UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Christer Kiselman, 0708-870708

Prov i matematik
K, W, X
Fouriermetoder (3 poäng)
2002 01 09

Skrivtid: 09:00–14:00. *Lokal:* Polacksbacken.
Tillåtna hjälpmedel: (1) skrivdon; (2) *Beta* (eller kopia eller formelsamling eller *Physics Handbook*); (3) räknare. Ej mobiltelefon. Varje korrekt löst uppgift ger 8 poäng. För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25 respektive 32 poäng.

1. Differentialekvationen $u'' + (a+2)u' + 2au = 0$ med begynnelsevärdena $u(0) = 1$, $u'(0) = -2$ löses av funktionen $u(t) = e^{-2t}$, således av en snabbt avtagande funktion. Detta gäller för alla reella värden på a. Man skulle därför kanske kunna tro att differentialekvationen är stabil för alla $a \in \mathbf{R}$.

(a) Ange definitionen av stabilitet hos differentialekvationen.

(b) Ange ett nödvändigt och tillräckligt villkor, tillämpbart på den karaktäristiska ekvationens rötter, för att differentialekvationen skall vara stabil.

(c) Undersök för vilka reella a differentialekvationen är stabil.

2. En elektrisk signal består av en likströmskomponent, en växelströmskomponent med den vanliga frekvensen 50 Hz och en växelströmskomponent med frekvensen 400 Hz:

$$f(t) = 1 + A\cos 100\pi t + B\sin 800\pi t, \qquad t \in \mathbf{R},$$

där A och B är reella konstanter. Effekten hos signalen ges som bekant av integralen

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2 dt,$$

och kan med hjälp av Parsevals formel

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2 dt = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_1^\infty \left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

delas upp efter frekvenserna.

(a) Bestäm signalens Fourierkoefficienter a_n och b_n uttryckta i A och B (sätt $T = 1$ sekund och $\Omega = 2\pi/T = 2\pi$ radianer/sekund.)

(b) Bestäm alla värden hos de reella koefficenterna A och B sådana att de tre komponenterna får lika stor effekt.

3. Variationen av lufttrycket alldeles utanför din trumhinna ges av funktionen

$$f(t) = \begin{cases} \cos(2\pi\alpha_1 t) + \frac{6}{10}\cos(2\pi\alpha_2 t), & 0 < t < 1, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Här är t tiden mätt i sekunder och $\alpha_1 = 850\,\mathrm{Hz}$, $\alpha_2 = 1220\,\mathrm{Hz}$.

(a) Rita upp amplitudspektrum för signalen f, dvs. $|\hat{f}(\omega)|$ som funktion av ω. Det har fyra toppar. Beräkna deras höjder approximativt. Vilken topp är högst? (Topparna till de fyra rena exponentialsvängningar som bygger upp signalen kan beräknas exakt, så det gäller att visa att de övriga tre termerna inte stör alltför mycket där en term har sitt maximum.)

(b) Man vet att vokalen [i] kännetecknas av att dess andra formant ligger omkring tre oktaver högre än dess första formant, medan hos [a] den andra formanten ligger blott en halv oktav högre än den första. Hos [u], slutligen, är den andra formanten betydligt svagare än den första och har en frekvens som är en och en halv oktav högre än den förstas. Vilken av dessa tre vokaler syntetiseras bäst av signalen f?

4. Beräkna Fouriertransformen av

$$f(t) = \frac{4}{4 + (t-3)^2}, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

5. Temperaturen i en guldstav av längden $\pi\,\mathrm{dm}$ ges av ekvationen $u_t = ku_{xx}$ $(0 < x < \pi,\ t > 0)$, där k är värmediffusiviteten, som för guld är $0{,}0125\,\mathrm{dm}^2/\mathrm{s}$. Stavens ändpunkter hålles vid konstant temperatur lika med $22°\mathrm{C}$: $u(0,t) = u(\pi,t) = 22$, $t \geqslant 0$. Vidare ges temperaturen vid tiden noll av $u(x,0) = 22 + (2 + 2\cos x)\sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

(a) Bestäm, till exempel medelst variabelseparationsmetoden, temperaturen $u(x,t)$ för alla $x \in [0,\pi]$ och alla $t \geqslant 0$.

(b) Visa att temperaturen aldrig kommer att understiga $22°\mathrm{C}$.

(c) Visa att temperaturen understiger $22,8°\mathrm{C}$ då $t \geqslant 80\,\mathrm{s}$.

Svar till tentamen i Fouriermetoder (3 poäng) 2002 01 09

1. (a) Ekvationen $P(D)u = 0$ kallas *stabil* om impulssvaret, dvs. lösningen till $P(D)u = \delta$, där δ betecknar enhetsimpulsen (Diracmåttet), går mot noll då tiden går mot $+\infty$ för alla begynnelsevärden $u(0)$, $u'(0)$, $u''(0)$,..., $u^{(m-1)}(0)$, där m är ekvationens ordning. (Valet $u(0) = 1$, $u'(0) = -2$ är speciellt och det räcker inte för stabilitet.) (Jfr. Sollervall & Styf [1999:24].)

(b) Ett nödvändigt och tillräckligt villkor är att alla polerna till överföringsfunktionen $1/P(s)$ har negativ realdel. Dessa poler är desamma som nollställena till polynomet P, eller med andra ord rötterna till den karaktäristiska ekvationen $P(s) = 0$.

(c) Man löser den karaktäristiska ekvationen $s^2 + (a+2)s + 2a = 0$ och finner att dess rötter är $s = -a$ och $s = -2$. Ekvationen är alltså stabil om och endast om a är positiv.

2. Ett trigonometriskt polynom är sin egen Fourierserie, så det följer att $\frac{1}{2}a_0 = 1$, $a_{50} = A$ och $b_{400} = B$, medan alla andra är noll. Parseval säger att effekterna är respektive $(a_0/2)^2 = 1$, $\frac{1}{2}a_{50}^2 = \frac{1}{2}A^2$ och $\frac{1}{2}b_{400}^2 = \frac{1}{2}B^2$. Vi skall således välja koefficienterna så att $1 = \frac{1}{2}A^2 = \frac{1}{2}B^2$, vilket betyder att $A = \pm\sqrt{2}$ och $B = \pm\sqrt{2}$ (fyra fall). (Man kan förstås också räkna ut $\int_0^1 f_j(t)^2 dt$ för de olika komponenterna av $f = f_1 + f_2 + f_3$.)

3. (a) Man vet att signalen som definieras av $f(t) = K\cos\alpha t$ då $c - a < t < c + a$, $f(t) = 0$ för andra t, har Fouriertransformen

$$\hat{f}(\omega) = Ke^{-ic(\omega-\alpha)}\frac{\sin a(\omega-\alpha)}{\omega-\alpha} + Ke^{-ic(\omega+\alpha)}\frac{\sin a(\omega+\alpha)}{\omega+\alpha}, \qquad \omega \in \mathbf{R};$$

se Sollervall & Styf sidan 87 eller Kiselmans uppsats *Spektrogram*, sidan 2. Det är inte meningsfullt att beräkna absolutbeloppet av $\hat{f}$, däremot av var och en av de termer som bygger upp $\hat{f}$. I det aktuella fallet blir det fyra termer, $\hat{f} = g_{1,+} + g_{1,-} + g_{2,+} + g_{2,-}$ vilkas absolutbelopp blir

$$|g_{j,\pm}(2\pi\omega)| = |K_j|\frac{|\sin 2\pi a(\omega \mp \alpha_j)|}{2\pi|\omega \mp \alpha_j|} \leqslant \min\left(|K_j|a, \frac{|K_j|}{2\pi|\omega \mp \alpha|}\right), \qquad \omega \in \mathbf{R}, \quad j = 1, 2.$$

(Om vi tar argumentet $2\pi\omega$ i $\hat{f}$ så innebär det att ω är frekvensen mätt i Hz; i $\hat{f}(\omega)$ är ω vinkelfrekvensen mätt i radianer per sekund.) Dessa funktioner har sina toppar vid $\pm\alpha_j$ och höjderna blir $|K_j|a$ (amplituden $|K_j|$ gånger hälften av signalens varaktighet). I det aktuella fallet blir höjderna således (exakt) $0,5$ vid $\pm\alpha_1$ och $0,3$ vid $\pm\alpha_2$

Topparna hos $\hat{f}(2\pi\omega)$ inträffar ungefär vid de fyra frekvenserna $\pm\alpha_1$, $\pm\alpha_2$ Hz. Höjderna blir ungefär $0,5$ vid $\pm\alpha_1$ och $0,3$ vid $\pm\alpha_2$. Att jag skriver *ungefär* beror på att varje topp störs av småvågor från de andra topparna, och om topparna ligger alltför nära varandra blir dessa störningar stora. Vi bör alltså för varje frekvens $\pm\alpha_j$ kolla att störningarna från de andra frekvenserna är små jämfört med den aktuella toppen. Vid frekvensen $\alpha_1 = 850\,\text{Hz}$ har den term som hör till den frekvensen sitt maximum, vilket är exakt $0,5$, medan den term som hör till α_2 där inte har större absolutbelopp än $0,6/2\pi|\alpha_1 - \alpha_2| = 0,6/740\pi \approx 0,00026 \ll 0,5$. Den term som hör till $-\alpha_1$ stör inte heller så mycket vid α_1: dess värde vid α_1 är högst $1/2\pi|\alpha_1 - (-\alpha_1)| = 1/3400\pi \approx 0,00009 \ll 0,5$. På liknande sätt ser man för var och en av de fyra frekvenserna $\pm\alpha_j$ att den term som har sitt maximum där är mycket större än de tre andra termer som inte har maximum där. De toppar som hör till $\pm\alpha_1$ är alltså klart högst, eftersom $0,5 > 0,3$ och störningarna är små.

(b) För [i] är kvoten mellan den andra och första frekvensen tre oktaver (8 gånger); för [a] är den en halv oktav (1,4 gånger); för [u] är den 1,5 oktav (2,8 gånger); för signalen f är kvoten

$\alpha_2/\alpha_1 = 1\,220/850 \approx 1,4$. Av de tre vokalerna är det tydligen [a] som f liknar mest. (Siffrorna är hämtade från Peter B. Denes och Elliot N. Pinson, *The Speech Chain* (1970:118) och gäller för en kvinnlig talare; hos en manlig är $\alpha_1 = 730$, $\alpha_2 = 1090$.)

4. Från *Beta,* F41b, ser man att $\frac{1}{t^2+a^2}$ har transformen $\frac{\pi}{a}e^{-a|\omega|}$. Alltså har $\frac{4}{4+t^2}$ transformen $2\pi e^{-2|\omega|}$. Translation (*Beta,* F7) ger så att $\hat{f}(\omega) = 2\pi e^{-3i\omega-2|\omega|}$. (Man kan också använda F41a, som säger att $e^{-a|t|}$ har transformen $\frac{2a}{\omega^2+a^2}$ och tillämpa Fouriers inversionsformel på den. Transformen av $e^{-a|t|}$ kan dessutom lätt beräknas för hand.)

5. (a) Man finner genom variabelseparation att en lösning är

$$u(x,t) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n e^{-n^2kt}\cos nx + b_n e^{-n^2kt}\sin nx\right),$$

där koefficienterna bestäms av att

$$u(x,0) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) = 22 + 2\sin x + \sin 2x,$$

vilket ger $\frac{1}{2}a_0 = 22°\text{C}$, $b_1 = 2°\text{C}$ och $b_2 = 1°\text{C}$; alla andra blir noll. Således blir temperaturen

$$u(x,t) = 22 + 2e^{-kt}\sin x + e^{-4kt}\sin 2x = 22 + (2 + 2e^{-3kt}\cos x)e^{-kt}\sin x \geqslant 22.$$

Den sista olikheten klarar av uppgift (b). För (c) konstaterar vi att om $t \geqslant 80$ sekunder, så är $kt \geqslant 1$ och

$$u(x,t) \leqslant 22 + 2e^{-1} + e^{-4} \leqslant 22,8.$$

(d) Trots att det inte frågas efter konkavitet hos lösningen i x-led, kan vi konstatera att $x \mapsto u(x,t)$ är konkav då $\cos x \geqslant -\frac{1}{4}e^{3kt}$. Speciellt är den konkav i hela intervallet $[0,\pi]$ då $kt \geqslant \frac{1}{3}\log 4 \approx 0,46$. Begynnelsevärdet är en konkav funktion i intervallet $[0, \arccos(-\frac{1}{4})]$ och konvex i intervallet $[\arccos(-\frac{1}{4}), \pi]$, men konkaviteten vinner snabbt.