Tentan i Fouriermetoder 1998 08 14: lösningar

Christer O. Kiselman

Uppgift 1

Funktionen är udda, så Fourierserien är en sinusserie. Vidare är $T = 2$ och $\Omega = \pi$. Man ser att funktionen är kontinuerlig och har kontinuerlig derivata, medan andraderivatan är diskontinuerlig. Detta brukar betyda att Fourierkoefficenterna avtar som $|n|^{-3}$. Koefficienterna b_n ges av

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin n\pi t\,dt = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin n\pi t\,dt, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Man beräknar den sista integralen medelst partiell integration två gånger och får då svaret: $b_n = (8/\pi^3)n^{-3}$ då n är udda och noll för jämna n. Fourierkoefficienterna avtar alltså som väntat, vilket är en lugnande iakttagelse. Parsevals relation säger i detta fall att

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t)^2 dt = \sum_1^\infty b_n^2.$$

Här beräknar man vänsterledet till 1/15 och högerledet till $(8/\pi^3)^2 \sum_1^\infty (2k-1)^{-6}$, så $\sigma_2 = \pi^6/960$. För att få fram σ_1 tar vi värdet av funktionen i punkten $t = 1/2$. Funktionens värde är $f(1/2) = 1/4$, medan Fourierseriens värde är

$$\frac{8}{\pi^3}\sum_1^\infty \frac{\sin((2k-1)\pi/2)}{(2k-1)^3} = \frac{8}{\pi^3}\sum_1^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^3}.$$

Är nu dessa lika? Ja, ty funktionen är av klass C^1 överallt, speciellt nära punkten 1/2. Alltså blir $\sigma_1 = \pi^3/32$.

Uppgift 2

Den karaktäristiska ekvationen för differentialekvationen är $4z^2 - 4z + a = 0$, som har rötterna $z = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1-a})$. Om $a \leqslant 1$ är rötterna reella och de uppfyller $-1 < z < 1$ precis då $0 < a \leqslant 1$. Om däremot $a > 1$ så är rötterna icke-reella med realdel lika med $\frac{1}{2}$ och man ser att de ligger inne i enhetscirkeln precis när $1 < a < 4$. Om vi kombinerar de två fallen ser vi att svaret blir att ekvationen är stabil omm $0 < a < 4$.

Vi tar nu z-transformen med de angivna värdena på $y(0)$, $y(1)$ och $u(n)$ och får

$$4z^2Y - 4z^2y(0) - 4zy(1) - 4zY + 4zy(0) + Y = (4z^2 - 4z + 1)Y - 8z^2 + 8z = \frac{2z}{z - \frac{1}{2}},$$

varav

$$Y(z) = \frac{8z^3 - 12z^2 + 6z}{(4z^2 - 4z + 1)(z - \frac{1}{2})} = \frac{2z^3 - 3z^2 + \frac{3}{2}z}{(z - \frac{1}{2})^3} = 2 + \frac{A}{(z - \frac{1}{2})^3} + \frac{B}{(z - \frac{1}{2})^2} + \frac{C}{z - \frac{1}{2}}.$$

Man bestämmer så A, B och C: $A = \frac{1}{4}$, $B = C = 0$ och får alltså att

$$Y(z) = 2 + \frac{1}{4}\frac{1}{(z - \frac{1}{2})^3}.$$

Detta ger $y(0) = 2$, $y(n) = \frac{1}{8}(n-1)(n-2)2^{-n}$, $n \geqslant 1$; i själva verket gäller formeln också för $n = 0$.

Här har vi använt det faktum att funktionen $(z-a)^{-m}$ är transformen av följden

$$y(n) = \begin{cases} 0, & n = 0, 1, ..., m-1 \\ \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{(m-1)!}\, a^{n-m}, & n \geqslant m \end{cases}.$$

(Vi sätter här $0^0 = 1$. Om $a \neq 0$ gäller den andra formeln för alla $n \geqslant 1$.) Speciellt är $(z-a)^{-3}$ transformen av

$$y(n) = \begin{cases} 0, & n = 0, 1 \\ \frac{1}{2}(n-1)(n-2)a^{n-3}, & n \geqslant 2 \end{cases}.$$

Uppgift 3(a)

Den karakteristiska ekvationen är $z^2 + 4z + 3 = 0$ med rötterna -1 och -3, således med negativ realdel: stabilitet. Vi tar Laplacetransformen av båda leden i ekvationen: $s^2Y(s) - y'(0) - sy(0) + 4sY(s) - 4y(0) + 3Y(s) = U(s)$, där $Y = \mathcal{L}(y)$ och $U = \mathcal{L}(u)$. Detta ger

$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{s^2+1}{(s+1)^2(s+3)} = \frac{A}{(s+1)^2} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+3}.$$

Man bestämmer A, B och C: $A = 1$, $B = 0$, $C = 1$, således $\mathcal{L}(y)(s) = (s+1)^{-2} + (s+3)^{-1}$. Lösningen blir därför $y(t) = te^{-t} + e^{-3t}$. Den ser ju väldigt stabil ut.

Uppgift 3(b)

Vi har en faltningsekvation $\cos * f = f' + e^{-t}$. Laplacetransformering ger $\mathcal{L}(\cos)\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(f') + (s+1)^{-1}$, varav

$$\mathcal{L}(f) = \frac{s^2+1}{s^2(s+1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{2}{s+1}.$$

Man ser att $f(t) = t - 1 + 2e^{-t}$.

Uppgift 4

Den homogena ekvationen löses av

$$v(x,t) = \sum_{1}^{\infty} b_n e^{-n^2\pi^2 t} \sin n\pi x,$$

och vi kan gissa att en lösning till den icke-homogena ekvationen är $w(x,t) = -\sin \pi x - \frac{1}{9}\sin 3\pi x$, ty vi får $w_{xx} - w_t = w_{xx} = \pi^2 \sin x + \pi^2 \sin 3x = 4\pi^2 \sin x \cos^2 x$. Men denna lösning har ju inte rätt randvärden för $t = 0$. Vi får alltså korrigera den med en lösning till den homogena som innehåller samma sinussvängningar. Det innebär att vi skall välja $b_1 = 1$ och $b_3 = \frac{1}{9}$. Lösningen till uppgiften blir alltså $u = v + w$ med det angivna valen av b_1 och b_3, således

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t) = \left(e^{-\pi^2 t} - 1\right) \sin \pi x + \frac{1}{9}\left(e^{-9\pi^2 t} - 1\right) \sin 3\pi x.$$

Uppgift 5(a)

Man vet att Fouriertransformen av $f(t) = (1+t^2)^{-1}$ är $\hat{f}(\omega) = \pi e^{-|\omega|}$. Alltså blir transformen av $f * f$ lika med kvadraten på $\hat{f}$, dvs. $\pi^2 e^{-2|\omega|}$. Denna funktion liknar ju $\hat{f}$: den uppstår från den sistnämnda genom töjning av den oberoende och den beroende variabeln. Därför uppstår $f * f$ från f genom töjning av den oberoende och beroende variabeln, så vi måste ha $(f * f)(t) = Af(at)$ för några konstanter a och A. Man ser att $(f * f)(t) = 2\pi(4+t^2)^{-1}$ genom räkning eller efter en titt i *Beta*.

Uppgift 5(b)

Den sökta integralen är lika med hälften av

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{\cos t}{1+t^2} dt = \operatorname{Re} \int_{\mathbf{R}} \frac{e^{-it}}{1+t^2} dt = \operatorname{Re} \hat{f}(1),$$

där f är funktionen i uppgift 5(a). Eftersom vi vet att $\hat{f}(\omega) = \pi e^{-|\omega|}$, så blir svaret $\frac{1}{2}\hat{f}(-1) = \frac{\pi}{2e}$.