, β, γ, δ, ε som är det rätta.

5. En gitarrsträngs svängningar styrs av vågekvationen $u_{tt} = c^2 u_{xx}$. Strängen sitter fast i ändpunkterna, som har koordinaterna $x = 0$ och $x = 80\,\text{cm}$. Man håller fast strängen i ett visst läge vid tiden $t = 0$, så att $u(x,0) = f(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 80$, där f är en given funktion, medan $u_t(x,0) = 0$ för dessa x. Så släpps den. Grundfrekvensen visar sig vara 247 Hz; övertonen en oktav högre har alltså frekvensen $2 \cdot 247 = 494\,\text{Hz}$. Som bekant från kursen ges strängens svängningar då av en serie

$$u(x,t) = \sum_1^\infty b_n \sin \frac{\pi n x}{80} \cos(2\pi \cdot 247 n t), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 80, \quad t \geqslant 0,$$

där läget vid tiden noll ges av funktionen f med sinusserien

$$u(x,0) = f(x) = \sum_1^\infty b_n \sin \frac{n\pi x}{80}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 80.$$

Tonen med frekvensen $247n$ Hz har alltså amplituden $|b_n|$ och den relativa styrkan hos övertonen vid 494 Hz jämfört med grundtonen vid 247 Hz är $|b_2|/|b_1|$. Denna kvot kan avlyssnas (den påverkar tonens musikaliska kvalitet), och den beror på hur man drar strängen från jämviktsläget. Antag nu att man drar strängen åt sidan $0,4$ centimeter på mitten (dvs. vid $x = 40$ cm), så att dess läge vid tiden noll är

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{100}, & 0 \leqslant x \leqslant 40, \\[2ex] \dfrac{80 - x}{100}, & 40 \leqslant x \leqslant 80. \end{cases}$$

Visa att $b_2 = 0$ medan $b_1 > 0$, dvs. att kvoten är noll och det inte blir någon överton med frekvensen 494 Hz.

Svar till tentamen i Fouriermetoder (3 poäng) 2001 01 10

1. (a) Definitionen finns hos Sollervall & Styf, sidan 29. Vi kan till exempel anta att f och g är kontinuerliga och att de avtar tillräckligt snabbt i oändligheten, till exempel så att $|f(t)|, |g(t)| \leqslant C(1+|t|)^a$, där C och a är konstanter och $a < -1$.

(b) Om $f(t) = g(t) = 0$ då $t < 0$ så blir $(f * g)(t) = 0$ då $t < 0$ och

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(x)g(t-x)dx, \qquad t \geqslant 0.$$

Här existerar faltningen till exempel för alla kontinuerliga f och g, hur snabbt de än växer.

(c) Vi ser att integralen är faltningsprodukten mellan f och exponentialfunktionen e^t, avskuren så att den blir noll för negativa värden på argumentet. Laplacetransformeras båda leden så får vi

$$\mathcal{L}f + \mathcal{L}f \cdot \frac{1}{s-1} = \frac{1}{s^2+1},$$

varav

$$\mathcal{L}f = \frac{s-1}{s(s^2+1)} = \frac{s+1}{s^2+1} - \frac{1}{s},$$

och man ser i en tabell att $f(t) = \cos t + \sin t - 1$ för $t \geqslant 0$, noll för $t < 0$.

2. (a) Ekvationen $P(D)u = 0$ kallas *stabil* om impulssvaret, dvs. lösningen till $P(D)u = \delta$, där δ betecknar enhetsimpulsen, går mot noll då tiden går mot $+\infty$ för alla begynnelsevärden $u(0)$ och $u(1)$ (för ekvationer av ordning m blir det förstås: för alla begynnelsevärden $u(0)$, $u(1)$,..., $u(m-1)$). (Jfr. Sollervall & Styf [1999:43].)

(b) Ett känt nödvändigt och tillräckligt villkor för stabilitet är att alla nollställena till polynomet P skall ha absolutbelopp mindre än 1. (Jfr. Sollervall & Styf [1999:44], där det dock endast står att villkoret är tillräckligt.)

(c) Vi ser att nollställena är a och $(2a)^{-1}$. Båda dessa tal skall alltså ha absolutbelopp mindre än 1, vilket innebär att $\frac{1}{2} < |a| < 1$.

(d) Då $a = 1/\sqrt{2}$ är ekvationen stabil enligt undersökningen i (c) och vi får

$$U(z) = \frac{1}{(z - 1/\sqrt{2})^2},$$

varav man kan avläsa i en tabell att $u(0) = 0$ och $u(n) = (n-1)2^{1-n/2}$ för $n \geqslant 1$.

3. Man får

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbf{R}} e^{-3|t-4|-i\omega t}dt = \int_0^\infty e^{-3s-i\omega(s+4)}ds + \int_{-\infty}^0 e^{3s-i\omega(s+4)}ds$$

$$= e^{-4i\omega}\left(\frac{1}{3+i\omega} + \frac{1}{3-i\omega}\right) = \frac{6e^{-4i\omega}}{9+\omega^2}, \qquad \omega \in \mathbf{R}.$$

4. Vi vet från kursen att en ren sinussvängning ger ett horisontellt streck (en enda frekvens under en längre tid); dess övertoner horisontella streck som ligger över det första; en skarp knall ett vertikalt streck (alla frekvenser i ett stort intervall förekommer, men under en mycket kort tid); samt att ett väsande ljud innehåller många frekvenser, men nu under en längre tid. Därför har signalen A spektrogrammet ε, B spektrogrammet β, C spektrogrammet γ och slutligen D spektrogrammet α.

Spektrogrammet δ kommer från en gökhane (*Cuculus canorus*), som med sitt klangfulla rop *å-o* eller *ho-ho* (som sjunker ungefär en ters) har smugglats in av Lars Gårding (se hans bok *Fåglars sång och läten,* sidan 43). Att identifiera göken ingår inte i denna kurs; däremot att veta att δ inte kan vara spektrogrammet av någon av signalerna A, B, C, D.

5. Vi utvidgar f till en udda funktion med perioden 160 cm. Tydligen är $T = 160$ och $\Omega = 2\pi/T = \pi/80$. Man vet att koefficienterna b_n ges av formlerna

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\sin(n\Omega x)dx = \frac{1}{40}\int_0^{80} f(x)\sin(\pi n x/80)dx, \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

(Sollervall & Styf sidan 64; *Beta* sidan 306). Man ser lätt att b_1 är positiv (integranden är positiv för $0 < x < 80$), medan $b_2 = 0$ (udda symmetri kring $x = 40$). Kvoten blir alltså noll.