UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Christer Kiselman, 0708-870708

Prov i matematik
K, W och några X
Fouriermetoder (3 poäng)
2001 10 18

Skrivtid: 09:00–14:00. *Lokal:* Polacksbacken.
Tillåtna hjälpmedel: (1) skrivdon; (2) *Beta* (eller kopia eller formelsamling eller *Physics Handbook*); (3) räknare. Ej mobiltelefon. Varje korrekt löst uppgift ger 8 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng.

1. Lös faltningsekvationen

$$f(t) + \int_0^t f(t-x)\cos x\,dx = 1, \qquad t \geqslant 0,$$

till exempel medelst Laplacetransformationen.

2. Tillståndet hos en viss storhet u ett visst år beror av tillståndet under de två närmast föregående åren, så att värdet i år, $u(n+2)$, är en funktion av $u(n+1)$ och $u(n)$, värdena i fjol och förfjol. Vi antar att sambandet ges av en ekvation, något oegentligt kallad differensekvation,

$$u(n+2) - \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{a}\right)u(n+1) + \tfrac{1}{2}u(n) = \delta(n), \qquad n \in \mathbf{N},$$

där $u = (u(n))_{n\in\mathbf{N}}$ är den okända följden av värden, a en reell parameter, och δ betecknar enhetsimpulsen, som definieras av att $\delta(0) = 1$, $\delta(n) = 0$ då $n \geqslant 1$.

(a) Vad menas med att differensekvationen är stabil? Ge definitionen av stabilitet.

(b) Ange ett nödvändigt och tillräckligt villkor, tillämpbart på den karaktäristiska ekvationens rötter, för att differensekvationen skall vara stabil.

(c) Undersök med hjälp av villkoret i (b) för vilka reella värden på parametern a som differensekvationen är stabil.

(d) Vi lägger nu till begynnelsevillkoren $u(0) = u(1) = 0$ till ekvationen och fastlägger värdet hos parametern a till $\sqrt{2}$. Beräkna under dessa förutsättningar z-transformen $U(z) = \sum_{n\in\mathbf{N}} u(n)z^{-n}$ av u. Ange därefter $u(n)$ för alla $n \in \mathbf{N}$.

3. En ton $f(t) = \displaystyle\sum_1^\infty a_n \cos 2\pi nt$ är sammansatt av fyra cosinussvängningar:

$$f(t) = a_{440}\cos 880\pi t + a_{880}\cos 1\,760\pi t + a_{12\,000}\cos 24\,000\pi t + a_{14\,000}\cos 28\,000\pi t, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Här är frekvenserna 440 Hz och 880 Hz önskvärda, medan de högre frekvenserna 12 000 Hz och 14 000 Hz är störningar som man önskar filtrera bort medelst ett frekvensfilter g. Det innebär att den filtrerade tonen $\tilde{f}$ ges av en faltningsprodukt

$$\tilde{f}(t) = (f * g)(t) = \int_0^1 f(t-x)g(x)\,dx, \qquad t \in \mathbf{R},$$

där g är en funktion på $\mathbf{R}$ med period 1 och Fourierkoefficienter d_n. Vi väljer

$$d_n = \frac{1}{1 + n^2/880^2}, \qquad n \in \mathbf{Z}.$$

Visa att filtret g har de önskade egenskaperna genom att den filtrerade tonen $\tilde{f}$ har cosinuskoefficienter $\tilde{a}_n$ som uppfyller $\tilde{a}_n \geqslant \frac{1}{2}a_n$ för frekvenserna $n = 440,\ 880$, medan $|\tilde{a}_n| \leqslant 0,006a_n$ för frekvenserna $n = 12\,000,\ 14\,000$. *Ledning:* Det får anses känt från kursen (och är för övrigt lätt att visa) att den filtrerade tonen har Fourierkoefficienterna $\tilde{c}_n = c_n d_n$.

4. En elektrisk signal består av en likströmskomponent, en växelströmskomponent med den vanliga frekvensen 50 Hz och en växelströmskomponent med frekvensen 150 Hz:

$$f(t) = A + \sin 100\pi t + B \cos 300\pi t, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Effekten hos signalen ges som bekant av integralen

$$\int_0^1 f(t)^2 dt,$$

och kan med hjälp av Parsevals formel delas upp efter frekvenserna. Bestäm de reella koefficenterna A och B så att de tre komponenterna får lika stor effekt.

5. Vi ställer oss frågan huruvida det går att få veta något om temperaturen på Grönland i forntiden genom att mäta temperaturen inne i isen nu. Att lösa detta problem ingår inte i kursen, men man kan bilda sig en uppfattning om rimligheten genom att studera hur en vågrörelse $f(t) = A_0 + A_1 \cos \alpha t$ vid ytan fortplantas ned genom isen. Här är t tiden mätt i år; $t = 0$ är nutid och vi är intresserade av tiden $-10^6 \leqslant t \leqslant 0$. Vidare är A_0 medeltemperaturen och A_1 amplituden för temperatursvängningen med vinkelfrekvensen α. Om svängningens period är T år, så är α således lika med $2\pi/T$ år^{-1}. (Den studerade svängningen kan till exempel innebära att det inträffat istider vid tidpunkterna $t = -\frac{1}{2}T, -\frac{3}{2}T, -\frac{5}{2}T, \ldots$ år.)

Vi antar att temperaturen u uppfyller värmeledningsekvationen $u_t = ku_{zz}$, där z är djupet mätt i meter, $0 \leqslant z \leqslant 3\,000$ ($3\,000\,\mathrm{m}$ är djupet för det kända borrhålet GRIP, Greenland Ice Core Project). Slutligen är k värmediffusiviteten, som för is är 33 m^2/år. Man ser att en lösning som vid isens yta $z = 0$ uppfyller $u(0, t) = f(t)$ är

$$u(z, t) = A_0 + A_1 e^{-\beta z} \cos(\alpha t - \beta z),$$

där $\beta > 0$ bestäms från α. (Detta är den enda begränsade lösningen med de givna värdena för $z = 0$, men bevis för detta erfordras inte.)

(a) Ange värdet för β i m^{-1} för $T = 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$ år.

(b) Ange för djupet $z = 3\,\mathrm{km}$ hur stor amplituden blir för de olika perioder som listats i (a).

(c) Vi anser att amplituder ned till $A_1 e^{-\pi} \approx 0,0432A_1$ (med fas motsatt den på ytan) är mätbara, medan amplituder som är mindre än $A_1 e^{-2\pi} \approx 0,00187A_1$ (med fas lika med den på ytan) inte är mätbara. För vilka av de angivna perioderna finns det med det kriteriet en mätbar variation på djupet $z = 3\,\mathrm{km}$?

Svar till tentamen i Fouriermetoder (3 poäng) 2001 10 18

1. Den enda lösningen med Laplacetransform är $f(t) = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-t/2} \sin \frac{\sqrt{3}t}{2}$, $t \geqslant 0$.

2. (a) Ekvationen $P(\tau)u = 0$ kallas *stabil* om impulssvaret, dvs. lösningen till $P(\tau)u = \delta$, där τ betecknar vänstertranslation och δ enhetsimpulsen, går mot noll då tiden går mot $+\infty$ för alla begynnelsevärden $u(0)$ och $u(1)$ (för ekvationer av ordning m blir det förstås: för alla begynnelsevärden $u(0)$, $u(1)$,..., $u(m-1)$). (Jfr. Sollervall & Styf [1999:43].)

Anmärkning: Det följer av denna egenskap att lösningen till $P(\tau)v = f$ går mot noll för alla högerled f som har egenskapen att $f(n) = 0$ då n är stort. Sådana f är ju ändliga lineärkombinationer av δ och dess translat, och lösningen v blir då en lineärkombination av u och dess translat; translatering påverkar inte egenskapen att gå mot noll. Det är viktigt att ta med frasen "för alla begynnelsevärden", eftersom det kan inträffa att lösningen går mot noll för vissa begynnelsevärden men inte för andra. (Det svarar mot att z-transformen blir $Q(z)/P(z)$, och vissa nollställen hos P kan förkortas bort för speciella Q.) Däremot är det ekvivalent att säga "för begynnelsevärdena $u(0) = u(1) = 0$", eftersom begynnelsevärdena noll ger en z-transform som är $1/P(z)$; inga nollställen i nämnaren kan då förkortas bort.

(b) Ett känt nödvändigt och tillräckligt villkor för stabilitet är att alla nollställena till polynomet P skall ha absolutbelopp mindre än 1. (Jfr. Sollervall & Styf [1999:44], där det dock endast står att villkoret är tillräckligt.)

(c) Vi ser att nollställena är $a/2$ och $1/a$. Båda dessa tal skall alltså ha absolutbelopp mindre än 1, vilket innebär att $1 < |a| < 2$.

(d) Då $a = \sqrt{2}$ är ekvationen stabil enligt undersökningen i (c) och vi får

$$U(z) = \frac{1}{(z - 1/\sqrt{2})^2},$$

varav man kan avläsa i en tabell att $u(0) = 0$ och $u(n) = (n-1)2^{1-n/2}$ för $n \geqslant 1$.

3. Att den filtrerade tonens Fourierkoefficienter uppfyller $\tilde{c}_n = c_n d_n$ är en allmän räkneregel. För cosinuskoefficienterna $\tilde{a}_n$ och a_n blir relationen densamma: $\tilde{a}_n = 2\tilde{c}_n = 2c_n d_n = a_n d_n$. Därför följer påståendena av att vi konstaterar att $d_{440} = 4/5 \geqslant d_{880} = 1/2$ medan $|d_n| \leqslant 0,006$ för $n = 12\,000,\ 14\,000$.

Anmärkning: Som framgår av formuleringen antas att $a_n \geqslant 0$; detta borde ha sagts mer explicit. Alternativt kan man anta a_n reella och visa att $|\tilde{a}_n| \geqslant \frac{1}{2}|a_n|$ respektive $|\tilde{a}_n| \leqslant 0,006|a_n|$.)

4. Ett trigonometriskt polynom är sin egen Fourierserie, så det följer att $\frac{1}{2}a_0 = A$, $b_{50} = 1$ och $a_{150} = B$. Parseval säger att effekterna är respektive $(a_0/2)^2 = A^2$, $\frac{1}{2}b_{50}^2 = \frac{1}{2}$ och $\frac{1}{2}a_{150}^2 = \frac{1}{2}B^2$. Vi skall således välja koefficienterna så att $A^2 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}B^2$, vilket betyder att $A = \pm 1/\sqrt{2}$ och $B = \pm 1$. (Man kan förstås också räkna ut $\displaystyle\int_0^1 f_j(t)^2 dt$ för de olika komponenterna av $f = f_1 + f_2 + f_3$.)

5. (a) Man finner att $\beta = \sqrt{\alpha/2k} = \sqrt{\pi/kT} = 0,309/\sqrt{T}$. För $T = 10^2, ..., 10^6$ blir således β respektive

$$0,03, \quad 0,01, \quad 0,003, \quad 0,001, \quad 0,0003\,\mathrm{m}^{-1}.$$

(b) Amplituden blir $A_1 e^{-\beta z}$. För $z = 3\,000$ blir $e^{-\beta z}$ respektive

$$e^{-90}, \quad e^{-30} \quad e^{-9}, \quad e^{-3}, \quad e^{-0,9}.$$

Man ser att talet $e^{-\beta z}$ blir för tok för litet för de kortare perioderna. Blott för de två sista blir det en tillräcklig amplitud.

(c) Slutsatsen av denna lilla undersökning är att perioder på 10^5 till 10^6 år lämnar mätbara minnen på djupet 3 km. Aktuell forskning visar att dessa minnen kan återkallas: se D. Dahl-Jensen, K. Mosegaard, N. Gundestrup, C. D. Clow, S. J. Johnsen, A. W. Hansen, N. Balling: Past temperatures directly from the Greenland ice sheet. *Science* **282** (1998), 268–271.