

*Matematiktermer för skolan*



# Matematiktermer för skolan

Christer Kiselman och Lars Mouwitz

under medverkan av

Tom Britton, Bo Göran Johansson, Staffan Rodhe,  
Anders Tengstrand och Ebbe Vilborg

Illustrationer av Erik Melin

Nationellt centrum för matematikutbildning, NCM  
Göteborgs universitet

På bokens pärmar åskådliggörs Pythagoras' sats. På framsidan har fyra exemplar av en rätvinklig triangel med kateterna  $a$  och  $b$  samt hypotenusan  $c$  placerats i en större kvadrat som har sidlängden  $a + b$ . Den resterande inskrivna kvadraten har då sidan  $c$ . Flyttas de fyra triangelarna om enligt figuren på bokens baksida, fås i stället två mindre resterande kvadrater med sidorna  $a$  respektive  $b$ , vilkas sammanlagda area måste vara lika med den tidigare inskrivna kvadratens area. Alltså  $c^2 = a^2 + b^2$ : hypotenusan i kvadrat är lika med summan av kateternas kvadrater. Se vidare Pythagoras' sats på sidan 202.

Nationellt Centrum för Matematikutbildning, NCM  
Göteborgs universitet  
Box 160  
405 30 Göteborg

*Beställningar:*  
[ncm.gu.se/bestallning](http://ncm.gu.se/bestallning)  
[bestallning@ncm.gu.se](mailto:bestallning@ncm.gu.se)  
*Fax:* 031 786 22 00

© 2008 Christer Kiselman och Lars Mouwitz  
ISBN 978-91-85143-12-2  
Upplaga 1:2

*Layout:* Christer Kiselman  
*Omslag:* Anders Wallby  
*Tryck:* Livréna AB, Göteborg, 2008  
Tryckeriet är miljöcertifierat enligt ISO 14 001

# Innehållsförteckning

<b>Förord</b> .....	<b>7</b>
<b>Läsanvisning</b> .....	<b>8</b>
<b>Det grekiska alfabetet</b> .....	<b>9</b>
<b>1. Allmänna termer</b> .....	<b>11</b>
<b>2. De fyra räknesätten</b> .....	<b>22</b>
2.1. Allmänt .....	22
2.2. Addition .....	24
2.3. Subtraktion .....	26
2.4. Multiplikation .....	27
2.5. Division .....	30
<b>3. Aritmetik</b> .....	<b>36</b>
3.1. Allmänt .....	36
3.2. Tal och talsystem .....	38
3.3. Ordning, likhet och olikhet .....	57
3.4. Procent och promille .....	62
3.5. Potenser och logaritmer .....	63
<b>4. Storheter och enheter</b> .....	<b>69</b>
4.1. Storheter .....	69
4.2. Enheter .....	75
4.3. Mätning .....	86
<b>5. Algebra</b> .....	<b>87</b>
5.1. Allmänt .....	87
5.2. Algebraiska operationer .....	92
5.3. Ekvationer .....	93
5.4. Mängdlära .....	100
<b>6. Kombinatorik, följder och serier</b> .....	<b>106</b>
6.1. Kombinatorik .....	106
6.2. Följder och serier .....	108
6.3. Gränsvärden .....	113
<b>7. Matematisk argumentation</b> .....	<b>116</b>
7.1. Logik .....	116
7.2. Matematiska modeller .....	122
7.3. Matematiska resultat .....	123
7.4. Bevis .....	128
7.5. Problemlösning .....	132
<b>8. Avbildningar och funktioner</b> .....	<b>135</b>
8.1. Allmänt om avbildningar .....	135
8.2. Funktioner och deras värden .....	140
8.3. Kurvor .....	154
8.4. Differentialkalkyl .....	162
8.5. Integralkalkyl .....	169
<b>9. Geometri</b> .....	<b>174</b>
9.1. Allmänt .....	174
9.2. Vinklar .....	192
9.3. Trianglar .....	198

9.4. Andra månghörningar .....	206
9.5. Andragradskurvor .....	213
9.6. Polyedrar .....	221
9.7. Annan rymdgeometri .....	227
9.8. Koordinatsystem .....	235
9.9. Avbildningar och symmetrier .....	240
<b>10. Trigonometri .....</b>	<b>250</b>
<b>11. Vektorer och matriser .....</b>	<b>255</b>
11.1. Vektorer .....	255
11.2. Matriser .....	260
<b>12. Sannolikhetslära .....</b>	<b>264</b>
12.1. Slumpförsök .....	264
12.2. Sannolikhet .....	265
<b>13. Statistik .....</b>	<b>272</b>
13.1. Diagram och tabeller .....	272
13.2. Statistiska mått .....	275
13.3. Statistiska undersökningar .....	280
<b>14. Språkens rikedomar och terminologins problem</b> av Christer Kiselman .....	<b>287</b>
<b>15. Tvånget att precisera och friheten att generalisera</b> av Anders Tengstrand .....	<b>292</b>
<b>16. Alfabetisk termlista .....</b>	<b>297</b>
<b>17. Några beteckningar .....</b>	<b>311</b>

# Förord

Skolöverstyrelsen gav år 1979 ut en bok med titeln *Matematikterminologi i skolan* innehållande rekommendationer rörande termer, definitioner och skrivsätt. Den var en ny version av en skrift med samma titel som publicerades år 1966.

Dessa verk går sedan länge inte att köpa, men de exemplar som finns på bibliotek runt om i landet har hela tiden använts i bl. a. lärarutbildningen. Detta visar att det finns ett behov av en auktoritativ källa för väl valda termer i skolans matematikutbildning. Nationellt centrum för matematikutbildning vid Göteborgs universitet (NCM) startade därför ett projekt som initialt syftade till en enkel revision av *Matematikterminologi i skolan*. Men ambitionsnivån höjdes snart, och det beslöts att ge presentationen av termer och definitioner högsta terminologiska kvalitet. AB Terminologicentrum (TNC) engagerades därför i projektet. Samtidigt måste givetvis de pedagogiska och vetenskapliga aspekterna beaktas. Detta ger ibland upphov till icke självklara avvägningar.

Gunnel Johansson och Helena Palm på TNC har gjort en ovärderlig insats genom att excerpera en stor mängd läroböcker och ordböcker, och sedan, lika ovärderligt, genom att dra upp riktlinjer för hur termposterna skall skrivas på ett terminologiskt korrekt sätt.

Boken redovisar aktuella betydelser hos termerna och ger därutöver vissa inblickar i begreppens historia såväl som i ordens historia. De matematiska begreppen har ofta utvecklats under många år. Kommentarer till deras historia har utarbetats av universitetslektorerna Bo Göran Johansson, Visby, och Staffan Rodhe, Uppsala.

Ordens etymologiska ursprung kan ge fascinerande inblickar i hur man en gång har tänkt. Docent Ebbe Vilborg, Göteborg, visar oss termernas ursprung i många av termposterna.

Definitionerna i kapitlen 12, *Sannolikhetslära*, och 13, *Statistik*, har utarbetats av professor Tom Britton, Stockholms universitet.

När det gäller de matematiska begreppens historia har även universitetslektor Gunnar Berg, Uppsala, gjort ovärderliga insatser. Universitetslektor Anders Tengstrand, Växjö, har genom sina kommentarer till hela boken givit oss värdefull hjälp.

Kapitel 4, *Storheter och enheter*, har granskats av Anders J. Thor, som vi tackar varmt för denna insats.

Filosofie doktor Erik Melin har på ett förtjänstfullt sätt skapat bilderna till boken.

Vi vill här varmt tacka alla de nämnda personerna.

Genom ett omfattande remissförfarande har vårt arbete fått en god förankring bland matematiklärare, lärarutbildare, terminologer och forskare i matematik. Vi hoppas att resultatet kommer att bli till nytta för matematikundervisningen såväl i ungdomsskolan som för vuxenskola och lärarutbildning. Sist, men inte minst, vill vi tacka Myndigheten för skolutveckling (MSU), som givit oss stöd och förtroende att ta fram denna bok.

## Läsanvisning

Varje termpost inleds med termen i fråga, följt av eventuella **synonymer**. I några få fall anges böjningsformer eller uttal. Därefter följer **definitionen**. Denna är alltid skriven som en terminologisk definition, vilket bl. a. innebär att den, åtminstone idealt, skall kunna ersätta termen i dess sammanhang. Det finns en skillnad mellan denna typ av definition och den som används i läroböcker. Den terminologiska definitionen måste vara koncis och man tvingas tänka efter vad orden verkligen betyder. I en lärobok kan man först mer eller mindre utförligt beskriva ett sammanhang och sedan i flera steg närma sig begreppet. Under arbetets gång har vi övertygats om att den strikt terminologiska definitionen är ett utmärkt pedagogiskt och vetenskapligt hjälpmedel, och att den i samspel med kommentaren ger den bästa grunden för förståelsen av nya och gamla begrepp.

Efter definitionen följer ofta en **kommentar**. Dess syfte är att sätta in begreppet i ett sammanhang, och där kan förekomma en mer läroboksmässig förklaring.

Ofta kommer något eller några **exempel** att belysa begreppet och termens användning.

Därefter följer i många fall begreppets och ordets historia, under rubrikerna **historia** respektive **etymologi**.

Slutligen ges för många termposter under rubriken **jämför** hänvisningar till ord som kan återspegla besläktade begrepp eller deras motsatser.

Vissa termer har mer än en betydelse, och vi använder då index för att skilja dem åt. Exempel är  $bas_1$ ,  $bas_2$ ,  $bas_3$ ,  $bas_4$  och  $kropp_1$ ,  $kropp_2$ . Se vidare avsnittet om polysemi, sidan 290 i kapitel 14, *Språkens rikedomar och terminologins problem*.

Boken avslutas med två appendix. Det första kåserar kring språkens rikedomar och terminologins problem, och ger en inblick i hur vi har arbetat. Det andra rör de matematiska begreppen och behoven av att precisera och generalisera dem.

I vårt arbete har vi stött på många intressanta terminologiska, pedagogiska och vetenskapliga frågeställningar. Mötet mellan dessa tre traditioner har varit mycket spännande. Våra avgöranden har ibland varit svåra och oftast inte självklara.

*Christer Kiselman*

*Lars Mowitz*



## Det klassiska grekiska alfabetet

		<i>Namn</i>	<i>Translitterering</i>
A	$\alpha$	alfa	<i>a</i>
B	$\beta$	beta	<i>b</i>
Γ	$\gamma$	gamma	<i>g</i>
Δ	$\delta$	delta	<i>d</i>
E	$\varepsilon, \epsilon$	epsilon	<i>e</i>
Z	$\zeta$	zeta	<i>z</i>
H	$\eta$	eta	$\bar{e}$
Θ	$\theta, \vartheta$	theta	<i>th</i>
I	$\iota$	jota	<i>i</i>
K	$\kappa, \varkappa$	kappa	<i>k</i>
Λ	$\lambda$	lambda	<i>l</i>
M	$\mu$	my	<i>m</i>
N	$\nu$	ny	<i>n</i>
Ξ	$\xi$	xi	<i>x</i>
O	$o$	omikron	<i>o</i>
Π	$\pi$	pi	<i>p</i>
P	$\rho, \varrho$	rho	<i>r</i>
Σ	$\sigma, \varsigma$	sigma	<i>s</i>
T	$\tau$	tau	<i>t</i>
Υ	$\upsilon$	ypsilon	<i>y</i>
Φ	$\varphi, \phi$	phi	<i>ph</i>
X	$\chi$	khi	<i>kh</i>
Ψ	$\psi$	psi	<i>ps</i>
Ω	$\omega$	omega	$\bar{o}$

Dessa translittereringar används i de etymologiska förklaringarna, däremot inte när det gäller svenska ord av grekiskt ursprung eller svenska namn på grekiska matematiker. Ett undantag är diftongen  $\varepsilon\nu$ , som translittereras *eu*. Vidare skrivs spiritus asper (´) som *h*, medan spiritus lenis (˘) inte markeras.

De grekiska bokstäverna  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  används i matematiken ofta som motsvarigheter till *a*, *b*, *c*, och  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  används som motsvarigheter till *x*, *y*, *z*.

Andra alfabeten än de latinska och grekiska förekommer mycket sparsamt. Den första bokstaven i det hebreiska alfabetet, א, som uttalas alef, används för att beteckna oändliga kardinaltal.



# 1. Allmänna termer

## algebra<sub>1</sub>

definition	gren av matematiken där man studerar grupper, ringar, kroppar <sub>2</sub> och liknande strukturer
kommentar	I skolan möter man först algebran i form av bokstavsräkning, d.v.s. man räknar med variabler i stället för som tidigare med tal. De räkneregler som gäller för tal gäller också för variablerna.
historia	Den symbolism som vi har i dag inom algebran utformades i Europa under 1500- och 1600-talen. På 1800-talet fick algebran en logisk uppbyggnad, ur vilken den vanliga algebrans lagar kan härledas från grundläggande axiom.
etymologi	Ordet <i>algebra</i> kommer från arabiskans <i>al-jabr</i> , som betyder 'återställande' eller 'förenande (med tvång)' och syftar på operationen att flytta en term med minustecken från det ena ledet till det andra och ändra till plustecken. Termen förekom i ett berömt arbete på arabiska som behandlade lösning av ekvationer, senare känt som <i>al-kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa-l-muqābala</i> 'Den kortfattade boken om räkning med återställande och jämförande'. Det skrevs av Muḥammad Ibn Mūsā al-Khwārizmī, som var verksam i Bagdad i början av 800-talet. <i>Al-muqābala</i> betyder alltså 'jämförande' eller 'balansering' och syftar på att man tar bort två likadana termer från båda leden. (De två operationerna är verkligen olika, eftersom inga storheter på den tiden var negativa.)

## antal

synonym	<b>kardinaltal</b>
definition	(om en mängd) storlek hos mängden angiven genom att man jämför den med andra mängder medelst bijektioner
kommentar	De två termerna är synonyma, men <i>antal</i> används mest för ändliga mängder, <i>kardinaltal</i> för oändliga mängder. Om mängden är ändlig, så är antalet ett naturligt tal, alltså lika med något av talen 0, 1, 2, ... Den tomma mängden har inget element, en <i>singletonmängd</i> ett element. Antalet element i en mängd kan också vara oändligt. Till exempel är antalet naturliga tal lika med kardinaltalet $\aleph_0$ (alef-noll). Två mängder $A$ och $B$ har samma kardinaltal om och endast om det finns en bijektion av $A$ på $B$ . Kardinaltalen, liksom de naturliga talen, uppstår på detta sätt som ekvivalensklasser. Det finns oändligt många oändliga kardinaltal. Kardinaltalet hos mängden av alla reella tal är större än kardinaltalet hos mängden av alla rationella tal.
exempel	De fyra första kardinaltalen 0, 1, 2, 3. De är också naturliga tal. Det minsta oändliga kardinaltalet. Det betecknas $\aleph_0$ (alef-noll).
etymologi	<i>Kardinal-</i> kommer från latinets <i>cardinalis</i> 'viktigast, väsentligast', adjektiv avlett av <i>cardo</i> 'gångjärn, det kring vilket allt rör sig'.

jämför *ekvipotenta* s. 101, *ordningstal* s. 60

## aritmetik

definition gren av matematiken där man studerar addition, subtraktion, multiplikation, division, potenser och rotutdragnin av tal.

historia Aritmetiken har sina rötter i de antika civilisationerna. I Europa var senare aritmetik en av de sju fria konsterna i den medeltida undervisningen; den ingick i den första gruppen, *quadrivium*, tillsammans med geometri, musik och astronomi. De tre övriga ingick i den andra gruppen, *trivium*, som bestod av grammatik, retorik och dialektik.

etymologi *Aritmetik* kommer från grekiskans *arithmētiké* 'räknekonst', avlett av *arithmós* 'tal, antal'.

jämför *algebra*<sub>1</sub> s. 11

## avbildning

synonym **transformation, operator, operation**

definition relation mellan två mängder sådan att varje element i den första mängden förekommer som första element i de par som relationen innehåller en och endast en gång

kommentar Den första mängden i definitionen kallas avbildningens *definitions-mängd*, den andra dess *målmängd*. Ett element som förekommer som andra komponent i ett par kallas *bild* och mängden av alla bilder kallas avbildningens *bildmängd*, *värde*mängd eller *värdeförråd*. Den är en delmängd av målmängden.

Om  $X$  och  $Y$  är två mängder och  $f$  en avbildning med  $X$  som definitionsmängd och  $Y$  som målmängd, så skriver man

$$f: X \rightarrow Y.$$

(Att en avbildning ofta betecknas med bokstaven  $f$  beror på att man tänker på en funktion.) Vidare betecknar  $f(x)$  det unika element  $y$  sådant att  $(x, y) \in f$ , alltså  $y = f(x)$  om och endast om  $(x, y) \in f$ : elementet  $f(x) \in Y$  är *bilden av  $x$  under avbildningen  $f$* . Man skriver också avbildningen som  $x \mapsto f(x)$  eller utförligare

$$X \ni x \mapsto f(x) \in Y.$$

Tidigare sade man att bilden  $f(x)$  uppstod från elementet  $x$  genom tillämpning av någon regel. Så kan det naturligtvis vara i enkla fall, men eftersom det inte går att definiera begreppet regel på ett tillfredsställande sätt, har man nu övergivit detta talesätt. Alla mängder av par  $(x, y)$  med den angivna egenskapen accepteras.

Ibland talar man om "flervärda avbildningar", ett självmotsägande uttryck. Det skulle innebära att  $f(x)$  betecknade flera element i  $Y$ . Det är i sådana fall bättre att låta avbildningen få sina värden i familjen av alla delmängder av  $Y$ .

Vad gäller synonymerna kan sägas att *operation* används till exempel för de aritmetiska operationerna, som verkar på par av tal,

likaså om derivering och integrering. *Transformation* och *operator* användes mest när elementen i definitions mängden själva är funktioner.

**exempel** Om vi tänker oss att varje land har en och endast en huvudstad, så har vi en avbildning  $H$  från mängden av länder till mängden av städer, med  $H(\text{Sverige}) = \text{Stockholm}$  och  $H(\text{Australien}) = \text{Canberra}$ .

Additionen av hela tal är en avbildning  $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ , given av  $(x, y) \mapsto x + y$ .

En spegling i en linje i planet är ett exempel på en avbildning inom geometrin. Speglingen i linjen med ekvationen  $x = y$  ges av  $\mathbf{R}^2 \ni (x, y) \mapsto (y, x) \in \mathbf{R}^2$ .

Ekvationen  $g = f'$  definierar en avbildning, oftast kallad operation, nämligen derivering:  $g$  är derivatan av  $f$ . Man skriver också  $f' = Df = df/dx$ ; operatorn  $D = d/dx$  är derivationsoperatorn.

Fouriertransformationen avbildar funktioner på funktioner:  $g = \mathcal{F}f$  är *Fouriertransformen* av  $f$  och  $\mathcal{F}$  är *Fouriertransformationen*.

**jämför** bild s. 13, bildmängd s. 13, definitions mängd s. 13, funktion s. 14, målmängd s. 17, relation s. 19

## bild

**synonym** **transform**  
**definition** element på vilken ett annat element avbildas av en viss avbildning  
**kommentar** Termen *transform* användes när avbildningen kallas *transformation*.  
**jämför** *funktionsvärde* s. 144, *Fourieranalys* s. 251

## bildmängd

**synonym** **värde mängd, värdeförråd**  
**definition** mängd som består av alla bilder som en viss avbildning har  
**kommentar** En avbildning är given av två mängder  $X$  (definitions mängden) och  $Y$  (målmängden) och en tillordning av en bild eller ett värde  $f(x)$  i  $Y$  till varje  $x \in X$ . Mängden av alla bilder  $f(x)$  är bildmängden. Denna är en delmängd av målmängden  $Y$ .  
**jämför** *avbildning* s. 12, *definitions mängd* s. 13, *målmängd* s. 17, *bild* s. 13

## definitions mängd

**synonym** **definitionsområde**  
**definition** (till en avbildning) mängden av alla element för vilka avbildningen är definierad  
**jämför** *argument*<sub>1</sub> s. 135, *bildmängd* s. 13, *värde mängd* s. 13

## dimension<sub>1</sub>

**definition** antal värden som behövs för att bestämma läget för en punkt inom ett geometriskt objekt  
**kommentar** Med denna definition kan dimensionen vara 0, 1, 2, 3, ... Mer generellt kan en mängd i planet ha en dimension som inte är ett heltal; till exempel har Helge von Kochs snöstjärna dimensionen  $\log 4 / \log 3$ .

exempel	För att bestämma läget hos en punkt i rummet behöver man ange tre värden (koordinater).
etymologi	<i>Dimension</i> kommer från latinets <i>dimensio</i> 'uppmätning', substantiv till verbet <i>dimetiri</i> 'att uppmäta, att utstaka', där prefixet <i>di(s)-</i> 'isär-' understryker avståndet mellan ändpunkterna.
jämför	<i>rät linje</i> s. 186, <i>kurva</i> s. 15, <i>plan</i> s. 185, <i>yta</i> s. 21, <i>kropp</i> <sub>1</sub> s. 15, <i>fraktal</i> s. 177

## formel

definition	uttryck som beskriver samband med hjälp av symboler
exempel	Formeln för beräkning av en cirkelskivas area är $A = \pi r^2$ , där $r$ är cirkelns radie.
etymologi	<i>Formel</i> kommer från latinets <i>formula</i> 'regel, norm'.

## funktion

definition	avbildning vars värden är tal
kommentar	Orden <i>funktion</i> och <i>avbildning</i> har mycket närliggande betydelser. Det första användes mest när värdena är tal, det andra i geometriska och algebraiska sammanhang. Språkbruket är inte helt fixerat, men den vanligaste betydelsen av termen är den angivna, alltså att en funktions värden är till exempel hela, reella eller komplexa tal.
exempel	Ekvationen $y = x^2$ definierar en funktion från de reella talen $\mathbf{R}$ till $\mathbf{R}$ . Den inversa relationen är inte en funktion, eftersom $y$ inte kan vara negativt och eftersom det finns två $x$ som uppfyller ekvationen om $y$ är positivt – en avbildning får ju bara ha ett värde för varje argument. Däremot kan man definiera en invers med värden i familjen av alla delmängder av $\mathbf{R}$ , betecknad $\mathcal{P}(\mathbf{R})$ , d.v.s. en avbildning $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{R})$ , där $g(y)$ består av mängden av alla tal $x$ sådana att $x^2 = y$ . Alltså är t. ex. $g(-1) = \emptyset$ , $g(0) = \{0\}$ och $g(9) = \{-3, 3\}$ och mera allmänt $g(y) = \{x \in \mathbf{R}; x^2 = y\} = \{\pm\sqrt{y}\}$ om $y \geq 0$ . Om man i stället arbetar med komplexa tal får man en invers $h: \mathbf{C} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{C})$ med t. ex. $h(-1) = \{i, -i\}$ . Ekvationen $y = x^3$ definierar däremot $y \in \mathbf{R}$ som funktion av $x \in \mathbf{R}$ och omvänt $x$ som funktion av $y$ ; man kan skriva $x = \sqrt[3]{y}$ om man inskränker sig till reella rötter.
historia	Termen <i>funktion</i> infördes i slutet av 1600-talet av Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716). Men det var först ett halvsekel senare som vi genom Leonhard Euler (1707–1783) fick en samlad beskrivning av de elementära funktioner som ingår i dagens skolkurser. Under 1700-talet uppfattades en funktion som ett uttryck, sammansatt av en eller flera variabler och av tal och konstanter. Gradvis förändrades denna uppfattning under 1800-talet och 1900-talet mot den nutida uppfattningen, som brukar formuleras i mängdlärans språk.
etymologi	Ordet <i>funktion</i> kommer från latinets <i>functio</i> 'utförande, förrättning'; <i>operation</i> från latinets <i>operatio</i> 'arbete, verk'.

jämför *avbildning* s. 12, *bild* s. 13, *bildmängd* s. 13, *definitions­mängd* s. 13, *målmängd* s. 17, *relation* s. 19

## geometri

definition gren av matematiken som behandlar avstånd, vinklar, ytor, kroppar<sub>1</sub> och former

etymologi Det grekiska ordet *geōmetría* 'geometri' är sammansatt av *gē* 'jord' och *metreín* 'att mäta'.

## geometriskt objekt

definition punktmängd i noll, en eller flera dimensioner

## konstant<sub>1</sub> (adjektiv)

definition som i ett visst sammanhang inte ändras

## konstant<sub>2</sub> (substantiv)

definition storhet med ett i ett visst sammanhang fixt värde

kommentar Konstanter kan betecknas med siffror eller bokstäver (ofta  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ).

etymologi *Konstant* kommer från latinets *constans* 'fast stående, beständig'.

jämför *variabel* s. 21, *parameter* s. 18

## kropp<sub>1</sub>

definition (i geometrin) tredimensionellt geometriskt objekt

kommentar En kropp kan vara begränsad eller obegränsad.

jämför *kub<sub>1</sub>* s. 222, *parallelepiped* s. 222

## kurva

synonym **linje**

definition endimensionellt geometriskt objekt

kommentar En kurva kan vara rak (rät) eller böjd (krökt) samt obegränsad åt båda hållen eller begränsad åt ett håll eller åt båda. Den kan ligga i planet eller i rymden. I det första fallet kallas den **plan kurva**.

En kurva i planet kan ges som mängden av nollställen till en funktion; till exempel är nollställena till polynomet  $x^2 + y^2 - 1$  en cirkel. Den kan också ges på **parameterform**, vilket innebär att man anger  $x$  och  $y$  som funktioner av en reell variabel  $t$ :  $x = f(t)$ ,  $y = g(t)$ ; till exempel är  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $0 \leq t < 2\pi$ , enhetscirkelns ekvation på parameterform. Däremot kan en cirkel inte beskrivas som grafen av en funktion av en variabel.

I allmänspråket uppfattas en kurva som böjd och en linje som rak.

Termen *kurva* används ibland för vissa geometriska objekt med dimension<sub>1</sub> större än 1, t. ex. snöflingekurvan.

historia I Euklides' verk *Stoikheía* (i latinsk översättning *Elementa*) 'Grundbegreppen' lyder definition 2 i bok I: "En linje (*grammê*) är längd utan bredd." Den följs av definition 3: "En linjes ändar är punkter." (Hos Euklides är troligen alla räta linjer sträckor, och har därför två ändpunkter.)

I antikens matematik studerades endast ett fåtal kurvor, som räta linjer, cirklar, parabler, ellipser och hyperbler. Dessutom studerades några s. k. mekaniska kurvor, till exempel quadratrixen. Under 1600-talet, då koordinatsystem kom i bruk, konstruerade man ett stort antal nya kurvor utgående från algebraiska ekvationer.

etymologi *Kurva* kommer av det latinska adjektivet *curvus* 'krökt, krokig, böjd'. Ordet *linje* kommer av det latinska ordet *linea*, som i sin tur är hämtat från namnet på växten *linum* 'lin'. Jämför svenska *lina*, av *lin*.

## likhet

definition logisk relation som innebär att två objekt är identiska

jämför *ekvation* s. 94, *olikhet* s. 60

## likhetstecken

definition tecknet =

kommentar Likhetstecknet används för att ange att två uttryck betecknar samma sak, eventuellt efter en uträkning. Det utläses "är lika med" eller bara "är". (Det kan vara missledande att säga "fem plus sju blir tolv" eftersom verbet *blir* antyder en förändring, alltså att  $5 + 7$  skulle vara något för att sedan bli något annat.)

Ungefärlig likhet brukar anges med något av tecknen  $\approx$  eller  $\doteq$ .

exempel  $7 + 3 - 2 = 8$ ;  $1/13 \approx 0,0769$ .

historia Likhetstecknet infördes år 1557 av Robert Recorde (1510–1558) i *The Whetstone of Witte*: "And to auoide the tedious repetition of these woordes: is equalle to: I will sette as I doe often in worcke use, a paire of paraleles, or Gemowe lines of one lengthe, thus: ==, bicause noe .2. thynges, can be moare equalle."

jämför *olikhetstecken* s. 60

## matematik

definition abstrakt och generell vetenskap för problemlösning, metodutveckling och teoriuppbbyggnad som hämtar sina problem från naturen, tekniken eller människans eget tänkande

kommentar Definitionen kan inte helt bestämma vad matematik är.

Speciellt handlar matematiken om tal och rum och de många generaliseringar av dessa begrepp som skapats av det mänskliga intellektet.

Reuben Hersh argumenterar för att se matematiken som ett socialt, kulturellt och historiskt fenomen. "It's part of culture, it's part of history. It's like law, like religion, like money, like all those other



things which are very real, but only as part of collective human consciousness. That's what math is.”

Matematiken är en del av den mänskliga kulturen och har i den rollen jämförts med musiken. Liksom musiken har den kommit till uttryck på olika sätt i olika delar av världen. Men nu genomgår den en globalisering.

Matematiken kan användas för att förstå, förutsäga och styra verkligheten, men endast när vissa förutsättningar är uppfyllda. Att avgöra huruvida dessa förutsättningar är uppfyllda är ett problem som ligger utanför matematiken som vetenskap. En matematisk modell kan vara mer eller mindre framgångsrik beroende på hur väl dess förutsättningar är uppfyllda och beroende på hur enkel den är att förstå och bearbeta.

**etymologi** Ordet *matematik* har sitt ursprung i det grekiska adjektivet *mathēmatikós* 'benägen att lära', från *máthēma* 'det som läres' och verbet *manthánein* 'att lära'. Den indoeuropeiska roten som givit upphov till detta, \**mendh-* 'att ägna uppmärksamhet åt, att vara alert, att vara livlig' har även givit upphov till det svenska ordet *munter*.

## matematisk analys

**definition** område inom matematiken som handlar om derivator och integraler

**historia** Differential- och integralkalkylen uppfanns av Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646—1716). Ungefär samtidigt och oberoende av honom utvecklade Isaac Newton (1642—1727) en likvärdig teori med fluxioner och fluenter.

**etymologi** Ordet *analys* kommer från grekiskans *análysis* 'upplösning, förklaring, lösning av en gåta', sammansatt av prefixet *ana-* 'upp-' och *lýsis* 'lösande', av verbet *lýein* 'att lösa'.

## målmängd

**definition** mängd som är given av en viss avbildning och som dennas bilder tillhör

**kommentar** En avbildning är given av två mängder  $X$  (definitionsområdet) och  $Y$  (målmängden) och är sådan att den till varje  $x \in X$  tillordnar ett värde i  $Y$ . Bildmängden är en delmängd av målmängden.

**jämför** *definitionsområde* s. 13, *bildmängd* s. 13, *surjektion* s. 140

## mängd

**synonym** **klass, familj**

**definition** samling av objekt

**kommentar** Objekten kan vara konkreta eller abstrakta. De säges vara mängdens *element*. Två mängder är lika om och endast om de har samma element. Således gäller  $\{1, 2\} = \{2, 1\} = \{2, 1, 2\}$ .

Termen *klass* används företrädesvis för mängder där elementen är mängder; termen *familj* för mängder vilkas element är mängder eller klasser.

En mängd kan anges på olika sätt. Om den har få element, kan man helt enkelt räkna upp dem inom mängdklammer. Man säger att man har angett mängden i *listform*. Ej utskrivna element kan markeras med tre punkter, om det av sammanhanget framgår vilka element som inte skrivits ut. Tre punkter längst till höger markerar att det är en oändlig mängd.

Den mängd som består av alla element  $x$  i en mängd  $A$  som uppfyller ett villkor  $P(x)$  kan skrivas  $\{x \in A; P(x)\}$ .

exempel Den tomma listan  $\{ \}$  definierar den tomma mängden  $\emptyset$ . En *singletonmängd* är en mängd med ett enda element och kan skrivas  $\{a\}$ .

Mängden av alla heltal från och med 0 till och med 100 kan skrivas  $\{x \in \mathbf{N}; x \leq 100\} = \{x \in \mathbf{Z}; 0 \leq x \leq 100\}$ .

Vid kast med tärning är mängden av möjliga utfall  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

Klassen av alla mängder av heltal med tre element har som element bl. a. mängderna  $\{0, 1, 2\}$ ,  $\{0, 1, 4\}$ ,  $\{7, 4, 11\}$ . Den är en mängd, men det kan vara bra att kalla den för en klass för att antyda att den är en mängd av annan karaktär: dess element inte är tal utan mängder. En familj kan vara en mängd där elementen är avbildningar eller klasser av avbildningar.

jämför *element* s. 101, *ordnat par* s. 112

## numerisk analys

definition gren av matematiken som behandlar metoder för beräkning av talvärden och approximationer av dessa

## parameter

definition variabel som är konstant under en viss process men som ändå kan ändras

exempel I differentialekvationen  $u'(t) = au(t)$  är  $u$  en funktion av en variabel  $t$  (tiden) och  $a$  en konstant. Men man kan studera ekvationen för olika värden på konstanten  $a$ , som då kallas parameter.

etymologi *Parameter* kommer från grekiskans *pará* 'bredvid' och *métron* 'mått, mätning'; jämför verbet *parametreín* 'att mäta genom jämförelse'.

jämför *konstant*<sub>2</sub> s. 15, *variabel* s. 21

## parentestecken

definition något av tecknen  $(, )$ ,  $[, ]$ ,  $\{, \}$ ,  $\langle, \rangle$

kommentar  $($  och  $)$  kallas *bågparenteser*,  $[$  och  $]$  *hakparenteser*,  $\{$  och  $\}$  *klammerparenteser*, *klamrar* eller *spetsparenteser*, slutligen kallas  $\langle$  och  $\rangle$  för *vinkelparenteser*.

Vinkelparenteser bör typografiskt åtskiljas från olikhetstecknen  $<$  och  $>$ : man bör lätt kunna läsa  $0 < \langle x, y \rangle < \langle x, a \rangle$ .

Parentestecknens viktigaste uppgift i matematiken är att ange prioriteringsordningen mellan olika operationer:  $a(b + c) = ab + ac$  (additionen utförs först) medan  $ab + c$  läses som  $(ab) + c$  (multiplikationen utförs först). En annan viktig uppgift är att ange funktionsvärdet: funktionen  $f$  har värdet  $f(x)$  för argumentet  $x$ .

Parentestecknen används också för att ange ordnade par:  $(0, 1)$  är paret med 0 som första komponent och 1 som andra komponent. Hakparenteser används för att beteckna intervall:  $[0, 1]$  är ett slutet intervall, och  $]0, 1[$  ett öppet intervall. Klammerparenteser används för att beteckna mängder:  $\{0, 1\}$  är mängden som består av de två elementen 0 och 1.

Parentesliknande tecken används för att beteckna golvfunktionen och takfunktionen:  $\lfloor 1, 7 \rfloor = 1$ ,  $\lceil 1, 7 \rceil = 2$ .

historia	Den första användningen av parentestecknen ( och ) för gruppering gjordes omkring mitten av 1500-talet. Från mitten av 1600-talet användes ibland ett streck, kallat <i>vinculum</i> över uttrycket. Detta tillämpas än i dag i kvadratrotsuttryck, och är förmodligen även upphovet till det långa bråkstrecket.
etymologi	<i>Parentes</i> kommer från grekiskans <i>paréntesis</i> 'inskott, något som skjuts in mellan' och syftar alltså på det som står mellan parentes-tecknen.

## relation

definition	matematisk struktur som består av två mängder och en delmängd av den kartesiska produkten av dessa
kommentar	Om de två mängderna är $X$ och $Y$ , så ges en relation $R$ genom att man anger en delmängd av den kartesiska produkten $X \times Y$ . Man kallar ibland $X$ för relationens <i>domän</i> och $Y$ för dess <i>codomän</i> . Om relationen $R$ råder mellan $x \in X$ och $y \in Y$ kan man skriva $(x, y) \in R$ eller $xRy$ eller $R(x, y)$ .

Den *omvända relationen*  $R^{-1}$ , *inversen*<sub>2</sub> till  $R$ , säges råda mellan  $x$  och  $y$  om och endast om  $yRx$ .

Ett speciellt slags relation har man när varje element i  $X$  förekommer som första element i ett par precis en gång i relationen. Då kallas relationen för en *avbildning* eller *funktion*, och man skriver, när  $x$  är ett givet element i  $X$ ,  $y = R(x)$  för det enda element  $y$  sådant att  $xRy$ .

exempel	Relationen $S = \{(x, y) \in K \times P; x \text{ är syster till } y\}$ är en relation mellan mängden $K$ av kvinnor och mängden $P$ av personer. Den är inte en avbildning, eftersom en kvinna inte alltid är syster till någon eller kan vara syster till flera personer. Den inversa relationen är $S^{-1} = \{(y, x) \in P \times K; y \text{ har } x \text{ till syster}\}$ och är inte heller en avbildning, eftersom en person inte behöver ha någon syster eller kan ha flera systrar.
---------	--

Relationen  $M = \{(x, y) \in K \times P; x \text{ är mor till } y\}$  är likaså en relation mellan mängden  $K$  av kvinnor och mängden  $P$  av personer. Den är inte en avbildning eftersom en kvinna kan vara utan barn eller ha mer än ett barn.

jämför	<i>avbildning</i> s. 12, <i>omvänd relation</i> s. 102
--------	--

## rum

synonym	<b>rymd</b>
---------	-------------

definition	mängd försedd med viss struktur
kommentar	De strukturer som kan förekomma är av mycket olika slag; det kan vara addition och multiplikation med skalär (som i ett vektorrum) eller öppna mängder (som i ett topologiskt rum).
jämför	<i>rummet</i> s. 20

## rummet

synonym	<b>rymden</b>
definition	⟨i denna bok⟩ det tredimensionella rummet
jämför	<i>rum</i> s. 19

## spelteori

definition	matematisk teori rörande det optimala beteendet i samband med spel, d.v.s. situationer i vilka enskilda individer eller grupper av individer med motsatta intressen söker påverka skeendet
------------	--

## statistik

definition	läran om metoder för att samla in, bearbeta, beskriva och dra slutsatser om data
kommentar	Ordet används också för att beteckna sifferuppgifter om något.
historia	Statistik som tillämpad vetenskap är mycket gammal: redan i det forntida Egypten förekom folk- och boskapsräkningar. Sveriges statliga statistikproduktion går tillbaka till mitten av 1730-talet. Till en början insamlades bara befolkningsuppgifter. Ansvarig i dag för en stor del av den statliga statistikproduktionen är Statistiska centralbyrån, SCB.
etymologi	<i>Statistik</i> tycks komma av <i>status</i> 'stat': ordet förekommer på 1600-talet i betydelsen 'statslära' ( <i>statistica</i> ) och fick i början av 1700-talet betydelsen 'beskrivning av stat/land med tillhörande sifferuppgifter'. Även på modernt latin kan <i>status</i> betyda 'stat'; påvens statssekreterare heter till exempel <i>secretarius status</i> .

## talteori

definition	gren av matematiken som behandlar de hela talen och deras delbarhetsegenskaper
------------	--

## urbild

synonym	<b>invers bild</b>
definition	⟨under en viss avbildning⟩ mängden av element som avbildas på ett givet element eller en given mängd av avbildningen
kommentar	Om $f: X \rightarrow Y$ är en avbildning av $X$ in i $Y$ , så är Urbilden av en delmängd $B$ av $Y$ under $f$ lika med $\{x \in X; f(x) \in B\}$ . Ibland skrivs den $f^{-1}(B)$ .

## uttryck

- definition meningsfull sammanställning av tecken
- kommentar Speciellt avses symboler för tal och variabler samt tecken för räkneoperationer.

## variabel

- definition storhet som kan anta värden i en given mängd
- kommentar Variabler betecknas ofta med någon av bokstäverna  $x$ ,  $y$  eller  $z$ .  
Inom statistiken skiljer man på *numeriska variabler* (som antar tal som värden) och *kategoriska variabler* (icke-numeriska variabler).
- historia I matematiska sammanhang infördes ordet *variabel*, först som adjektiv (*variabel storhet*), under 1700-talet i samband med utvecklingen av funktionsbegreppet.
- etymologi *Variabel* kommer från latinets *variabilis* 'som kan variera, som kan växla'.
- jämför *konstant*<sub>2</sub> s. 15, *parameter* s. 18

## värde

- definition storhet eller element i en mängd som en variabel kan vara lika med
- kommentar Några vanliga uttryckssätt är "Variabeln antar endast heltalsvärden", "Funktionen kan inte anta större värden än 1", "Sanningsvärdet hos utsagan är antingen *sant* eller *falskt*".

## yta

- definition tvådimensionellt geometriskt objekt
- kommentar En yta kan vara buktig eller plan samt begränsad eller obegränsad.  
I vissa fall accepterar man som yta en bild av en del av ett plan som har högre dimension<sub>1</sub> än två eftersom bilden är så skrynklig att den har oändlig tvådimensionell area men kan tilldelas ett mått i dimensionen 2,5.  
Utanför matematiken används ordet också om utsidan av något, det ytterskikt som begränsar ett föremål mot omgivningen.
- historia I Euklides' *Stoikheía* (i latinsk översättning *Elementa*) 'Grundbegreppen' lyder definition 5 i bok I: "En yta är det som bara har längd och bredd." Den följs av: "En ytas gränser är linjer." och "En plan yta är en yta som ligger likadant för var och en av sina linjer."
- jämför *area* s. 69, *kurva* s. 15, *fraktal* s. 177

## 2. De fyra räknesätten

### 2.1. Allmänt

#### bryta ut

definition	faktorisera ett uttryck med flera termer
kommentar	Motsvarande substantiv är <i>utbrytning</i> .
exempel	$3x^2 + 15x = 3x(x + 5)$ . Här har man brutit ut $3x$ .
jämför	<i>faktorisera</i> s. 27, <i>multiplicera in</i> s. 28

#### förenkla

synonym	<b>reducera</b>
definition	med hjälp av räknelagar och räkneregler ersätta ett uttryck med ett annat i någon mening enklare uttryck
kommentar	Vid förenkling sätter man likhetstecken mellan uttrycken eftersom de betecknar samma sak.
exempel	Bråket $105/28$ kan genom förkortning förenklas till $15/4$ ; både täljare och nämnare har dividerats med 7. Polynomet $6x - 3y + x + 5y$ kan förenklas till $7x + 2y$ .

#### mellanled

definition	uppställning som markerar ett mellanliggande resultat i en beräkning eller i en förenkling som innehåller flera steg
exempel	Vi förkortar $15a/(3a)$ till 5 i två steg: $15a/(3a) = 5a/a = 5$ . Här är $5a/a$ mellanled.

#### minnessiffra

definition	hjälpssiffra vid addition, subtraktion, multiplikation eller division
------------	---

#### modulo

definition	$\langle$ avseende ett givet tal $\rangle$ gällande efter addition av någon multipel av det givna talet
kommentar	När man räknar timmar räknar man modulo 12 eller modulo 24. En vanlig beteckning för modulo är mod.
exempel	Additionen $11 + 8 \equiv 7 \pmod{12}$ ; multiplikationen $11 \cdot 8 \equiv 4 \pmod{7}$ . Av tradition skriver man likheten som $\equiv$ när man räknar modulo något tal. Men detta tecken används också för identitet i betydelsen att en likhet gäller för alla värden hos de ingående variablerna.
historia	Tecknet $\equiv$ för modulo infördes 1801 av Carl Friedrich Gauss (1777–1855).
etymologi	<i>Modulo</i> betyder på latin 'med/efter måttstock' och är ablativ av <i>modulus</i> 'skala, måttstock'.

## potenslag

definition lag som anger hur man räknar med potenser

exempel  $b^x b^y = b^{x+y}$ ;  $(ab)^x = a^x b^x$ ;  $(b^x)^y = b^{xy}$ ;  $b^{-x} = (1/b)^x$ .

## prioriteringsregel

definition räkneregeln som anger i vilken ordning olika operationer skall utföras

kommentar Först beräknas parenteser, sedan potenser, därefter utförs multiplikation och division i valfri ordning. Sist utförs addition och subtraktion i valfri ordning. Det kan förekomma flera parenteser inne i varandra; man börjar då inifrån.

exempel  $7 \cdot (5 - 3)^3 + 1 = 7 \cdot 2^3 + 1 = 7 \cdot 8 + 1 = 56 + 1 = 57$ .

etymologi *Prioritet* har kommit in i svenskan via tyska och franska, men har sitt ursprung i latinets *prioritas* 'företräde', bildat av *prior* 'den första av två, den förre'.

## räknelag

definition räkneregeln för aritmetiska och algebraiska operationer

exempel De viktigaste räknelagarna är den kommutativa lagen, den associativa lagen, den distributiva lagen och potenslagarna.

## räkneregeln

definition (inom aritmetiken) regel som anger hur eller i vilken ordning beräkningar skall utföras

jämför *prioriteringsregeln* s. 23, *räknelagen* s. 23

## räknesätt

definition operation inom aritmetiken

kommentar De fyra fundamentala räknesätten är addition, subtraktion, multiplikation och division. Exempel på andra räknesätt är räkning med potenser och räkning med rotuttryck.

historia I *Swensk Räknebok* (1755) av Johan Bergmarck namnges de fem aritmetiska delarna som "Additio, Subtractio, Multiplicatio, Divisio och Regula de Tri".

## siffersumma

definition summan av siffrornas talvärden i ett tal

kommentar Ett naturligt tal är delbart med 3 om och endast om dess siffersumma är det.

exempel Siffersumman av 235 är  $2 + 3 + 5 = 10$ . Siffersumman av 10 är  $1 + 0 = 1$ . Således är 235 inte delbart med 3.

## signumfunktionen

definition den funktion på de reella talen som ger positiva tal värdet 1, negativa tal värdet  $-1$  och noll värdet 0

kommentar	Funktionen betecknas ofta sgn.
exempel	$\text{sgn}(xy) = \text{sgn}(x)\text{sgn}(y)$ om $x$ och $y$ är reella tal.
jämför	<i>tecken</i> s. 24

## tecken

synonym	<b>signum</b>
definition	ett av tecknen $+$ , $-$ och $0$
kommentar	Två positiva (negativa) tal sägs ha <b>samma tecken</b> eller <b>lika tecken</b> . Ett positivt och ett negativt tal sägs ha <b>skilda tecken</b> eller <b>olika tecken</b> .
exempel	För alla reella tal $x$ gäller att $x^5$ och $x^3$ har samma tecken.
etymologi	<i>Signum</i> är det latinska ordet för 'tecken'.
jämför	<i>signumfunktionen</i> s. 23

## teckenregel

definition	räkneregler som anger hur flera plustecken eller minustecken efter varandra skall tolkas
kommentar	Vid multiplikation och division ger ett jämnt antal minustecken plus och ett udda antal minustecken minus.
exempel	$(+4) \cdot (+5) = 20$ ; $(+4) \cdot (-5) = -20$ ; $(-4) \cdot (-5) = 20$ .

## utelämnat tecken

definition	tecken som anses underförstått och som därför inte skrivs ut
kommentar	Plustecken och multiplikationstecken kan till exempel utelämnas i vissa sammanhang.
exempel	$+3 = 3$ ; $a \cdot b = a \times b = ab$ ; $3 \cdot a = 3 \times a = 3a$ . Men $2 \cdot 3 = 2 \times 3 \neq 23$ , så multiplikationstecknen $\cdot$ eller $\times$ får inte utelämnas mellan siffror.

## överslagsräkning

definition	räkning med avrundade tal för att snabbt kunna kontrollera om resultatet av en beräkning är rimligt
------------	---

## 2.2. Addition

### addera

synonym	<b>summera</b>
definition	utföra addition
kommentar	Man säger att man <i>adderar</i> två tal, <i>adderar</i> det ena talet <i>till</i> det andra eller <i>beräknar summan</i> av de båda talen. Ett vanligt slanguttryck för addera är <b>plussa</b> .
etymologi	<i>Addera</i> kommer från det latinska verbet <i>addere</i> 'att lägga till, att tillfoga'.



## addition

- definition operation i aritmetiken som innebär att två tal eller uttryck läggs ihop
- kommentar I ett uttryck  $a+b$  kallas  $a$  och  $b$  *termer*, **addender** eller **summander**.  
En addition som skrivs  $6+2=8$  kan utläsas ”sex plus två är (lika med) åtta” (utgående från tecknens namn) eller ”summan av sex och två är åtta” (utgående från begreppens namn).
- etymologi *Addition* kommer från latinets *additio*, som är ett verbalsubstantiv till verbet *addere* ’att lägga till, att tillfoga’. *Addend* och *summand* är bildade med det latinska suffixet *-nd-*, som betyder ’som bör ...-as’; jämför *subtrahend*, *minuend*, *multiplikand*, *dividend*.
- jämför *term* s. 26

## hundrakamrater

- definition två naturliga tal med summan hundra
- exempel Talen 34 och 66 är hundrakamrater.
- kommentar Det finns alltså 51 oordnade par av hundrakamrater och 101 ordnade par av hundrakamrater.
- jämför *tiokamrater* s. 26

## plustecken

- definition tecknet  $+$
- kommentar I aritmetiken symboliserar plustecknet operationen addition eller markerar att ett tal är positivt. I den förstnämnda betydelsen kallas tecknet även **additionstecken**.
- historia Första gången symbolerna  $+$  och  $-$  kom i tryck var i en tysk räknebok för köpmän (Johannes Widmann 1489), och i Sverige i en algebraisk del av Ericus Gestrinius’ tolkning av Euklides’ verk *Stoikheía* ’Grundbegreppen’ år 1637.
- etymologi *Plus* betyder ’mer’ på latin.

## summa

- definition resultat av en addition
- kommentar Termen *summa* används även för additionsuttrycket eller för ett kombinerat additions- och subtraktionsuttryck.
- etymologi *Summa* kommer från latinets *summa* ’det översta’. Detta beror på att både romare och greker adderade nerifrån och upp, vilket gjorde att resultatet (summan) kom att stå överst i uträkningen.

## summatecken

- definition den grekiska bokstaven  $\Sigma$  (stora Sigma, ofta skriven större:  $\Sigma$ ) när den betecknar summering av ett antal tal
- exempel

$$\sum_{k=1}^3 k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14,$$

som utläses ”summan av  $k$  i kvadrat då  $k$  går från 1 till 3 är lika med 14”.

historia Summatecknet  $\sum$  användes första gången av Euler 1755, dock för en summa av oändligt små differenser.

## term

definition (inom aritmetik och algebra) tal eller uttryck som skall adderas eller subtraheras

## tiokamrater

definition två naturliga tal med summan tio

exempel 1 och 9; 4 och 6

jämför *hundrakamrater* s. 25

## 2.3. Subtraktion

### differens<sub>1</sub>

synonym **skillnad**

definition resultat av en subtraktion

kommentar Termen *differens* används även för subtraktionsuttrycket.

Differensen mellan (eller av)  $a$  och  $b$  är talet  $a - b$ . Man kan också säga *skillnaden mellan  $a$  och  $b$* .

etymologi *Differens* kommer från det latinska *differentia* ’olikhet, skillnad’.

### minustecken

definition tecknet  $-$ , som symboliserar operationen subtraktion och anger motsatt tal

kommentar I den förstnämnda användningen kallas tecknet även **subtraktions-tecken**.

exempel Minustecknets två funktioner framgår av exemplet  $167 - 103 = 167 + (-103)$ , där vänsterledet anger att 167 skall minskas med 103, medan högerledet säger att man till 167 skall lägga det motsatta talet till 103. Det motsatta talet till  $x$  betecknas  $-x$  och är lika med  $0 - x$ . Det är positivt om  $x$  är negativt. Om  $x = -3$ , så är  $-x = 3$ .

historia Se *plustecken*.

etymologi *Minus* kommer från det latinska adverbet *minus* ’mindre’.

### subtrahera

definition utföra subtraktion

kommentar Man säger att man *subtraherar* eller *drar 3 från 7* och får 4 som *differens*. Man kan också säga att man *beräknar differensen mellan 7 och 3* eller *av 7 och 3*.

etymologi *Subtrahera* kommer från det latinska verbet *subtrahere* ’att dra undan’.

## subtraktion

definition	operation i aritmetiken som innebär att ett tal eller uttryck dras ifrån ett annat tal eller uttryck
kommentar	En subtraktion som skrivs $6 - 2 = 4$ utläses ”sex minus två är (lika med) fyra”. I uttrycket $m - s$ kallas $m$ <i>minuend</i> och $s$ <i>subtrahend</i> . Båda kallas <i>termer</i> . Subtraktion är den inversa operationen till addition, d.v.s. $a - b = x$ om och endast om $a = x + b$ .
etymologi	<i>Subtraktion</i> kommer från latinets <i>subtractio</i> , som är substantiv till verbet <i>subtrahere</i> ’att dra undan’.
jämför	<i>term</i> s. 26

## 2.4. Multiplikation

### faktor

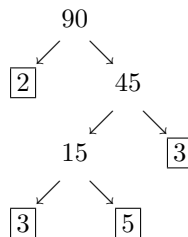
definition	tal eller annat uttryck som ingår i en multiplikation
exempel	I multiplikationen $4 \cdot 12$ ingår faktorerna 4 och 12. I $3x$ , som skall tolkas som $3 \cdot x$ , ingår faktorerna 3 och $x$ .
etymologi	<i>Faktor</i> kommer från latinets <i>factor</i> ’den som gör’.

### faktorisera

synonym	<b>uppdelning i faktorer</b>
definition	skriva ett heltal som en produkt av två eller flera heltal
kommentar	Motsvarande gäller för polynom.
exempel	Talet 21 kan uppdelas i faktorerna 3 och 7, alternativt $-3$ och $-7$ , som multiplicerade med varandra blir 21. Polynomet $12x^2 + 4x$ kan delas upp i faktorerna $4x$ och $3x + 1$ . Man säger att man har <i>brutit ut</i> $4x$ .
jämför	<i>faktor</i> s. 27, <i>multiplicera</i> s. 28

### faktorträd

definition	grafisk uppställning av heltal i trädform där löven till en nod utgörs av faktorerna till det tal som anges i noden
------------	---



Faktorträd. Talet 90 delas successivt upp i faktorer:  $90 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3$ .

**kommentar** Faktorträdet illustrerar i vilken ordning man kan dela upp talen och likaså hur man kan multiplicera dem. Faktorruppdelning av tal med många printalsfaktorer underlättas av ett faktorträd (med grenarna nedåt).

### gemensam faktor

**definition** (i aritmetiken) heltal som två eller flera givna heltal är delbara med

**kommentar** Den *största gemensamma faktorn* betecknas *SGF*.

**exempel** Talen 12 och 18 har de gemensamma faktorerna 1, 2, 3 och 6; man har nämligen  $12 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2 \cdot 6$  och  $18 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 6 \cdot 3$ . Den största gemensamma faktorn är 6.

### gemensam multipel

**definition** (i aritmetiken) heltal som är en multipel till vart och ett av två eller flera givna heltal

**kommentar** Den *minsta gemensamma multipeln* betecknas *MGM*.

**exempel** I den kinesiska kalendern finns en tvåårig period (yin och yang), en tioårig period (med fem element, vardera i två år), samt en tolvårig period (med tolv djur). Eftersom den minsta gemensamma multipeln av 2, 10 och 12 är 60, så kommer ett års alla karakteristika åter efter 60 år men inte tidigare.

### multipel

**synonym** **heltalsmultipel**

**definition** (i aritmetiken) tal som är produkten av ett givet tal och något heltal

**kommentar** Ett tal  $a$  sägs vara multipel av ett tal  $b$  om det existerar ett heltal  $n$  sådant att  $a = nb$ .

**exempel** Talet 15 är en multipel av talet 3, men även av talet 5. Man kan också säga att 15 är *delbart med* 3 respektive 5, och vidare att 3 och 5 är *delare till* 15. Talet  $\sqrt{18}$  är en multipel av  $\sqrt{2}$ , eftersom  $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ .

**etymologi** *Multipel* kommer av latinets *multiplex* 'mångfaldig, mångdubbel'.

### multiplitera

**definition** utföra multiplikation

**kommentar** Man säger att man *multipliterar två tal*, *multipliterar det ena talet med det andra* eller *beräknar produkten av talen*.

Ett vanligt slanguttryck för multiplitera är *gångra*.

**etymologi** *Multiplitera* kommer från det latinska verbet *multiplicare* 'att mångfaldiga, att föröka'.

**jämför** *faktorisera* s. 27

### multiplitera in

**definition** multiplitera varje term i en parentes med den faktor som står framför parentesen

**exempel**  $5(x - 2) = 5x - 10$ ; man har multipliserat in 5.

jämför *bryta ut s. 22*

## multiplikation

definition operation i aritmetiken som för naturliga tal innebär upprepad addition och för andra talområden definieras genom utvidgning av denna under bevarande av viktiga räkneregler

kommentar En produkt som  $3 \cdot 4$  kan uppfattas som  $4 + 4 + 4$ , d.v.s. 4 taget tre gånger, men också som  $3 + 3 + 3 + 3$ , d.v.s. 3 taget fyra gånger.

Multiplikation kan definieras för andra talområden än de naturliga talen, till exempel för reella och komplexa tal, liksom för matriser.

En multiplikation som skrivs  $5 \cdot 4 = 20$  utläses ”fem gånger fyra är (lika med) tjugo” eller ”produkten av faktorerna fem och fyra är tjugo”.

I produkten  $ab$  kallas  $a$  och  $b$  *faktorer* (inte termer).

Om man från början har en faktor som man vill multiplicera en annan med, så kallas den förstnämnda även **multiplikator** och den man multiplicerar **multiplikand**. I ett uttryck som  $4x$  är det naturligt att uppfatta 4 som multiplikator och  $x$  som multiplikand.

etymologi *Multiplikation* kommer från latinets *multiplicatio*, som är substantiv till verbet *multiplicare* ’att mångfaldiga, att föröka’.

jämför *faktor s. 27, produkt s. 29*

## multiplikationstecken

synonym **gångertecken**

definition tecknet  $\cdot$  eller  $\times$

kommentar Tecknet symboliserar operationen multiplikation. Multiplikationstecknet utelämnas ofta i algebraiska uttryck, t. ex.  $ab$  och  $4x(2 - x)$ . I vissa sammanhang, t. ex. på miniräknare och tangentbord till datorer, förekommer  $\times$  och ibland även  $*$  som symbol för multiplikation.

historia Multiplikationstecknet  $\times$  infördes av William Oughtred 1631. En punkt som tecken för multiplikation, skriven som  $\cdot$  eller  $.$ , härrör från Leibniz, som började använda det omkring 1700; han ansåg att  $\times$  kunde förväxlas med  $x$ .

## primtalsfaktor

synonym **primfaktor**

definition faktor som är ett primtal

kommentar Alla positiva heltal som inte är primtal kan delas upp i två eller flera primtalsfaktorer, vilkas produkt då är talet självt.

exempel Talen 2 och 3 är primfaktorer i 36, medan 6 och 9 är faktorer men inte primfaktorer.

## produkt

definition resultat av en multiplikation

kommentar Termen produkt används även för multiplikationsuttrycket.

etymologi *Produkt* har kommit in i svenskan via tyskan, men har sitt ursprung i det latinska verbet *producere* 'föra fram, frambringa'.

## produkttecken

definition den grekiska bokstaven  $\Pi$  (stora Pi, ofta skriven större:  $\prod$ ) när den betecknar multiplicering av ett antal tal

exempel

$$\prod_{k=1}^3 k^2 = 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 = 36,$$

som utläses "produkten av  $k$  i kvadrat då  $k$  går från 1 till 3 är lika med 36".

## uppdelning i primfaktorer

definition skriva ett heltal som en produkt av primtal

exempel  $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ , där 2, 3 och 5 är primtal.

jämför *faktorisera* s. 27

## 2.5. Division

### bråkstreck

definition ett av tecknen  $\text{—}$  (*vågrätt bråkstreck*) och  $/$  (*snett bråkstreck*)

kommentar Snett bråkstreck används företrädesvis då man i löpande text vill skriva täljare och nämnare på samma rad.

historia Det äldsta kända exemplet på användning av det horisontella bråkstrecket återfinns i ett manuskript av al-Ḥaṣṣār (verksam i Marocko på 1100-talet).

jämför *divisionstecken* s. 32

### delare

definition faktor i en viss faktorisering av ett givet tal eller polynom

kommentar Det måste anges eller av sammanhanget framgå vilken faktorisering det är frågan om. De vanligaste fallen är heltalen; polynom med heltalskoefficienter; polynom med reella koefficienter; polynom med komplexa koefficienter.

Heltalet  $d$  är en delare i heltalet  $n$  om det finns ett heltal  $k$  sådant att  $n = kd$ . Man säger då att  $n$  är *delbart med  $d$  och  $k$* , eller någon gång att  $d$  *och  $k$  går jämnt upp i  $n$* . Ibland förekommer även det oegentliga talesättet *jämnt delbart med*, som kan missförstås, eftersom man kan tro att kvoten skall vara ett jämnt tal.

Speciellt är 0 delbart med 0, men kvoten  $0/0$  är inte entydigt definierad, eftersom det finns mer än ett tal  $k$  sådant att  $0 = k \cdot 0$ .

exempel Talet 37 är delare i 1 147 men inte i 1 148 (heltal).

Polynomet  $x + 1$  är delare i polynomet  $x^2 - 1$  (polynom med heltalskoefficienter).

Polynomet  $x^2 + 1$  kan inte faktoriseras i förstgradspolynom med reella koefficienter, däremot om vi tillåter komplexa koefficienter:  $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$ .

jämför *faktor* s. 27

## dividera

definition utföra division

kommentar Man säger att man *dividerar* ett tal  $a$  med ett annat tal  $b$  eller *beräknar kvoten*<sub>1</sub> mellan (eller av)  $a$  och  $b$ .

En divisionsalgoritm kan uppfattas som en upprepad subtraktion.

etymologi *Dividera* kommer från det latinska verbet *dividere* 'att dela, att klyva'.

## division

definition räkneoperation med syfte att finna vilket tal ett givet tal skall multipliceras med för att man om möjligt skall erhålla ett annat givet tal eller komma nära detta givna tal

kommentar Om man arbetar med någon av talmängderna de rationella talen  $\mathbf{Q}$ , de reella talen  $\mathbf{R}$  eller de komplexa talen  $\mathbf{C}$ , så är division den inversa operationen till multiplikation, vilket innebär att resultatet av divisionen, betecknat  $a/b$ , är lika med  $k$  om och endast om  $a = kb$ , förutsatt att  $b \neq 0$ . Lösningen  $k$  till ekvationen  $a = kb$ , där  $a$  och  $b$  är givna och  $b \neq 0$ , är unik och kallas för kvoten<sub>1</sub> av  $a$  och  $b$ .

Om man arbetar med heltalen  $\mathbf{Z}$  är det inte alltid möjligt att lösa ekvationen  $a = kb$  även om  $b \neq 0$ . Man väljer då ett tal  $q$  som gör att avvikelsen  $a - qb$  blir liten i någon mening. Om  $b > 0$  så är det vanligaste är att man väljer  $q$  så att  $0 \leq a - qb < b$ . Denna olikhet har exakt en lösning. Man kan också välja ett heltal  $x$  som uppfyller  $|a - xb| \leq \lfloor \frac{1}{2} |b| \rfloor$ .

Termen *division* används även för polynom. Till två givna polynom  $A(x)$  och  $B(x)$  med rationella koefficienter och där  $B(x)$  inte är noll väljer man som kvot det unika polynom  $Q(x)$  sådant att  $R(x) = A(x) - Q(x)B(x)$  har lägre grad än  $B(x)$ .

En division som skrivs  $18/3 = 6$  utläses "arton delat med tre är (lika med) sex" eller "arton genom tre är (lika med) sex". I uttrycket  $a/b$  kallas  $a$  **dividend** och  $b$  **divisor**.

etymologi *Division* kommer från det latinska *divisio*, verbalsubstantiv till verbet *dividere* 'att dela, att klyva'. *Dividend* betyder 'som bör delas'; *divisor* 'delare'.

jämför *dimension*<sub>2</sub> s. 70, *dimensionsanalys* s. 70, *storhet* s. 73

## divisionsalgoritm

definition algoritm som anvisar hur man kan räkna ut kvoten<sub>1</sub> eller kvoten<sub>2</sub> mellan två tal eller två polynom

historia En vanlig divisionsalgoritm i Europa före 1600 var galärmetoden. Den hade utvecklats ur metoder där delresultaten i beräkningarna successivt suddades ut under arbetets gång. Dessa metoder hade sitt ursprung i arabisk matematik och vidare tillbaka i Indien och Kina.

$$\begin{array}{r|l}
 15 & \\
 533 & \\
 16878 & \\
 \cancel{65284} & 109 \\
 \cancel{59444} & \\
 599 & \\
 5 &
 \end{array}$$

Galärmetoden för division. Dividenden är här 65 284, divisorn 594, kvoten<sub>2</sub> 109 och resten 538. Namnet kommer troligen av att uppställningen liknar en galär till formen.

Galärmetoden lärdes ut i den första tryckta läroboken i matematik, den s. k. *Treviso-aritmetiken* 1478. Den användes också i den tidigaste läroboken på svenska av Aurelius 1614. De flesta andra divisionsalgoritmer som använts i Sverige är i sina uppställningar mer lika dagens.

I Skolöverstyrelsens utredning i skolfrågor nummer 5, *Terminologi, beteckningssätt och uppställningstyper i den elementära matematikundervisningen* (1961), konstaterades att fyra olika divisionsalgoritmer var i bruk i skolorna liksom i läromedlen, och att en enhetlighet vore önskvärd. Man förordade då trappan, bland annat på grund av att "kvoten sätts ovanför dividenden" samt att uppställningen var vanlig i Danmark, England, Holland och USA. Trappan var den vanliga uppställningen i Danmark och den förordades också av några i Sverige – i Holland, England och USA användes en variant med högerparentes för den vertikala delen av trappsteget. I en terminologibok från 1966 användes enbart trappan.

I *Matematikterminologi för skolan* (1979) rekommenderade Skolöverstyrelsen i stället liggande stolen. Trappan angavs som en "Alternativ uppställning", men med ett förbehåll: "En sådan uppställning kan dock åstadkomma att förväxling sker mellan täljare och nämnare eftersom dessa då skrivs i omvänd ordning mot i en med snett bråkstreck tecknad division".

jämför *kort division* s. 33, *lång division* s. 34, *liggande stolen* s. 34, *trappan* s. 34

## divisionstecken

definition	tecknet — eller / när det symboliserar operationen division
kommentar	På miniräknare och tangentbord till datorer förekommer ÷ som symbol för division. Även kolon (:) förekommer som symbol för division, men är olämpligt eftersom detta (som matematiskt tecken) oftast symboliserar ett förhållande, t. ex. en skalangivelse.
historia	Leibniz använde : som divisionstecken 1684, och här förekommer också ett horisontellt streck (—). Johann Rahn använde ÷ år 1659, och ett snedstreck (/) är som tidigast funnet i 1700-talsskrifter.



jämför *bråkstreck* s. 30

## Euklides' algoritm

definition algoritm för att bestämma största gemensamma delaren till två naturliga tal

exempel Talen 497 och 203 har 7 som största gemensamma delare. Denna hittas genom successiv division med rest:  $497 = 2 \cdot 203 + 91$ ,  $203 = 2 \cdot 91 + 21$ ,  $91 = 4 \cdot 21 + 7$ ,  $21 = 3 \cdot 7 + 0$ ; den sista rest som inte är noll är 7, och detta tal är den största gemensamma delaren.

## gemensam delare

definition delare till vart och ett av två eller flera givna heltal

kommentar Motsvarande gäller även för polynom. Den största gemensamma delaren betecknas ibland **SGD**.

exempel Talet 3 är gemensam delare till 6, 12 och 132.

Polynomet  $x + 3$  är gemensam delare till  $x^2 - 9$  och  $2x^2 + 12x + 18$ .

## kort division

definition divisionsalgoritm där man räknar direkt på bråkstrecket och där inte alla uträkningar bokförs

kommentar Metoden är lätt att använda om nämnaren är ett ensiffrigt tal.

exempel Vi dividerar 86 med 2. Först delar vi tiotalen ( $8/2 = 4$ ). Sedan delar vi entalen ( $6/2 = 3$ ). Vi får 4 tiotal och 3 ental =  $40 + 3 = 43$ .

## kvot<sub>1</sub>

definition (vid räkning med rationella, reella eller komplexa tal) resultat av en division

kommentar Termen *kvot* används även för divisionsuttrycket.

I de nämnda talmängderna, som alla är kroppar<sub>2</sub>, kan ekvationen  $a = kb$  lösas för alla givna tal  $a$  och  $b \neq 0$ . Kvoten<sub>1</sub> mellan (eller av)  $a$  och  $b$  är det unika tal  $k$  som uppfyller  $a = kb$ . Man skriver  $k = a/b$

exempel Kvoten<sub>1</sub> av 7 och 2 är 3,5.

etymologi *Kvot* kommer från det latinska uttrycket *quota pars* 'hur stor del?'; *quot* betyder 'hur många?', en relevant fråga när man kvoterar in vissa grupper till en eftersökt utbildning.

## kvot<sub>2</sub>

definition (vid räkning med hela tal när icke hela tal inte tillåts) resultat av en division

kommentar Ekvationen  $a = kb$  kan inte alltid lösas med heltal när  $a$  och  $b$  är heltal, även om  $b \neq 0$ .

Kvoten<sub>2</sub> är ett heltal som kommer nära kvoten<sub>1</sub> i någon mening; om  $b > 0$  till exempel, så väljer man vanligen det unika heltal  $q$  som uppfyller  $0 \leq a - qb < b$ . Kvoten<sub>2</sub> är alltså då lika med heltalsdelen av den rationella kvoten<sub>1</sub>:  $q = \lfloor k \rfloor$ , där  $k$  är kvoten<sub>1</sub>. Talet  $a - qb$  kallas *resten*.

exempel Kvoten<sub>2</sub> av 7 och 2 är 3; resten är 1.  
 jämför *division* s. 31

### liggande stolen

definition lång division där dividenden skrivs till vänster, divisorn till höger mellan stolens ben och kvoten successivt skrivs ovanför dividenden.  
 historia Se term-posten *divisionsalgoritm*.

$$\frac{567}{35} = 16,2 \quad \begin{array}{r} 016,2 \\ 567 \overline{)35} \\ -35 \\ \hline 217 \\ -210 \\ \hline 0070 \\ -70 \\ \hline 00 \end{array}$$

Liggande stolen. Dividenden är här 567, divisorn 35 och kvoten<sub>1</sub> 16,2. Om man avbryter när man kommit till  $217 - 210 = 7$ , får man i stället kvoten<sub>2</sub> 16 och resten 7.

### lång division

definition divisionsalgoritm som genomförs med hjälp av en standarduppställning bestående av flera steg vilka var för sig inte innehåller division  
 kommentar För lång division finns det många räkneuppställningar eller algoritmer. De fungerar även för polynom. En vanlig uppställning kallas *liggande stolen*, en annan *trappan*.  
 jämför *liggande stolen* s. 34, *trappan* s. 34

### rest

definition tal som blir kvar vid division av ett heltal med ett positivt heltal  
 kommentar Resten vid division av ett heltal  $a$  med ett positivt heltal  $b$  är det heltal  $r$  som uppfyller  $0 \leq r < b$  och  $a = qb + r$  för något heltal  $q$ .  
 exempel Fyra flickor skall dela 14 äpplen. De får tre äpplen var och det blir två äpplen över:  $14 = 3 \cdot 4 + 2$ . Man säger att kvoten<sub>2</sub> är 3 och att resten är 2.  
 jämför *kvot*<sub>2</sub> s. 33

### trappan

definition lång division där divisorn skrivs till vänster, dividenden till höger, och kvoten successivt skrivs ovanför dividenden  
 historia Se term-posten *divisionsalgoritm*.

$$\frac{567}{35} = 16,2$$
$$\begin{array}{r} 016,2 \\ 35 \overline{) 567,0} \\ \underline{-35} \phantom{0} \\ 217 \phantom{0} \\ \underline{-210} \phantom{0} \\ 70 \phantom{0} \\ \underline{-70} \\ 00 \end{array}$$

Trappan. Dividenden är här 567, divisorn 35 och kvoten<sub>1</sub> 16,2. Om man avbryter när man kommit till  $217 - 210 = 7$ , får man i stället kvoten<sub>2</sub> 16 och resten 7.

## 3. Aritmetik

### 3.1. Allmänt

#### aritmetikens fundamentalsats

definition den sats som säger att varje naturligt tal större än 1 kan skrivas som en produkt av primtal och på ett enda sätt bortsett från omordningar av faktorerna

kommentar Resultatet kallas *entydig faktoruppdelning* och gäller alltså för heltalen  $\mathbf{Z}$ , men också för vissa andra ringar, som de komplexa talen med heltalig realdel och imaginärdel,  $\mathbf{Z} + i\mathbf{Z}$ . Dock förändras begreppet primtal när man går över till dessa komplexa tal; exempelvis är  $2 = (1+i)(1-i)$  och  $5 = (2+i)(2-i)$  inte längre primtal i ringen  $\mathbf{Z} + i\mathbf{Z}$ .

I åter andra ringar, till exempel i den som består av alla komplexa tal av formen  $x+y\sqrt{-5}$  där  $x$  och  $y$  är heltal, alltså  $\mathbf{Z} + \sqrt{-5}\mathbf{Z}$ , är faktoreruppdelningen inte entydig. Talet 6 till exempel har två väsentligt olika faktoriseringar:  $6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$ .

historia Primtal behandlades först i Euklides' *Stoikheía* (i latinsk översättning *Elementa*) 'Grundbegreppen'. Så vitt man nu vet bevisades satsen att varje naturligt tal större än 1 kan skrivas som en produkt av primtal först av al-Fārisī omkring år 1300. Han var troligen född ungefär 1260 och dog omkring 1320 i Tabriz.

Aritmetikens fundamentalsats, som även inbegriper att faktoreruppdelningen kan göras på väsentligen ett enda sätt, bevisades av Gauss 1801 i *Disquisitiones arithmeticae* 'Aritmetiska undersökningar'.

#### avrunda

definition ersätta ett tal med ett närliggande men mindre noggrant tal

kommentar Man avrundar ett tal i decimalform till ett givet antal signifikanta siffror eller ett givet antal decimaler. En vanlig avrundningsregel är denna: om den sista siffran man vill ha med i talet (*avrundningssiffran*) följs av 0, 1, 2, 3 eller 4 så behåller man den siffran som den är; man säger att man *avrundar nedåt*. Om avrundningssiffran följs av 5, 6, 7, 8 eller 9 så höjer man den ett steg; man säger att man *avrundar uppåt*. Enligt en alternativ regel avrundar man 1,25 till 1,2 men 1,35 till 1,4, så att sista siffran blir jämn när man stryker blott en siffra och denna är en femma.

exempel Om man vill avrunda 13,62 till närmaste heltal så avrundar man uppåt till 14. Om man vill avrunda 4,319 till närmaste tal med en decimal så avrundar man nedåt till 4,3.

#### avrundningsfel

definition fel som uppstår vid avrundning

- kommentar** Vid avrundning nedåt blir avrundningsfelet negativt; vid avrundning uppåt positivt.  
Enligt vissa källor räknar man dock endast med absolutbeloppet av differensen, så att felet alltid är icke-negativt.
- exempel** Om man avrundar 327,24 nedåt till 327 så blir avrundningsfelet:  $327 - 327,24 = -0,24 < 0$ . Om man avrundar 326,77 uppåt till 327 så blir avrundningsfelet  $327 - 326,77 = 0,23 > 0$ .
- jämför** *avrunda* s. 36, *fel* s. 86

## exakt värde

- definition** värde från en beräkning eller observation som inte är avrundat eller approximerat
- exempel**  $1/7$  kan vara ett exakt värde, 0,1429 ett avrundat.

## intervallskattning

- definition** angivande av ett intervall inom vilket en sökt storhet ligger

## numeriskt uttryck

- definition** uttryck med enbart tal
- kommentar** Termen används för att få en distinktion till uttryck med variabler.
- exempel** Talen 13,  $4/7$ ,  $\pm\sqrt{5}$ ,  $3\pi$ ,  $4e$ ,  $5i$ . Uttrycket  $4x^2$  är inte numeriskt, men om man sätter in  $x = 3$  får man ett numeriskt uttryck.
- etymologi** *Numerisk* kommer från latinets *numerus* 'tal'.

## oändlighet

- definition** objekt som läggs till mängden av tal för att möjliggöra division med noll eller vissa gränsövergångar
- kommentar** Inom den matematiska analysen arbetar man med tre olika oändligheter:  $+\infty$ ,  $-\infty$  och  $\infty$ . De är inte tal. Det första representerar något oändligt stort, något som är större än alla reella tal, d.v.s. ligger till höger om alla tal på tallinjen; det andra något som ligger till vänster om alla tal på tallinjen. Det tredje tecknet däremot representerar något oändligt stort som inte kan tänkas till höger eller vänster om tallinjen.  
Inom mängdläran finns oändligt många oändligheter. De vanligast förekommande är  $\aleph_0$  (alef-noll) och  $2^{\aleph_0}$  (två upphöjt till alef-noll), som är kardinaliteterna för de hela talen respektive de reella talen.
- exempel** Man får inte dividera med noll, men ibland vill man likafullt göra det, och då definieras kvoten<sub>1</sub> som oändligheten:  $1/0 = \infty$ . Gränsvärdet av  $1/x$  då  $x$  går mot noll genom positiva värden är  $+\infty$  och då  $x$  går mot noll genom negativa värden  $-\infty$ : här behövs två oändligheter.
- historia** Aristoteles [aristo'tel:øs] (latinbaserat uttal [ari'sto:tɛləs] eller [ari'sto:tɛləs]; 384—322 f. Kr.) skilde mellan faktisk oändlighet (t. ex. en existerande oändlighet bestående av alla heltal) och en potentiell oändlighet (t. ex. att de naturliga talen kan räknas upp hur länge

som helst genom successiv addition av 1). Han hävdade att faktisk oändlighet inte existerade. Den nuvarande mängdlärans oändligheter är dock faktiska i Aristoteles' mening.

Inom geometrin kan kanske Euklides' begrepp rät linje (*eutheía*) vara ett exempel på potentiell oändlighet. Euklides tänkte sig troligen inte en rät linje som oändlig i båda riktningarna (som vi gjort i denna bok), utan som sträckor som innehåller en given sträcka; varje sträcka är ändligt lång, men kan dras ut efter behov i båda riktningarna. Två sträckor varav den ena är en förlängning av den andra måste ändå betraktas som samma räta linje, vilket med modernt språkbruk innebär att man infört en ekvivalensrelation.

## oändlighetstecken

definition	tecknet $\infty$
exempel	$1/\infty = 0$ ; $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1/x = 0$ .
historia	John Wallis (1616–1703) införde år 1655 oändlighetstecknet $\infty$ .
jämför	<i>oändlighet</i> s. 37

## reguladetri

definition	metod att bestämma ett av talen $a$ , $b$ , $c$ , $d$ när $a/b = c/d$ och tre av dem är givna
historia	Regula de tri har en mycket lång historia, som sträcker sig åtminstone 2 000 år tillbaka i kinesisk matematik. Den behandlades från 500-talet i indisk matematik under namnet <i>trairāśika</i> 'treregeln' och var en framträdande teknik även inom arabisk och medeltida europeisk matematik. I Sverige behandlades den i Aurelius' lärobok 1614, den första tryckta matematikboken på svenska. Reguladetri förekom under lång tid i skolan i Sverige men togs bort från skolmatematiken på 1960-talet. Sedan dess behandlas dessa problem i samband med proportionalitet; se detta ord.
etymologi	Ordet <i>reguladetri</i> kommer av tre latinska ord <i>regula de tribus</i> 'regeln om de tre'.
jämför	<i>proportionalitet</i> s. 98, <i>räknesätt</i> s. 23

## 3.2. Tal och talsystem

### absolutbelopp

definition	(av ett reellt eller komplext tal) talets avstånd till origo
kommentar	Absolutbeloppet av $x$ skrivs $ x $ . Absolutbeloppet av det komplexa talet $z = x + iy$ , där $x$ och $y$ är reella, $ z  =  x + iy $ , är lika med den icke-negativa kvadratroten ur $x^2 + y^2$ .
exempel	Absolutbeloppet av 4 och $-4$ är 4; absolutbeloppet av $3 + 4i$ är 5.

### algebraiskt tal

definition	tal som är rot till en algebraisk ekvation med heltalskoefficienter
------------	---

- kommentar Talen  $i$  och  $\sqrt{3}$  är algebraiska. Talen  $e$  och  $\pi$  är icke-algebraiska, även kallade transcendenta.
- jämför *transcendent* s. 55

### arabiska siffror

- definition Tecknen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
- kommentar Termen *arabiska siffror* är den hävdvunna benämningen i Sverige och används i denna bok trots att den kan leda till missförstånd – i arabisk skrift används en annan utformning av siffrorna. (För att skilja dem åt kan man beskriva dem som arabiska siffror i deras nutida europeiska utformning respektive arabiska siffror i deras nutida arabiska utformning.)
- etymologi Termen *arabiska siffror* förklaras av att det i Indien utvecklade positionssystemet med basen tio förmedlades till Europa av araberna. Den skall förstås som kontrasterande mot *romerska siffror*.
- jämför *arabiska siffror* s. 39, *indoarabiska talsystemet* s. 45, *romerska siffror* s. 52, *siffra* s. 53

### aritmetiskt medelvärde

- definition (av ändligt många tal) summan av talen dividerad med deras antal
- kommentar Definitionen innebär i formler att det aritmetiska medelvärdet av  $n$  tal  $x_1, \dots, x_n$  är

$$A(x_1, \dots, x_n) = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j.$$

Om det står klart av sammanhanget att just det aritmetiska medelvärdet avses, så kan man säga *medelvärde*.

I statistiken betecknas det aritmetiska medelvärdet av talen  $x_1, \dots, x_n$  ofta med  $\bar{x}$ . Vid beräkningen av medelvärdet av ett klassindelad material räknar man som om alla observationer i en klass låg i klassmitten om man inte har tillgång till de enskilda observationsvärdena. Det aritmetiska medelvärdet är ett lägesmått och ger en skattning av en sannolikhetsfördelnings väntevärde.

För positiva tal gäller att det harmoniska medelvärdet är mindre än eller lika med det geometriska, som i sin tur är mindre än eller lika med det aritmetiska.

- exempel De fyra talen 456, 434, 412, 433 har det aritmetiska medelvärdet 433,75, det geometriska medelvärdet  $\approx 433,47$  och det harmoniska medelvärdet  $\approx 433,19$ .

Det aritmetiska, geometriska och harmoniska medelvärdet av talen  $x$  och  $1 - x$ , där  $x \in [0, 1]$ , är i tur och ordning

$$A(x) = \frac{1}{2}, \quad G(x) = \sqrt{x - x^2} \geq 0 \quad \text{och} \quad H(x) = 2(x - x^2) \geq 0;$$

en konstant, en funktion som beskriver en halvcirkel respektive en parabelbåge. Man ser att  $H(x) \leq G(x) \leq A(x)$  med likhet då  $x = \frac{1}{2}$ .

jämför *geometriskt medelvärde* s. 43, *harmoniskt medelvärde* s. 44, *väntevärde* s. 271, *lägesmått* s. 278

### bas<sub>3</sub>

definition  $\langle$ i ett positionssystem $\rangle$  basen<sub>2</sub> för de heltalspotenser multiplicerade med heltal som adderade används för att ange alla andra tal i systemet

kommentar Det vanliga talsystemet (decimalsystemet) är ett positionssystem med basen 10. Det antal siffror som kan förekomma i en position är lika med basen.

exempel Talet 327 kan skrivas  $3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$  med basen 10 (de tio siffrorna 0, 1, ..., 9 kan förekomma framför potenserna) men även  $1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$  med basen 2 (endast de två siffrorna 0 och 1 kan förekomma före potenserna).

jämför *positionssystem* s. 50, *bas<sub>2</sub>* s. 63

### biljon

synonym **billion**

definition 1 000 000 000 000 (en miljon miljoner)

kommentar Som tiopotens skrivs biljon  $10^{12}$ . I amerikansk engelska, och numera oftast även i brittisk engelska, betecknar *billion* en miljard, d.v.s.  $10^9$ .

etymologi Ordet *biljon* är bildat av latinets *bi-* 'två-' och *-ljon* hämtat från *miljon*. Ordet förefaller ha bildats i franskan (*billion*).

jämför *miljard* s. 47, *miljon* s. 48, *triljon* s. 56

### binära talsystemet

synonym **tvåsystemet, dyadiska systemet**

definition det positionssystem som har basen 2

kommentar Ett tal som är skrivet i det binära talsystemet kallas ofta ett *binärt tal* och består vanligen av siffrorna 0 och 1. Binära tal används t.ex. i datorer.

exempel Det binära talet 110 utläses "ett ett noll" och är lika med  $1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 4 + 2 + 0 = 6$  i decimalsystemet.

etymologi *Binär* kommer från latinets *binarius* 'som består av två'. *Dyadisk* kommer av grekiska *dyás* 'talet två'.

jämför *bas<sub>3</sub>* s. 40, *decimalsystemet* s. 41, *positionssystem* s. 50

### brutet tal

definition rationellt tal som inte är ett heltal

kommentar Termen är numera mindre bruklig.

etymologi Se *bråk*.

### bråk

definition uttryck av formen  $a/b$  eller  $\frac{a}{b}$ .



kommentar I uttrycket  $a/b$  kallas  $a$  *täljare* och  $b$  *nämnare*. Bråken  $2/5$  och  $40/100$  är olika bråk, men representerar samma tal. Ett tal uttryckt som ett bråk sägs vara i **bråkform**.

Tidigare talade man om **egentliga bråk** (täljaren mindre än nämnaren, t. ex.  $2/5$ ) och **oegentliga bråk** (täljaren lika stor som nämnaren eller större än den, t. ex.  $9/9$  och  $13/2$ ), som gemensamt kallades **allmänna bråk**. Dessutom kallades tal i decimalform för **decimalbråk**, t. ex.  $1,16$  och  $3,141\ 592\ 65\dots$  (oändligt decimalbråk).

etymologi *Bråk* kommer från det lågtyska ordet *brok* 'brytning, brott', ett översättningslån från latinets *fractio*, taget från arabiskans *kasr* 'brytning, brott', översatt från sanskritens *bhinna* 'bruten'.

jämför *rationellt tal* s. 51

## bråkdel<sub>1</sub>

definition reellt tal minus dess heltalsdel

kommentar Bråkdel<sub>1</sub> är alltid icke-negativ och mindre än 1. En beteckning för bråkdel är  $\text{frac}(x)$ ; varje reellt tal  $x$  kan skrivas  $x = \lfloor x \rfloor + \text{frac}(x)$ . Funktionen  $x \mapsto \text{frac}(x)$  är periodisk med perioden 1.

Gauss föreslog att termen *mantissa* skulle användas för detta begrepp.

Termen **decimaldel** förekommer ibland i en besläktad betydelse, nämligen om de siffror som följer efter decimaltecknet.

exempel Bråkdel<sub>1</sub> av  $15,6$  är  $0,6$ , av  $-4,3$  är den  $0,7$  och av  $-3\frac{1}{7}$  är den  $\frac{6}{7}$ .

Bråkdel<sub>1</sub> av  $2$ , liksom av  $-2$ , är  $0$ .

jämför *bråk* s. 40, *heltalsdel* s. 44, *mantissa* s. 66, *tal i blandad form* s. 54

## decimal

definition siffra till höger om decimaltecknet i ett tal i decimalform

kommentar Den första decimalen anger antalet tiondelar, den andra antalet hundradelar, den tredje antalet tusendelar o.s.v.

exempel I talet  $42,73$ , som är skrivet i decimalform, är siffran  $7$  den första decimalen och siffran  $3$  den andra decimalen.

etymologi *Decimal* kommer från latinets *decimus* 'tionde'.

jämför *decimaltecken* s. 41, *tal i decimalform* s. 54

## decimalsystemet

synonym **tiosystemet**

definition det positionssystem som har basen 10

kommentar Decimalsystemet är det talsystem som oftast används i Sverige.

jämför *bas<sub>3</sub>* s. 40, *binära talsystemet* s. 40, *positionssystem* s. 50, *tal i decimalform* s. 54

## decimaltecken

definition tecken som skiljer siffror som betecknar heltal från dem som betecknar tiondelar i ett tal i decimalform

**kommentar** I Sverige används komma (ibland benämnt *decimalkomma*) som decimaltecken. I internationell standard (ISO 31-0:1992) rekommenderas komma som decimaltecken, men i engelskspråkig text, på miniräknare och i en del datorprogram förekommer i stället ofta punkt.

**jämför** *decimalsystemet* s. 41

## decimalutveckling

**definition** representation av ett tal som tal i decimalform

**kommentar** Decimalutvecklingen kan vara ändlig eller oändlig. I det senare fallet kan den antingen vara periodisk från någon viss siffra eller icke-periodisk. De rationella talen är precis de som har periodisk decimalutveckling (för dem med ändlig decimalutveckling kan man tillfoga nollor på slutet så att de blir periodiska).

**exempel**  $1/4 = 0,25$  (ändlig decimalutveckling),  
 $4/7 = 0,571\ 428\ 571\ 428\ \dots$  (oändlig och periodisk decimalutveckling med perioden 571 428),  
 $\pi = 3,141\ 592\ 653\ 589\ 793\ \dots$  (oändlig och icke-periodisk decimalutveckling).

**jämför** *tal i decimalform* s. 54

## dubbelbråk

**definition** bråk i vilket täljare eller nämnare i sin tur utgörs av bråk

**kommentar** Det bråkstreck som skiljer dubbelbråkets täljare och nämnare kallas *huvudbråkstreck*, och bör vara längre än de övriga och, om det skrivs horisontellt, sättas på samma höjd som likhetstecknen. Man kan kombinera vågräta och sneda bråkstreck.

**exempel**

$$\frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{7}} = \frac{5/8}{3/7} = (5/8)/(3/7) = \frac{5}{8} \bigg/ \frac{3}{7}.$$

## förkorta bråk

**definition** dividera både täljare och nämnare med en gemensam delare

**kommentar** Ett bråk som inte går att förkorta sägs vara skrivet i *enklaste bråkform*.

**jämför** *förlänga bråk* s. 42

## förlänga bråk

**definition** multiplicera både täljare och nämnare med samma tal eller uttryck

**jämför** *förkorta bråk* s. 42

## gemensam nämnare

**definition** heltal eller polynom som är delbart med samtliga nämnare i två eller flera bråk

**kommentar** För att kunna addera bråk måste man ofta finna en gemensam nämnare. Bland de positiva gemensamma nämnarna finns en minsta, kallad *minsta gemensamma nämnaren* (*MGN*).

- exempel Både 80 och 120 är gemensamma nämnare till  $3/5$ ,  $5/8$  och  $1/2$ . Den minsta gemensamma nämnaren är 40.
- jämför *bråk* s. 40, *gemensam multipel* s. 28, *nämnare* s. 49

### geometriskt medelvärde

- definition (av ett ändligt antal icke-negativa tal) talens produkt upphöjd till ett genom deras antal
- kommentar Definitionen innebär att det geometriska medelvärdet av  $n$  icke-negativa tal  $x_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , är

$$G(x_1, \dots, x_n) = (x_1 x_2 \cdots x_n)^{1/n} = \left( \prod_{j=1}^n x_j \right)^{1/n}.$$

Det geometriska medelvärdet av icke-negativa tal är alltid mindre än eller lika med det aritmetiska medelvärdet. Inom statistiken används det för att ge stora observationer en mindre vikt.

- exempel I en rätvinklig triangel delar höjden mot hypotenusan denna i två sträckor vilkas längder har höjden som geometriskt medelvärde. Det aritmetiska medelvärdet är lika med halva hypotenusan.
- etymologi Epitetet *geometrisk* kan kanske förstås av iakttagelsen att en kvadrat med samma area som en given rektangel har sidlängden lika med det geometriska medelvärdet av rektangelsidornas längder. Sidlängdernas geometriska medelvärde är alltså relevant för areaberäkningar; deras aritmetiska medelvärde för beräkning av omkretsen.
- jämför *aritmetiskt medelvärde* s. 39, *harmoniskt medelvärde* s. 44

### glidande medelvärde

- definition (av en följd) aritmetiskt medelvärde bildat ur ett visst antal omgivande element i följen
- kommentar Ett glidande medelvärde bildas över ett antal tal som successivt förskjuts, nämligen så att medelvärdet för ett visst argument tar hänsyn till värden vilkas argument skiljer sig med fixa tal från det givna argumentet. Detta kan uttryckas så att det glidande medelvärdet är en faltningsprodukt av följen och en följd som är noll utanför en ganska liten mängd.
- Ett glidande medelvärde kan vara viktat.

- exempel Om man vill visa temperaturförändringar över en längre tid kan man bilda medelvärdet under en vecka med centrum i en aktuell dag. Syftet är att jämnna ut variationen från dag till dag och därigenom tydligare visa långsammare förändringar.

Vi definierar  $g(j) = 1/7$  för  $j = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$  och  $g(j) = 0$  för alla andra heltal  $j$ . Om då  $T(j)$  är medeltemperaturen under dag  $j$ , så är faltningsprodukten

$$(T * g)(k) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} T(j)g(k - j), \quad k \in \mathbf{Z},$$

den veckovis utjämnade temperaturen.



exempel Heltalsdelen av 15,6 är 15, av  $-4,3$  är den  $-5$ . Heltalsdelen av 2 är 2.

## icke-reell

synonym **imaginär**  
 definition  $\langle$ om ett komplext tal $\rangle$  med imaginärdel skild från 0  
 kommentar Talet 0 är reellt, och således inte imaginärt.  
 historia Termen *imaginärt tal* infördes av Descartes 1637.  
 etymologi Adjektivet *imaginär* kommer av franskans *imaginaire* 'inbillad', av *imaginer* 'att föreställa sig, att inbilla sig'; jämför latinets *imaginarius* 'skenbar', avlett av *imago* 'bild, skenbild'.  
 jämför *imaginärdel* s. 45, *reellt tal* s. 52, *rent imaginär* s. 52

## imaginärdel

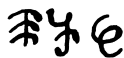
synonym **imaginär del**  
 definition talet  $y$  i ett komplext tal  $x + iy$ , där  $x$  och  $y$  är reella  
 kommentar Imaginärdelen för ett komplext tal  $z$  betecknas  $\text{Im } z$ . Den är alltid reell. Man har  $\text{Im}(iz) = \text{Re } z$  och  $\text{Re}(iz) = -\text{Im } z$ .  
 jämför *komplext tal* s. 47, *realdel* s. 52

## imaginär enhet

definition ett av de två tal vilkas kvadrat är lika med  $-1$   
 kommentar Det tal man väljer som imaginär enhet betecknas  $i$  (ibland  $j$  eller  $i$ ). Det andra talet med samma kvadrat blir då  $-i$ .  
 historia Beteckningen  $i$  för  $\sqrt{-1}$  infördes 1777 av Euler i en skrift som trycktes 1794, elva år efter hans död.  
 jämför *komplext tal* s. 47

## indoarabiska talsystemet

definition det positionssystem med basen tio som utvecklats i Indien  
 kommentar Det indoarabiska talsystemet är det talsystem som nu blivit det vanligaste.



Den första kända inskriptionen där det indoarabiska talsystemet används. Den är från slutet av 500-talet e. Kr. Talet är 346 (läses från vänster).

historia Det indoarabiska talsystemet utvecklades i Indien. En tidig föregångare var de så kallade brahmi-siffrorna, som är belagda från 200-talet f. Kr. De representerade dock inte ett positionssystem – användningen av siffrorna i ett sådant kom senare. Den äldsta inskriptionen där siffrorna används i ett positionssystem är från slutet av 500-talet e. Kr.; se figuren.

Omkring år 800 introducerades bruket av de indiska siffrorna i Bagdad. Matematiker som al-Khwārizmī, al-Uqlīdisī och många andra spred med sina arbeten bruket av talsystemet.

I Europa blev siffrorna kända mot slutet av 900-talet, då Gerbert av Aurillac använde siffrorna ett till nio som talnamn på brickorna på en abakus. Under 1100-talet spreds kunskapen om räkning med de nya siffrorna genom översättningar och bearbetningar av arabiska arbeten. I början av 1200-talet introducerade Leonardo av Pisa, känd som Fibonacci, talsystemet i ett stort arbete *Liber abbaci* 'Boken om räknekonsten', som även behandlade mer praktiskt tillämpade beräkningar.

jämför *positionssystem* s. 50, *arabiska siffror* s. 39, *romerska siffror* s. 52, *siffra* s. 53

## inverterat tal

definition  $\langle$ till ett givet tal $\rangle$  det tal som multiplicerat med det givna talet ger 1

exempel Det inverterade talet till 3 är  $1/3$  och till  $2/9$  är det  $9/2$ .

Det inverterade talet till  $\sqrt{3}$  är  $1/\sqrt{3} = \sqrt{3}/3$ .

Noll saknar inverterat tal.

## irrationellt tal

definition reellt tal som inte är rationellt

kommentar Ett irrationellt tal har en icke-periodisk decimalutveckling.

exempel  $\sqrt{2}$ ,  $e$ ,  $\pi$ .

historia Upptäckten av existensen av så kallade icke-kommensurabla storheter, d.v.s. storheter som inte har ett rationellt förhållande till varandra, gjordes inom grekisk matematik under 400-talet f. Kr. Det tidigaste exemplet var diagonalen i en kvadrat jämfört med kvadratsidans sida (där förhållandet är  $\sqrt{2}$ ). Detta exempel kan ha sitt ursprung i den pythagoreiska skolan, vars filosofiska och matematiska verksamhet omges av många legender.

etymologi Adjektivet *irrationell* kommer från det latinska *irrationalis* 'oförnuftig, oskälig', troligen en översättning av det grekiska *álogos* 'oförnuftig, orimlig'.

jämför *rationellt tal* s. 51, *reellt tal* s. 52

## jämmt tal

definition heltal som är delbart med 2

kommentar Jämna tal skrivna i tiosystemet slutar på 0, 2, 4, 6 eller 8.

jämför *udda tal* s. 56

## komplexa talplanet

synonym **wesselska talplanet**, **Argands diagram**, **gaussiska talplanet**

definition plan där varje komplext tal motsvaras av en punkt

kommentar Vanligen väljs koordinaterna i planet så att talet 1 får koordinaterna  $(1, 0)$  och den imaginära enheten  $i$  koordinaterna  $(0, 1)$ .

- exempel En cirkel med medelpunkt i det komplexa talet  $c$  och radien  $r$  får ekvationen  $|z - c| = r$ .
- etymologi De nämnda synonymerna är uppkallade efter Caspar Wessel (1745–1818), Jean Robert Argand (1768–1822) och Johann Carl Friedrich Gauss (Gauß) (1777–1855), som publicerade sina resultat år 1799, 1806 respektive 1831. Wessels skrift uppmärksammades emellertid inte förrän 1895.

## komplext konjugat

- synonym **konjugat, konjugerat komplext tal**
- definition (till ett givet komplext tal) det komplexa talet med samma realdel men motsatt imaginärdel
- kommentar Om  $z = x + iy$ , där  $x$  och  $y$  är reella, så är det komplexa konjugatet  $x - iy$ . Det betecknas  $\bar{z}$  eller  $z^*$  (uttalas "z-konjugat").
- exempel Det till  $5 - 7i$  konjugerade talet är  $5 + 7i$ .
- etymologi *Konjugat* kommer från latinets *coniugatus* 'sammanbunden, förenad', particip av verbet *coniugare* 'att förena'; jämför *iugum* 'ok'.
- jämför *komplext tal* s. 47, *realdel* s. 52, *imaginärdel* s. 45, *konjugatregeln* s. 92

## komplext tal

- definition tal av formen  $x + iy$  där  $x$  och  $y$  är reella tal och  $i$  är den imaginära enheten
- kommentar Mängden av alla komplexa tal betecknas vanligen  $\mathbf{C}$ . Talet  $x$  kallas *realdelen* och  $y$  *imaginärdelen* av det komplexa talet  $z = x + iy$  om  $x$  och  $y$  är reella.  
Ett komplext tal  $z = x + iy$  kan också skrivas  $z = r(\cos t + i \sin t)$ , där  $r$  är absolutbeloppet av  $z$  och  $t$  ett av argumenten för  $z$ . Vi säger då att  $z$  är skrivet i ***polär form***.
- etymologi Adjektivet *komplex* kommer från latinets *complexus* 'sammansatt', av *com-* 'med-' och *plektare* 'att fläta'.
- jämför *realdel* s. 52, *imaginärdel* s. 45, *absolutbelopp* s. 38, *argument<sub>2</sub>* s. 192

## liknämninga bråk

- definition två eller flera bråk som har samma nämnare
- exempel  $1/3$  och  $2/3$ ;  $6/a$  och  $2b/a$ .

## Mersennetal

- definition tal av formen  $2^n - 1$  för något naturligt tal  $n$
- kommentar Vissa Mersennetal är primtal; de kallas ***Mersenneprimtal***. För att ett Mersennetal  $2^n - 1$  skall vara prima är det nödvändigt att  $n$  är prima. Men det är inte tillräckligt, eftersom  $2^{11} - 1 = 23 \times 89$ .
- etymologi Mersennetalen är uppkallade efter Marin Mersenne (1588–1648).

## miljard

- synonym **milliard**

definition	1 000 000 000 (ett tusen miljoner)
kommentar	Miljard förkortas ibland md och motsvarar prefixet G (giga). Som tiopotens skrivs talet $10^9$ .
exempel	1 mdkr = 1GSEK = $10^9$ kronor.
etymologi	<i>Miljard</i> (belagt från 1544) är bildat av <i>miljon</i> genom suffixbyte (den sista stavelsen utbytt mot det romanska substantivbildande suffixet <i>-ard</i> ).
jämför	<i>miljon</i> s. 48, <i>biljon</i> s. 40, <i>triljon</i> s. 56, <i>multipelprefix</i> s. 81

## miljon

synonym	<b>million</b>
definition	1 000 000
kommentar	Miljon motsvarar prefixet M (mega). Som tiopotens skrivs det $10^6$ . Ibland ser man beteckningen "mkr" för miljon kronor, men det är bättre att skriva Mkr eller MSEK, eftersom 10 millikronor = 10 tusendels kronor = 1 öre.
exempel	1 Mhz = $10^6$ hertz.
historia	Talet 1 000 000 benämndes tidigare "tusen tusen". På 1300-talet infördes ordet <i>million</i> . Treviso-aritmetiken (1478) har <i>Milione</i> . I den första läroboken som tryckts på svenska, Aurelius' <i>Arithmetica</i> (1614), används "tusende gånger tusend", medan "millioner" omnämns som "Italianers och Frantzosers wijs". Den gamla benämningen användes ännu under 1700-talet. I t. ex. Anders Celsius' <i>Arithmetica</i> (1727) skrivs <i>million</i> (även <i>billion</i> och <i>trillion</i> ) medan det i Johan Bergmarcks <i>Swensk Räkne-Bok</i> (1755) skrivs "tusende gånger tusende".
etymologi	<i>Miljon</i> är bildat av latinets <i>mille</i> 'tusen' och det romanska förstoringssuffixet <i>-one</i> 'stor'.
jämför	<i>miljard</i> s. 47, <i>biljon</i> s. 40, <i>triljon</i> s. 56, <i>multipelprefix</i> s. 81

## de Moivres formel

definition	den formel som säger att $(\cos s + i \sin s)(\cos t + i \sin t) = \cos(s + t) + i \sin(s + t)$ .
kommentar	Med exponentialfunktionen blir formeln enklare: $e^{is}e^{it} = e^{i(s+t)}$ .
etymologi	Formeln är uppkallad efter Abraham de Moivre (1667–1754).

## motsatt tal

definition	(till ett givet tal) det tal som adderat till det givna talet ger 0
kommentar	Det motsatta talet till $a$ betecknas $-a$ . Det löser ekvationen $x + a = 0$ ; alltså $x = 0 - a = -a$ . Motsatta reella tal ligger på samma avstånd från origo på tallinjen, fast på var sin sida. Det motsatta talet till 0 är 0.
exempel	Motsatt tal till $-4$ är $4$ , till $7$ är det $-7$ , och till $i$ är det $-i$ .



## naturligt tal

synonym	<b>grundtal</b>
definition	ett av talen 0, 1, 2, 3, 4, ...
kommentar	Varje naturligt tal är antalet element i någon ändlig mängd. Mängden av naturliga tal betecknas $\mathbf{N}$ . Vi har alltså $0 \in \mathbf{N}$ . Ibland räknas inte 0 till de naturliga talen. Mängden av de positiva heltalen bör inte betecknas $\mathbf{N}$ utan $\mathbf{N}^*$ eller $\tilde{\mathbf{N}} = \mathbf{N} \setminus \{0\}$ .
historia	I Euklides' verk <i>Stoikheía</i> (i latinsk översättning <i>Elementa</i> ) 'Grundbegreppen' definieras ett tal som en mångfald sammansatt av enheter; ett är då inte ett tal. Uppfattningen att enheten, ett, också är ett tal växte gradvis fram först under medeltiden. Att följderna 1, 2, 3, ... är en naturlig följd av tal finner man redan hos Nikomakhos av Gerasa omkring 100 e.Kr. Ur detta har senare termen <i>naturligt tal</i> växt fram. John Wallis (1657) menade att noll är ett tal.
jämför	<i>antal</i> s. 11, <i>heltal</i> s. 44, <i>ordningstal</i> s. 60

## negativt tal

definition	reellt tal som är mindre än 0
historia	Räkneregler för negativa koefficienter i ekvationer användes i Kina redan under det första århundradet e.Kr., då man löste system av ekvationer med flera obekanta genom manipulationer med räknestavar. I grekisk matematik formulerades regler för negativa uttryck även för multiplikation och division av Diophantos (troligen 200-talet e. Kr.). De negativa uttrycken uppkom som underskott i de algebraiska manipulationerna, men under lång tid förekom bara positiva tal som lösningar till ekvationer. Under 1500-talet och 1600-talet i Europa framkom negativa lösningar i de algebraiska formlerna, men de betraktades då som fiktiva, absurda eller falska. Genom införandet av logaritmer i början av 1600-talet kom negativa tal att spela en ny roll. Under senare delen av 1600-talet tolkade Wallis addition och subtraktion som förflyttningar längs en tallinje, och den tolkningen innefattade på ett naturligt sätt även negativa tal.
etymologi	<i>Negativ</i> kommer från latinets <i>negativus</i> 'förnekande'.

## nämnare

definition	uttrycket $b$ i ett bråk $a/b$
etymologi	<i>Nämnare</i> har kommit in i svenskan via tyskans <i>Nenner</i> , som i sin tur återger latinets <i>denominator</i> 'den som benämner, den som ger namn åt'.
jämför	<i>bråk</i> s. 40, <i>täljare</i> s. 56

## palindromtal

definition	tal som, skrivet i ett visst talsystem, blir lika stort när det läses baklänges
exempel	Talet 212 i decimalsystemet. Talet 10101 i det binära talsystemet. Talet XIX i det romerska talsystemet. Varje kvadrattal $x^2$ , $x \geq 3$ , är ett palindromtal om det skrivs i basen $b = x - 1$ , ty $x^2 = 1 \cdot b^2 + 2 \cdot b^1 + 1 \cdot b^0$ . Oftast syftar man dock på basen 10.
etymologi	<i>Palindrom</i> kommer av två grekiska ord, <i>pálin</i> 'tillbaka' och <i>drómos</i> 'lopp'.

## perfekt tal

synonym	<b>fullkomligt tal</b>
definition	naturligt tal som är lika med summan av alla sina delare, inklusive 1 men exklusive talet självt
exempel	$6 = 1 + 2 + 3$ , $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$ .
historia	De forntida grekiska matematikerna fann fyra perfekta tal: 6, 28, 496 och 8128. Nu (2008) känner man till 44 stycken, och för varje nytt Mersenneprimtal ( $2^p - 1$ , $p$ ett primtal) man finner, så finner man också ett nytt perfekt tal, nämligen $2^{p-1}(2^p - 1)$ (ett bevis finns i Euklides' <i>Stoikheía</i> (i latinsk översättning <i>Elementa</i> ) 'Grundbegreppen'). Man vet fortfarande inte om det finns udda perfekta tal, inte heller om det finns oändligt många.

## pi, $\pi$

definition	kvoten <sub>1</sub> mellan en godtycklig cirkels omkrets och dess diameter
kommentar	Talet är irrationellt och till och med transcendent. Dess decimalutveckling börjar med 3,141 592 653 589 793.
historia	Bokstaven $\pi$ som symbol för talet $\pi$ förekom första gången år 1706.
etymologi	Bokstaven $\pi$ är den första bokstaven i det grekiska ordet <i>perímetron</i> 'omkrets', sammansatt av <i>perí</i> 'omkring' och <i>métron</i> 'mått'.

## platsvärde

definition	(i positionssystem) värde hos en plats i representationen av ett tal
kommentar	Platsvärdena är heltalspotenser av systemets bas.
exempel	I talet 234,56 står 2 på platsen med platsvärdet hundra, 3 på platsen med platsvärdet tio och 6 på platsen med platsvärdet en hundradel.
jämför	<i>bas</i> <sub>3</sub> s. 40, <i>positionssystem</i> s. 50

## positionssystem

definition	talsystem där en siffras värde beror av dess plats (position) i representationen av ett tal
------------	---

kommentar	I ett positionssystem har den siffra som står längst till vänster det högsta värdet och den siffra som står längst till höger det lägsta värdet.
exempel	Decimalsystemet och det binära talsystemet är exempel på positionssystem. Det romerska talsystemet är däremot inte ett positionssystem.
historia	Det finns positionssystem som är äldre än det nu använda med tio som bas, t. ex. det babyloniska sexagesimala systemet med 60 som bas och mayafolkets vigesimala med 20 som bas.
jämför	<i>bas</i> <sub>3</sub> s. 40, <i>platsvärde</i> s. 50, <i>indoarabiska talsystemet</i> s. 45

## positivt tal

definition	reellt tal som är större än noll
------------	----------------------------------

## primtal

synonym	<b>prima tal</b>
---------	------------------

definition	naturligt tal större än 1 som är delbart bara med 1 och sig självt
------------	--

kommentar	Ibland kallas även $-2, -3, \dots$ för primtal.
-----------	---

Det finns oändligt många primtal. Det är även känt att summan  $\sum(1/p_j)$  av de inverterade värdena av alla primtal divergerar, vilket är en precisering av påståendet. Men summan av de inverterade värdena av alla kända primtal är ungefär 3.

exempel	De fem första primtalen är 2, 3, 5, 7 och 11.
---------	---

Det största kända primtalet, funnet 2008-08-23, är  $2^{43\,112\,609} - 1$ , ett tal som skrivs med 12 978 189 siffror i tiosystemet. Det är ett Mersenneprimtal.

Talet  $10^{100} + 267$  (googol plus 267) är troligen ett primtal (2008). Inget av talen  $10^{100} + k$ ,  $k = 0, \dots, 266$  är primtal.

historia	Aristoteles (384–322 f. Kr.) påstod korrekt att 2 var det enda primtalet bland de jämna talen.
----------	--

etymologi	Ordet <i>primtal</i> har sitt ursprung i latinets <i>primus</i> 'den första' och går tillbaka till Aristoteles, som kallade ett sådant tal för <i>första tal</i> , på grekiska <i>prótos arithmós</i> 'första talet'.
-----------	---

jämför	<i>sammansatt tal</i> s. 53
--------	-----------------------------

## rationellt tal

definition	tal som är en kvot <sub>1</sub> av två heltal, varav det andra inte är noll
------------	---

kommentar	Ett rationellt tal har en periodisk decimalutveckling. Mängden av rationella tal betecknas vanligen $\mathbf{Q}$ .
-----------	--

exempel	7, $-9$ , $1/3$ och $0,5$ , men inte $\sqrt{2}$ .
---------	---

etymologi	Adjektivet <i>rationell</i> kommer från latinets <i>rationalis</i> , av <i>ratio</i> 'förnuft', troligen en översättning av det grekiska <i>lógos</i> , som bland annat betyder 'lära, förnuft, världsordning'. Anledningen var att världen ansågs vara förnuftig, vilket bland annat betydde att storheter hade ett rationellt förhållande.
-----------	--

jämför *irrationellt tal* s. 46, *reellt tal* s. 52

## realdel

definition talet  $x$  i det komplexa talet  $x + iy$ , där  $x$  och  $y$  är reella

kommentar Realdelen av ett komplext tal  $z$  betecknas  $\operatorname{Re} z$ .

jämför *imaginärdel* s. 45, *komplext tal* s. 47

## reellt tal

definition tal som kan approximeras godtyckligt noga med rationella tal

kommentar Varje reellt tal kan representeras av en oändlig decimalutveckling. Ändliga decimalutvecklingar approximerar talet med godtycklig noggrannhet. De reella talen kan representeras på en rät linje.

Ett reellt tal är ett komplext tal vars imaginärdel är noll.

Mängden av reella tal betecknas vanligen  $\mathbf{R}$  och är unionen av de rationella talen och de irrationella talen.

exempel 5, 8, 14,  $-25$ ,  $1/3$  och  $\pi$ , men inte  $i$ .

historia Begreppet reellt tal infördes av Descartes 1637.

etymologi Adjektivet *reell* kommer från franskans *réel* 'verklig, faktisk' och går tillbaka på det medeltidslatinska adjektivet *realis*, en avledning av substantivet *res* 'ting, objekt'.

jämför *icke-reell* s. 45

## relativt prima

definition (om två heltal) sådana att den största gemensamma faktorn är 1

exempel Talen 527 och 551 är relativt prima, eftersom det första har primtalsfaktorererna 17 och 31 och inga andra, det andra 19 och 29 och inga andra.

## rent imaginär

definition med realdel 0

kommentar Talen 0,  $i$  och  $-4i$  är rent imaginära.

jämför *realdel* s. 52, *imaginär* s. 45

## romerska siffror

definition bokstäverna I, V, X, L, C, D och M samt motsvarande gemena när de används för att beteckna tal

kommentar Bokstävernans talvärden är: I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500 och M = 1 000.

Man använder en additionsprincip: tal skrivna i avtagande ordning adderas: XVII = 10 + 5 + 1 + 1 = 17. Oftast, men inte alltid, följer man regeln att högst tre bokstäver av samma slag får användas i följd.

Ibland används också en subtraktionsprincip, innebärande att ett tal räknas negativt om det står före ett större tal: IV =  $-1 + 5 = 4$ .

Dock får skillnaden mellan de två bokstävernas värden vid subtraktion inte vara alltför stor: 1 999 skrivs

$$\text{MCMXCIX} = 1\,000 + (-100 + 1\,000) + (-10 + 100) + (-1 + 10)$$

(inte IMM =  $(-1 + 1\,000) + 1\,000$  eller MIM =  $1\,000 + (-1 + 1\,000)$ ).

exempel

VIII =  $5 + 1 + 1 + 1 = 8$  (ibland IIX =  $-1 - 1 + 10 = 8$ ); XII =  $10 + 1 + 1 = 12$ ; CM =  $-100 + 1\,000 = 900$  (inte DCCCC =  $500 + 100 + 100 + 100 + 100$ ); MMIX =  $1\,000 + 1\,000 + (-1 + 10) = 2\,009$ .

Andra skrivsätt har dock förekommit: ingång 49 till Colosseum i Rom markeras med XLVIII =  $(-10 + 50) + 5 + 1 + 1 + 1 + 1$  (inte med någon annan teoretiskt tänkbar subtraktion som IL =  $-1 + 50$  eller XLIX =  $(-10 + 50) + (-1 + 10)$ ). Årtalet 1594 skrivs MDLXXXIII =  $1\,000 + 500 + 50 + 10 + 10 + 10 + 10 + 1 + 1 + 1 + 1$  på en staty av Cósimo Medici i Florens (alltså helt utan subtraktion).

historia

De romerska siffrorna började användas av romarna under det tredje århundradet f. Kr.

Subtraktionsprincipen användes av babylonerna två tusen år före etruskerna, från vilka romarna sedan övertog bruket. Som vi sett av exemplen användes den inte konsekvent. (Den kvarlever i vanan att säga "halv fem" och "kvart i fem" för 16:30 och 16:45.)

etymologi

Det har hävdats att V kommer av en bild av en hand, X av två händer, L från den grekiska bokstaven X (Khi), C från den grekiska bokstaven Θ (Theta; tolkas nu naturligen som från *centum* 'hundra'), M från den grekiska bokstaven Φ (Phi; tolkas nu som från *mille* 'tusen'), D från den högra halvan av Φ, alltså hälften av tecknet för tusen.

jämför

*indoarabiska talsystemet* s. 45

## sammansatt tal

definition heltal som är en produkt av två heltal skilda från 1 och  $-1$

exempel  $10 = 2 \cdot 5$

jämför *primtal* s. 51

## siffra

definition tecken som representerar ett naturligt tal

kommentar Man bör skilja mellan en siffra och det tal som den representerar. Tal kan också anges med hjälp av andra tecken än siffror, t. ex.  $\pi$ .

•, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

•, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Två varianter av siffrorna 0, 1, 2, ..., 9 i den form de används på arabiska, persiska, kurdiska och urdu, så kallade indiska siffror.

etymologi Ordet *siffra* har kommit in i svenskan via tyskans *Ziffer*. Dess ursprungliga betydelse i arabiskan är 'tom, noll'.

jämför *arabiska siffror* s. 39, *romerska siffror* s. 52, *tal* s. 54

## signifikant siffra

synonym	<b>gällande siffra, värdesiffra</b>
definition	siffra som i någon mening är säker
kommentar	Inledande nollor räknas inte som signifikanta siffror. I ett heltal som avslutas med nollor kan man inte vara säker på hur många siffror som är signifikanta. Ett sätt att ange antalet signifikanta siffror för ett sådant tal är att skriva det i grundpotensform.
exempel	I talet 0,004 är endast siffran 4 signifikant. I talet 500,0 är alla siffror signifikanta. Om man skriver $5 \cdot 10^2$ eller $5,0 \cdot 10^2$ så vet man att en respektive två siffror är signifikanta, i motsats till om talet skrivs 500.
etymologi	<i>Signifikant</i> kommer från latinets <i>significans</i> 'betecknande, betydelsefull', av verbet <i>significare</i> 'att betyda', egentligen 'att ge tecken'.
jämför	<i>decimalsystemet</i> s. 41

## stambråk

synonym	<b>bråkdelt</b>
definition	bråk som har täljaren 1
kommentar	I allmänspråket betyder <i>bråkdelt</i> 'mycket liten del (av någonting)'.
historia	I klassisk egyptisk matematik användes stambråk mycket. Den kända matematiska Rhind-papyrusen inleds med en fördubbling av stambråk. Resultatet uttrycks då alltid med stambråk. Exempelvis blir fördubbling av $1/17$ summan av stambråken med 12, 51 och 68 i nämnaren: $\frac{2}{17} = \frac{1}{12} + \frac{1}{51} + \frac{1}{68}$ .
jämför	<i>bråk</i> s. 40

## tal

definition	grundläggande matematiskt begrepp som i sin enklaste form anger antal eller ordning i en följd
kommentar	Ett tal representeras av en eller flera siffror. Vardagligt används <i>tal</i> även om räkneuppgift.
jämför	<i>naturligt tal</i> s. 49, <i>heltal</i> s. 44, <i>rationellt tal</i> s. 51, <i>reellt tal</i> s. 52, <i>komplex tal</i> s. 47, <i>siffra</i> s. 53

## tal i blandad form

definition	tal som är skrivet som ett heltal och ett tal mindre än 1 uttryckt i bråkform
exempel	Talet $4\frac{7}{13}$ , som är summan (inte produkten) av 4 och $\frac{7}{13}$ , alltså $4\frac{7}{13} = 4 + \frac{7}{13} \neq 4 \cdot \frac{7}{13}$ .

## tal i decimalform

definition	tal skrivet i decimalsystemet
historia	Simon Stevin (1548—1620) uttryckte talen i decimalform 1585. Vid varje decimal symboliserades platsens nummer med en siffra inskriven

i en cirkel. Georg Stiernhielm (1598–1672), ”den svenska skaldekonstens fader”, var den förste svensk som presenterade talen i decimalform (1639). Han symboliserade decimalens plats med en siffra inskriven i en kvadrat.

## tal i flyttalsform

- definition tal på formen  $y \cdot 2^p$  där  $p$  är ett heltal och där  $y$  uppfyller  $1 \leq y < 2$  och är skrivet binärt
- kommentar Man mäter databehandlingskapacitet i antalet **flyttalsoperationer** per sekund, flop/s.
- exempel  $1,10001 \cdot 2^4 = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{32}) \cdot 16 = 24,5$ .  
 $1,01 \cdot 2^9 = (1 + \frac{1}{4}) \cdot 512 = 640$ .  
 $1,11 \cdot 2^{-3} = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4})/8 = \frac{7}{32} = 0,21875$ .
- Världens snabbaste dator fanns i maj 2008 vid Los Alamos National Laboratory. Den hade en databehandlingskapacitet om 1,026 petaflop/s =  $1,026 \cdot 10^{15}$  flop/s. Det var 23 gånger snabbare än den snabbaste datorn vid National Supercomputer Centre vid Linköpings universitet, som då hade en kapacitet om 44,46 teraflop/s.
- etymologi Termen *flop* är en akronym bildad av engelskans *floating-point operation* ’flyttalsoperation’.

## talsystem

- definition system för hur tal anges med hjälp av siffror
- jämför *positionssystem* s. 50, *romerska siffror* s. 52

## transcendent

- definition (om tal) icke-algebraisk
- kommentar Varje transcendent tal är irrationellt.
- exempel Talen  $e$  och  $\pi$ .
- etymologi *Transcendent* kommer från latinets *transcendens* ’överskridande’ av *trans* ’(ut)över’ och *scandere* ’att stiga, att kliva’.
- jämför *algebraiskt tal* s. 38

## triangeltal

- definition tal av formen  $n(n+1)/2$ , där  $n$  är ett positivt heltal
- kommentar En mängd punkter vilkas antal är ett triangeltal kan ordnas i en triangel i planet.
- exempel De första triangeltalen är 1, 3, 6, 10, 15.
- historia Liksom kvadrattal, pentagonaltal och hexagonaltal kan triangeltalen åskådliggöras som fyllda polygoner uppritade med punkter på ett papper eller med stenar i sanden. Pythagoreerna studerade dessa tal på 400-talet f.Kr. och under lång tid senare. De fann samband mellan dessa tal, som att summan av ett triangeltal och det närmast följande är lika med ett kvadrattal (t. ex. är  $6 + 10 = 4^2$ ).



De sex första triangelalen.

jämför *kvadrattal* s. 65

## triljon

definition 1 000 000 000 000 000 000 (en miljon miljoner miljoner)

kommentar Som tiopotens skrivs triljon  $10^{18}$ . I amerikansk engelska betecknar *trillion* en biljon, d.v.s.  $10^{12}$ .

etymologi *Triljon* är bildat av det latinska prefixet *tri-* 'tre-' och *-ljon*, hämtat från termen *miljon* (se *biljon*).

jämför *miljon* s. 48, *miljard* s. 47, *biljon* s. 40, *multiplprefix* s. 81

## täljare

definition uttrycket  $a$  i ett bråk  $a/b$

etymologi *Täljare* är kanske ett lån från tyskans *Zähler*, alltså egentligen 'räknare', men det kan också vara inhemskt: *tälja* betydde inte bara 'förtälja' utan också 'räkna'.

jämför *bråk* s. 40, *nämnare* s. 49

## udda tal

definition heltal som inte är delbart med 2

kommentar Udda tal skrivna i decimalsystemet slutar på 1, 3, 5, 7, eller 9.

jämför *jämnt tal* s. 46

## viktat aritmetiskt medelvärde

synonym **viktat medelvärde**

definition summan av produkterna av varje värde för en variabel och dess vikt<sub>2</sub>, dividerad med summan av vikterna

kommentar Definitionen innebär att det viktade medelvärdet av talen  $x_1, \dots, x_n$  med vikterna  $v_1, \dots, v_n > 0$  är

$$M_v(x_1, \dots, x_n) = \frac{\sum_{j=1}^n v_j x_j}{\sum_{j=1}^n v_j}.$$



Om alla vikterna är lika, så får man det vanliga aritmetiska medelvärdet.

### 3.3. Ordning, likhet och olikhet

#### antisymmetrisk relation

definition	relation $R$ sådan att $xRy$ och $yRx$ gäller endast då $x = y$
kommentar	En ordningsrelation är antisymmetrisk.
exempel	Relationerna $\leq$ och $\geq$ mellan reella tal.
etymologi	De nekande prefixen <i>anti-</i> och <i>a-</i> kommer från den grekiska prepositionen <i>anti</i> 'emot' respektive det grekiska prefixet <i>a-</i> 'o-'. Här har det förstnämnda fått en specifik, icke självklar, roll. Se vidare <i>symmetri</i> .

#### begränsad mängd

definition	(av punkter på linjen, i planet eller i rymden) mängd som är innehållen i ett intervall av ändlig längd, en cirkelskiva respektive ett klot med ändlig radie
kommentar	En mängd av reella tal säges vara <i>uppåt begränsad</i> om det finns ett tal som är större än varje tal i mängden. Den säges vara <i>nedåt begränsad</i> om det finns ett tal som är mindre än varje tal i mängden.
exempel	En ändlig mängd, ett <i>begränsat intervall</i> , till exempel intervallet $[0, 8]$ och en cirkel är alla begränsade mängder. De naturliga talen bildar en nedåt begränsad mängd, som inte är uppåt begränsad.

#### förhållande

synonym	<b>proportion</b>
definition	(mellan två eller flera storheter) relation uttryckt som ett bråk
kommentar	Bråket skrivs traditionellt med kolon i detta fall.
exempel	Om Sara betalar $\frac{2}{3}$ och Lovisa $\frac{1}{3}$ så har de betalat i förhållandet 2:1 ("två till ett"). I en egyptisk triangel har sidorna parvis förhållandena 3:4, 4:5 och 5:3. Detta kan uttryckas kortfattat så att man säger att sidorna förhåller sig som 3:4:5. En staty av en hellenistisk furste på Museo Nazionale Romano i Rom är gjuten i brons med proportionerna koppar:tenn:bly = Cu:Sn:Pb = 89:8:3.
jämför	<i>skala</i> <sub>1</sub> s. 246

#### halvöppet intervall

definition	begränsat intervall där en av ändpunkterna tillhör intervallet och den andra inte
exempel	I intervallet $]3, 8]$ , som består av alla tal som är större än 3 och mindre än eller lika med 8, tillhör ändpunkten 8 men inte ändpunkten 3 intervallet.

jämför *begränsad mängd* s. 57, *intervall* s. 58 (figur finns där), *slutet intervall* s. 60, *öppet intervall* s. 62

## högeromgivning

definition  $\langle$ till en punkt på tallinjen $\rangle$  mängd som innehåller ett slutet intervall med punkten som vänsterändpunkt och med högerändpunkt skild från denna



En högeromgivning till punkten  $a$  och en vänsteromgivning till punkten  $b$ .

jämför *omgivning* s. 183, *vänsteromgivning* s. 61, *ändpunkt* s. 61

## högerändpunkt

definition  $\langle$ till ett intervall $\rangle$  ändpunkt sådan att det inte finns några punkter i intervallet till höger om den

exempel Intervallen  $[3, 8]$  och  $]3, 8[$  har 8 som högerändpunkt. Intervallet  $[5, +\infty[$  har ingen högerändpunkt.

## infimum

definition  $\langle$ till en mängd av tal $\rangle$  den största minoranten till mängden ( $-\infty$  om minorant saknas)

exempel Infimum av alla positiva tal är 0 (men 0 är inte positivt).

etymologi *Infimum* betyder 'det nedersta, lägsta' på latin.

jämför *minimum av två tal* s. 59, *minimum* s. 149, *supremum* s. 61

## intervall

definition mängd av reella tal sådan att den för varje godtyckligt valt par i mängden innehåller alla tal mellan dessa



Ett slutet, ett öppet och ett halvöppet intervall.

kommentar För att beteckna intervall används hakparenteser. Av hakparentesens orientering framgår om ändpunkten tillhör intervallet eller ej.

- exempel Intervall  $[3, 8[$  är mängden av alla tal som är större eller lika med 3 och mindre än 8.  
Intervall  $] -\infty, 0[$  är lika med mängden av alla negativa tal.
- etymologi *Intervall* kommer från latinets *intervallum* 'mellanrum, avstånd'. Den ursprungliga betydelsen var 'avståndet mellan två pårader'.
- jämför *halvöppet intervall* s. 57, *slutet intervall* s. 60, *öppet intervall* s. 62

## konsekutiva tal

- definition två heltal varav det andra följer omedelbart efter det första
- kommentar Konsekutiva tal har formen  $n$  och  $n + 1$ , där  $n \in \mathbf{Z}$ . Man kan också tala om **konsekutiva jämna tal** när man syftar på två jämna tal  $2k$  och  $2k + 2$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ . Motsvarande gäller för udda tal, **konsekutiva udda tal**.
- exempel 8, 9 (konsekutiva tal).  
12, 14 (konsekutiva jämna tal).  
15, 17 (konsekutiva udda tal).
- etymologi *Konsekutiv* kommer av latinets *consecutivus* 'följande (omedelbart) efter'.

## majorant

- synonym **övre begränsning**
- definition (till en given mängd av reella tal) tal som är större än eller lika med alla element i mängden
- kommentar Man säger att talet **majorerar** talen i mängden.
- etymologi *Majorant* är en bildning av latinets *maior* 'större'.

## maximum av två tal

- definition det största av talen
- kommentar Om de två talen är lika så är maximum lika med detta tal.  
Vanliga beteckningar är  $\max(x, y) = x \vee y$ . Man har  $z \geq x \vee y$  om och endast om  $z \geq x$  och  $z \geq y$ .
- exempel  $3 \vee 5 = 5 \vee 3 = 5$ ;  $3 \vee 3 = 3$ .

## minimum av två tal

- definition det minsta av talen
- kommentar Om de två talen är lika så är minimum lika med detta tal.  
Vanliga beteckningar är  $\min(x, y) = x \wedge y$ . Man har  $z \leq x \wedge y$  om och endast om  $z \leq x$  och  $z \leq y$ .
- exempel  $3 \wedge 5 = 5 \wedge 3 = 3$ ;  $3 \wedge 3 = 3$ .

## minorant

- synonym **undre begränsning**
- definition (till en given mängd av reella tal) tal som är mindre än eller lika med alla element i mängden

kommentar Man säger att talet *minorerar* talen i mängden.  
 etymologi *Minorant* är en bildning av latinets *minor* 'mindre'.

## obegränsad mängd

definition  $\langle$ av tal $\rangle$  mängd som innehåller tal med hur stort absolutbelopp som helst  
 $\langle$ av punkter i planet eller rymden $\rangle$  mängd som innehåller punkter som ligger hur långt från varandra som helst

kommentar En vanlig typ av obegränsad mängd är ett *obegränsat intervall*.

exempel Heltalen. Intervall  $[0, +\infty[$ .

## olikhet

definition logisk relation som innebär att två objekt inte är identiska

kommentar Lösningarna till en olikhet anges ofta med en eller flera enkla olikheter.

exempel Olikheten  $4x + 5 > 10$  har lösningen  $x > 1,25$ .

## olikhetstecken

definition något av tecknen  $\neq$ ,  $<$ ,  $>$ ,  $\leq$  och  $\geq$ .

kommentar Tecknen utläses som följer:  $\neq$  "skilt från",  $<$  "mindre än",  $>$  "större än",  $\leq$  "mindre än eller lika med",  $\geq$  "större än eller lika med".

Tecknet  $\neq$  kan användas mellan alla typer av objekt, medan de övriga tecknen används bara om reella tal eller andra objekt där man definierat en ordning.

Formeln  $a < b$  innebär att talet  $a$  är mindre än talet  $b$  (ligger till vänster om  $b$  på tallinjen). Formeln  $b > a$  betyder att  $b$  är större än  $a$  (ligger till höger om  $a$  på tallinjen).

Tecknet  $\leq$  används för att ange att en av relationerna  $<$  och  $=$  råder, och på motsvarande sätt anger  $\geq$  att en av relationerna  $>$  och  $=$  gäller. Man kallar  $a < b$  för en *strikt olikhet* (ibland *sträng olikhet*), medan  $a \leq b$  säges vara en *icke-strikt olikhet*. Samma benämningar används för  $b > a$  respektive  $b \geq a$ .

## ordningstal

synonym **ordinaltal**

definition tal som anger på vilken plats i en viss ordning ett element förekommer

kommentar De första ordinaltalen är *första*, *andra*, *tredje*, motsvarande kardinaltalen 1, 2, 3.

Termen *ordinaltal* användes även när det handlar om oändliga mängder.

jämför *kardinaltal* s. 11

## slutet intervall

definition intervall som innehåller sina ändpunkter

kommentar	Antalet ändpunkter kan vara noll, ett eller två.
exempel	Det slutna intervallet $[3, 8]$ , som består av alla tal som är större än eller lika med 3 och mindre än eller lika med 8, har ändpunkterna 3 och 8, och de tillhör intervallet. Även $[0, +\infty[$ (med en ändpunkt) och $]-\infty, +\infty[$ (utan ändpunkt) är slutna intervall.
jämför	<i>halvöppet intervall</i> s. 57, <i>intervall</i> s. 58 (figur finns där), <i>ändpunkt</i> s. 61, <i>öppet intervall</i> s. 62

## supremum

definition	(till en mängd av tal) den minsta majoranten till mängden ( $+\infty$ om majorant saknas)
exempel	Supremum av alla rationella tal $x$ som uppfyller $x^2 \leq 2$ är $\sqrt{2}$ .
etymologi	<i>Supremum</i> betyder 'det översta, högsta' på latin.
jämför	<i>maximum</i> s. 148, <i>infimum</i> s. 58

## tallinje

synonym	<b>talaxel</b>
definition	rät linje där varje punkt på linjen svarar mot precis ett reellt tal och där omvänt varje reellt tal svarar mot precis en punkt på linjen med bevarande av ordningen
jämför	<i>koordinat</i> s. 236, <i>rät linje</i> s. 186

## vänsteromgivning

definition	(till en punkt på tallinjen) mängd som innehåller ett slutet intervall med punkten som högerändpunkt och med vänsterändpunkt skild från denna
jämför	<i>omgivning</i> s. 183, <i>högeromgivning</i> s. 58 (figur finns där), <i>ändpunkt</i> s. 61

## vänsterändpunkt

definition	ändpunkt sådan att intervallet inte innehåller några punkter till vänster om den
exempel	Intervallen $[3, 8]$ och $]3, 8[$ har 3 som vänsterändpunkt. Intervallet $]-\infty, 5]$ har ingen vänsterändpunkt.

## ändpunkt

definition	(till ett intervall) punkt sådan att det inte finns några punkter i intervallet på ena sidan om den och sådan att intervallet innehåller punkter hur nära punkten som helst (till en kurva) bilden av en ändpunkt till ett intervall som avbildas på kurvan
kommentar	Ett intervall kan ha två, en eller ingen ändpunkt. Ett begränsat intervall med positiv längd har två ändpunkter. Ett obegränsat intervall kan vara av typen $[a, +\infty[$ , $]a, +\infty[$ , $]-\infty, b]$ eller $]-\infty, b[$ och har en ändpunkt. Hela axeln $\mathbf{R} = ]-\infty, +\infty[$ och den tomma mängden $\emptyset$ är intervall och saknar ändpunkter.

jämför *högerändpunkt* s. 58, *vänsterändpunkt* s. 61

### Öppet intervall

definition intervall där ingen av ändpunkterna tillhör intervallet

exempel Intervallet  $]3, 8[$ , som består av alla tal som är större än 3 och mindre än 8, har ändpunkterna 3 och 8, som inte tillhör intervallet. Intervallen  $\mathbf{R}$  och  $\emptyset$  har inga ändpunkter och är därför öppna.

jämför *intervall* s. 58 (figur finns där), *halvöppet intervall* s. 57, *slutet intervall* s. 60, *ändpunkt* s. 61

## 3.4. Procent och promille

### andel

definition kvot<sub>1</sub> som anger förhållandet mellan en del och en helhet

exempel Andelen salt i havsvattnet är 0,03 eller 3 procent.  
Andelen röstande var  $4/5$  eller 80 procent.

### ppm

definition miljondel

exempel Andelen arsenik i jorden i staten Washington är i medeltal 7 ppm.

etymologi Termen kommer av det engelska uttrycket *parts per million* med samma betydelse.

### procent

definition hundradel

kommentar Procent används för att ange andelar och göra jämförelser.

Tecknet för procent är %. 100% motsvarar en hel. Ett tal med efterföljande procenttecken sägs vara skrivet i *procentform*.

exempel  $15\% = 15/100 = 0,15$ .

etymologi Ordet *procent* har sitt ursprung i renässansens Italien: *per cento* 'för (på) hundra'; jämför engelskans *percent*. Att *per-* har blivit *pro-* kan förklaras av den senare latinska formen *pro centum* 'för hundra'.

Procenttecknet % härstammar likaså från 1400-talets Italien. Ursprungligen var strecket horisontellt; det snedställda strecket i den nutida symbolen är mycket yngre.

### procentenhet

definition enhet för andelar lika med 1 procent av en (underförstådd) helhet

exempel Ett politiskt parti som fått 10% av rösterna i ett val och 12% i nästa har ökat sin röstandel med 20 procent men bara med 2 procentenheter.

När momsens på böcker sänktes från 25% till 6% sänktes den med 19 procentenheter. Priset borde därmed ha sänkts med 15,2 procent, eftersom  $((100 + 6) - (100 + 25))/(100 + 25) = -0,152$ .

**procentsats**

- definition tal som anger antalet procent  
 kommentar Termen används särskilt vid angivande av ränta eller avgift.

**promille**

- definition tusendel  
 kommentar Promille används för att ange andel. Tecknet för promille är ‰.  
 exempel  $23\text{‰} = 23/1\,000 = 0,023 = 2,3\%$ .  
 etymologi Ordet *promille* kommer från det latinska uttrycket *pro mille* 'för (på) tusen'.

**3.5. Potenser och logaritmer****bas<sub>2</sub>**

- definition (i en potens) det tal eller uttryck som upphöjs till något  
 exempel I potensen  $b^x$  är  $b$  basen medan  $x$  kallas *exponenten*.  
 historia I sitt inflytelserika arbete *Introductio in analysin infinitorum* (1748) kallar Euler talet  $b$  för *bas* för den logaritmfunktion som är inversen till funktionen  $x \mapsto b^x$ .  
 jämför  $bas_3$  s. 40, *exponent* s. 63, *potens* s. 66

**exponent**

- definition (i potens) det tal eller uttryck till vilket basen upphöjs  
 kommentar Om exponenten är ett naturligt tal, så är exponenten lika med det antal gånger som basen ingår som faktor i potensen.  
 exempel I potensen  $b^x$  är  $x$  exponenten medan  $b$  kallas *basen*.  
     I potensen  $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5$  förekommer faktorn 5 tre gånger; 3 är exponent och 5 bas.  
     I potensen  $7^{-2}$  är  $-2$  exponenten;  $7^{-2} = 1/7^2 = 1/49$ . I potensen  $e^{7^{-2}}$  är  $7^{-2} = 1/49$  exponent och  $e$  bas.  
 etymologi Termen *exponent* introducerades 1544 av Michael Stifel (1486 eller 1487 — 1567).  
 jämför  $bas_2$  s. 63, *potens* s. 66

**karaktäristika**

- definition heltalsdelen av en logaritm  
 exempel Tiologaritmen för 200 är  $\log_{10} 200 = \lg 200 \approx 2,30103$ ; karaktäristikan är 2.  
     Tiologaritmen för  $1/200$  är  $\lg(1/200) = -\lg 200 \approx -2,301\,03 = -3 + 0,698\,97$ ; karaktäristikan är  $-3$ . Den naturliga logaritmen för 10 är  $\ln 10 \approx 2,3026$ ; karaktäristikan är 2.  
 etymologi Ordet *karaktäristika* kommer av det grekiska *kharakteristikón* 'känneärke, särdrag'.

jämför *heltalsdel* s. 44, *mantissa* s. 66

## kub<sub>2</sub>

synonym **kubik**

definition tredje potensen av ett tal

exempel Uttrycket  $4^3$ , som kan utläsas ”kuben på fyra”, ”fyra i kub”, ”fyra upphöjt till tre” eller ”fyra i kubik”.

jämför *potens* s. 66, *kvadrat<sub>2</sub>* s. 64

etymologi Uttrycket förklaras av att den geometriska kubens volym är  $a^3$ , där  $a$  är sidans längd. Se *kub<sub>1</sub>*.

## kubikrot

synonym **tredjerot**

definition (ur ett givet tal) rot i specialfallet att exponenten är 3

kommentar En kubikrot ur  $a$  är alltså en rot till ekvationen  $x^3 = a$ .

Om  $x$  är en kubikrot ur  $a$ , så är även  $\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{3}i)x$  kubikrötter. Om  $a \neq 0$ , så finns det tre kubikrötter. Om  $a$  är reellt och inte noll, så är exakt en av dessa tre rötter reell.

En kubikrot ur  $a$  skrivs  $\sqrt[3]{a}$  och kan utläsas ”en kubikrot ur  $a$ ” eller ”en tredje rot ur  $a$ ”. Om  $a$  är reellt, så kan man (med försiktighet och efter att ha varskott om detta) låta  $\sqrt[3]{a}$  beteckna den unika reella kubikroten ur  $a$ .

exempel Den reella kubikroten ur 8 är 2 eftersom  $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ . Därutöver finns det två rötter, nämligen  $-1 \pm \sqrt{3}i$ .

Den reella kubikroten ur  $-8$  är  $-2$  eftersom  $(-2)^3 = -8$ ; de övriga kubikrötterna är  $1 \pm \sqrt{3}i$ .

Talet  $8i$  har kubikrötterna  $-2i$  och  $\pm\sqrt{3} + i$ .

jämför *kub<sub>2</sub>* s. 64, *kvadratrot* s. 64, *potens* s. 66, *rot* s. 67

## kvadrat<sub>2</sub>

definition andra potensen av ett tal

exempel Uttrycket  $5^2$ , som kan utläsas ”kvadraten på fem”, ”fem i kvadrat” eller ”fem upphöjt till två”.

etymologi Uttrycket förklaras av att den geometriska figurens area är  $a^2$ , där  $a$  är sidans längd. Se *kvadrat<sub>1</sub>*.

jämför *kub<sub>2</sub>* s. 64, *potens* s. 66

## kvadratrot

definition (ur ett givet tal) rot i specialfallet att exponenten är 2

kommentar En kvadratrot ur  $a$  är alltså en rot till ekvationen  $x^2 = a$ . Ett positivt tal har två kvadratrötter, ty om  $x$  är en kvadratrot ur  $a$ , så är även  $-x$  en kvadratrot, eftersom  $(-x)^2 = x^2$ . Även ett negativt tal har två kvadratrötter, men de är inte reella. Kvadratroten är alltså en mångvärd funktion,  $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{R})$ , där  $\mathcal{P}(\mathbf{R})$  betecknar familjen av alla delmängder av  $\mathbf{R}$ . Man har alltså  $g(-4) = \emptyset$ ,  $g(0) = \{0\}$  och  $g(25) = \{-5, 5\}$ .



Ibland vet man vilket tecken en rot skall ha, och man kan då, på grund av denna extra information, utesluta en av rötterna. Men utan sådan tilläggsinformation måste man ta hänsyn till tvetydigheten.

En kvadratrots ur ett tal  $a$  skrivs  $\sqrt{a}$  eller  $\sqrt[2]{a}$  och kan utläsas ”en rot ur  $a$ ” eller ”en kvadratrots ur  $a$ ”. Tecknet  $\sqrt{\quad}$  kallas **rottecken**.

Om man vet att en viss rot måste vara positiv, så kan man (med försiktighet och efter att ha varskott om detta) låta  $\sqrt{a}$  beteckna just denna rot.

Kvadratrötterna ur ett positivt heltal som inte är kvadraten på något heltal är irrationella och kan ges ett närmevärde i decimalform.

Man kan även definiera kvadratrötterna ur ett godtyckligt komplext tal.

exempel Talet 25 har kvadratrötterna  $\pm 5$  eftersom  $(-5)^2 = 5^2 = 25$ .

Talet  $-1$  har två kvadratrötter. Man väljer att beteckna en av dem (vilken som helst) med  $i$ , och den andra är då  $-i$ .

Talet  $2i$  har kvadratrötterna  $\pm(1+i)$ .

jämför *kubikrot* s. 64, *kvadrat*<sub>2</sub> s. 64, *potens* s. 66, *rot* s. 67

## kvadrattal

definition tal som är kvadraten på något heltal

exempel  $49 = 7^2 = 7 \cdot 7$ .

jämför *triangeltal* s. 55

## kvadrera

definition beräkna kvadraten på ett tal eller uttryck

exempel Att kvadrera 7 är att beräkna  $7^2 = 7 \cdot 7 = 49$ .

etymologi *Kvadrera* kommer från det latinska *quadrare* ’att göra fyrkantig’.

## logaritm

definition (för ett givet tal och med avseende på en given bas) exponent som ger det givna talet när man upphöjer basen till den

kommentar Om  $b^x = y$  så är  $x$  lika med  $b$ -logaritmen för  $y$ , och man skriver  $\log_b y = x$ . Man säger då med ett äldre språkbruk att  $y$  är **antilogaritmen** för  $x$ .

Man kallar funktionen  $x \mapsto \log_b x$  för **logaritmfunktionen med basen  $b$** .

De vanligaste baserna är  $b = 2, e, 10$ . Logaritmer med avseende på två olika baser  $b$  och  $c$  är proportionella:  $\log_c y = \log_b y \log_c b$ .

Genom logaritmerna reduceras multiplikation till addition och division till subtraktion, vilket var en stor vinst i beräkningsarbetet.

exempel Två-logaritmen för 8 är 3, ty  $2^3 = 8$ .

historia De första logaritmerna beräknades 1614 av John Napier (1550–1617). De var de så kallade *neperska logaritmerna*, som har basen  $e$ , också kallade *naturliga logaritmer*. Senare införde Henry Briggs (1561–1630) de *briggska logaritmerna*, där basen är 10. En mindre del publicerades 1617; år 1624 utgavs tabeller för talen 1 till 20 000

och 90 000 till 100 000, och luckan mellan 20 000 och 90 000 kompletterades år 1628 av Adriaan Vlacq (1600—1667).

etymologi	Ordet <i>logaritm</i> är en sammansättning av grekiskans <i>lógos</i> 'förhållande' och <i>arithmós</i> 'tal, antal'. Det infördes av Napier.
jämför	$bas_2$ s. 63, <i>exponent</i> s. 63, <i>potens</i> s. 66

## mantissa

definition	bråkdelen <sub>1</sub> av en tiologaritm
exempel	Tiologaritmen för 200 är ungefär 2,301 03, så mantissan är approximativt 0,301 03. Tiologaritmen för 0,02 är exakt 4 enheter mindre än tiologaritmen för 200, så mantissorna är desamma. Tiologaritmen för 1/200 är ungefär $-2,301\ 03$ , så mantissan är approximativt 0,698 97.
historia	Ordet <i>mantissa</i> användes först i denna betydelse av John Wallis 1693. Gauss föreslog att ordet skulle användas allmänt om bråkdelen <sub>1</sub> av ett tal i decimalform.
etymologi	<i>Mantissa</i> är ett latinskt ord, kanske lånat från etruskiskan, med betydelsen 'tillägg för att nå en önskad vikt' (ett tillägg som användes vid vägning för att få vågen i balans).
jämför	<i>karaktersistika</i> s. 63

## naturlig logaritm

synonym	<i>e-logaritm</i> , <i>nepersk logaritm</i>
definition	logaritm med basen $e = 2,71828\ 1828 \dots$
kommentar	Den naturliga logaritmen för ett tal $y$ skrivs $\log_e y = \ln y$ eller bara $\log y$ .

## potens

definition	uttryck av formen $b^x$
kommentar	Potensen $b^x$ utläses "b upphöjt till x" och är definierad som produkten av $x$ faktorer $b$ om $x$ är ett positivt heltal. Potensen $b^0$ definieras som 1 när $b > 0$ , och $b^x$ som $1/b^{-x}$ när $x$ är ett negativt heltal. Potensen $0^x$ är definierad endast för $x > 0$ (och är då lika med 0). Man har

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \lim_{b \rightarrow 0^+} b^x = 0, \text{ medan } \lim_{b \rightarrow 0^+} \lim_{x \rightarrow 0^+} b^x = 1,$$

vilket visar att man inte kan definiera  $0^0$  som ett gränsvärde av  $b^x$  där  $b, x > 0$ . För varje tal  $y \in ]0, 1[$  kan vi definiera  $b = y^{1/x}$  och låta  $x$  gå mot noll. Då gäller att också  $b$  går mot noll och att  $b^x$  går mot  $y$ .

Talet  $b$  kallas *bas* och  $x$  *exponent*. Ett tal som skrivs som en potens sägs vara skrivet i *potensform*.

exempel	$6^4 = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1\ 296$ .
---------	--

**historia** Heltalspotenser av en obekant upp till sjätte graden behandlades av Diophantos (troligen på 200-talet e. Kr.).

Potenser med rationella exponenter introducerades av Nicole Oresme (1323–1382) vid mitten av 1300-talet. Det nutida skrivsättet för potenser, med exponenten upphöjd, härrör från Descartes 1637.

**etymologi** För kvadraten av den obekanta använde Diophantos termen *dýnamis* med grundbetydelsen 'kraft, förmåga'. I Europa kom latinets *potestas* 'kraft, potens' i bruk mot slutet av 1500-talet. *Potens* kommer alltså språkligt sett från latinets *potentia* 'kraft', men historiskt ur *potestas*.

**jämför** *bas<sub>2</sub>* s. 63, *exponent* s. 63

## rot

**definition** (ur ett givet tal och med avseende på en given exponent) tal sådant att det upphöjt till den givna exponenten är lika med det givna talet (till en ekvation med en obekant) lösning

**kommentar** Om det givna talet är  $a$  och exponenten är  $n$ , så är en rot alltså en lösning till ekvationen  $x^n = a$ . Specialfall är, för  $n = 2$ , en *kvadratrot* ur  $a$  (en rot till ekvationen  $x^2 = a$ ) och, för  $n = 3$ , en *kubikrot* ur  $a$  (en rot till ekvationen  $x^3 = a$ ).

En godtycklig  $n$ -te rot ur  $a$  kan betecknas  $\sqrt[n]{a}$ , där exponenten  $n$  kan utelämnas om den är lika med 2.

Ibland kallas även ett nollställe till ett polynom i en variabel för en rot.

**exempel** Talet 16 har kvadratrötterna 4 och  $-4$ , ty  $4^2 = (-4)^2 = 16$ . Ekvationen  $x^2 = 16$  har rötterna 4 och  $-4$ .

Talet 16 har fjärderötterna 2,  $-2$ ,  $2i$  och  $-2i$ , ty  $2^4 = (-2)^4 = (2i)^4 = (-2i)^4 = 16$ . Ekvationen  $x^4 = 16$  har dessa fyra rötter.

Ekvationen  $\sin x = 0$  har rötterna  $\pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ .

**historia** Kvadratrötter förekom redan för över 3 000 år sedan i babylonisk och egyptisk matematik.

**etymologi** Ordet *rot* är en översättning av latinets *radix*, översatt från arabiskans *jidhr*, som i sin tur kommer från indisk matematik, där sanskrittermen *mūla* 'rot, ursprung' användes.

Den arabiska termen användes av al-Khwārizmī (första hälften av 800-talet) både i betydelsen 'kvadratrot' och som beteckning på den obekanta storheten i de ekvationer som behandlades, alltså i de två betydelser som nu angivits i definitionen ovan.

**jämför** *dubbelrot* s. 94, *kubikrot* s. 64, *kvadratrot* s. 64, *multipelrot* s. 97

## rotlag

**definition** regel för att räkna med rötter

**exempel**  $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ ;  $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$ ;  $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ . De är alla giltiga under lämpliga antaganden på  $a$  och  $b$  och efter tillräckliga förklaringar avseende rottecknens mångtydighet.

## tal i grundpotensform

- definition tal i tiopotensform där absolutbeloppet för faktorn framför tiopotensen är större eller lika med 1 och mindre än 10
- exempel  $5\,600 = 5,6 \cdot 10^3$ ;  $-0,000\,36 = -3,6 \cdot 10^{-4}$ .
- jämför tal i tiopotensform s. 68

## tal i tiopotensform

- definition tal skrivet som ett tal gånger en tiopotens
- exempel  $5\,600 \cdot 10^0 = 56 \cdot 10^2 = 0,056 \cdot 10^5$ .

## tiologaritm

- synonym **10-logaritm, briggsk logaritm**
- definition logaritm med basen 10
- kommentar Eftersom man aldrig bör börja en mening med en siffra eller en matematiskt symbol, bör termen *10-logaritm* inte stå först i en mening.
- exempel Tiologaritmen för 1 000 är 3, ty  $10^3 = 1\,000$ .
- jämför *logaritm* s. 65, *naturlig logaritm* s. 66

## tiopotens

- definition heltalspotens med basen 10
- exempel  $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000$ .  
 $10^{-2} = 1/10^2 = (1/10) \cdot (1/10) = 1/100 = 0,01$ .

Några tiopotenser har speciella namn:

Tal	Potens av tio; av en miljon
miljon	$10^6 = 1\,000\,000$
miljard	$10^9 = 1\,000\,000\,000$
biljon	$10^{12} = 1\,000\,000^2$
triljon	$10^{18} = 1\,000\,000^3$
kvadriljon	$10^{24} = 1\,000\,000^4$
kvintiljon	$10^{30} = 1\,000\,000^5$
sextiljon	$10^{36} = 1\,000\,000^6$
septiljon	$10^{42} = 1\,000\,000^7$
oktiljon	$10^{48} = 1\,000\,000^8$
noniljon	$10^{54} = 1\,000\,000^9$
deciljon	$10^{60} = 1\,000\,000^{10}$
googol	$10^{100}$
googolplex	$10^{\text{googol}}$

- jämför  $bas_2$  s. 63, *potens* s. 66

## 4. Storheter och enheter

### 4.1. Storheter

#### acceleration [akselära'fjɔ:m]

definition hastighetsändring genom tid

kommentar Eftersom hastighet är en vektor, så är accelerationen likaså en vektor. Farten kan vara konstant, d.v.s. fartändringen genom tid kan vara noll utan att accelerationen är noll: även om derivatan  $\|v\|'$  av farten  $\|v\|$  är noll, så behöver inte derivatan  $v'$  av hastigheten  $v$  vara noll.

exempel Längden av accelerationsvektorn hos ett fallande tungt föremål nära jordytan orsakad av jordens gravitation är  $9,83 \text{ m/s}^2$  vid polerna, men på grund av centrifugalkraften är den mindre vid ekvatorn,  $9,78 \text{ m/s}^2$ .

En partikel som rör sig med konstant fart i en cirkulär bana har en acceleration som pekar in mot cirkelns medelpunkt. Accelerationsvektorns längd är  $4\pi^2 r T^{-2}$  om cirkelns radie är  $r$  och omloppstiden  $T$ . Man finner till exempel att jorden accelererar in mot solen med  $4\pi^2 149,47$  gigameter per årkvadrat  $\approx 187 \text{ km/s}^2$ . (Men den svänger undan, som tur är.)

#### area

definition storlek hos en yta

kommentar SI-enheten för area är kvadratmeter ( $\text{m}^2$ ).

I läroböcker t.o.m. 1960-talet användes *yta* som synonym till *area*.

Termen **areal** används ibland i betydelsen 'area' när det gäller landarea.

exempel Jordytan har en area av ungefär  $5 \cdot 10^{14} \text{ m}^2$ . Solytan har en area som är nästan 12 000 gånger större,  $6 \cdot 10^{18} \text{ m}^2$ .

etymologi *Area* kommer från latinets *area* 'plan yta'.

#### båglängd

definition längden hos en kurva

#### densitet

definition massa genom volym

kommentar Densiteten anger vilken massa ett ämne har i förhållande till sin volym, och anges ofta i  $\text{kg/m}^3$  (tidigare i  $\text{g/cm}^3$ ).

Förr användes termerna **specifik vikt** och **täthet** för detta begrepp.

exempel Kväve har densiteten  $1,185 \text{ kg/m}^3$  vid temperaturen  $15^\circ\text{C}$  och trycket  $1\,013 \text{ hPa}$ .

Vatten har densiteten  $1\,000 \text{ kg/m}^3$ .

Guld har densiteten  $19\,300 \text{ kg/m}^3$ .

Jordens densitet är  $5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}/(1,08 \cdot 10^{21} \text{ m}^3) \approx 5\,540 \text{ kg/m}^3$ .

etymologi *Densitet* kommer från latinets *densitas* 'täthet'.

**dimension<sub>2</sub>**

definition egenskap hos en storhet uttryckt som en produkt av potenser av vissa storheter som betraktas som fundamentala

kommentar Dimensionerna kan multipliceras och divideras enligt de vanliga potenslagarna.

En storhet som är en produkt av potenser av de fundamentala storheterna med exponenterna noll kallas *dimensionslös*.

exempel Man tar ofta tid, längd och massa som fundamentala storheter. Acceleration får då dimensionen längd genom tid i kvadrat och kraft dimensionen längd gånger massa genom tid i kvadrat.

Halten av dioxin i muskelkött från fisk kan mätas i pikogram per gram, som blir en dimensionslös enhet (lika med  $10^{-12}$ , miljarddels promille).

jämför *dimensionsanalys* s. 70, *storhet* s. 73

**dimensionsanalys**

definition undersökning av storheters dimension<sub>2</sub>

jämför *dimension<sub>2</sub>* s. 70, *storhet* s. 73

**effekt**

definition energi genom tid

kommentar SI-enheten är watt (W).

Jorden mottar från solen (utanför atmosfären)  $1,37 \text{ kW/m}^2$  på en yta vinkelrät mot strålarna. Eftersom den sfär med solen i medelpunkten som definieras av jordbanan har en area av

$$4\pi(1,49476 \cdot 10^{11})^2 \text{ m}^2 \approx 2,8077 \cdot 10^{23} \text{ m}^2,$$

är strålningens totala effekt  $3,85 \cdot 10^{26} \text{ W} = 385 \text{ YW}$  (yottawatt).

**elektrisk ström**

definition elektriskt laddade partiklar i rörelse

kommentar Partiklarna kan vara elektroner eller joner.

SI-grundheten för elektrisk ström är ampere (A).

**energi**

definition förmåga att utföra arbete

kommentar SI-enheten är joule (J).

Enligt Albert Einstein (1879–1955) är energi och materia ekvivalenta, och enligt hans berömda formel  $E = mc^2$  motsvarar ett kilogram materia  $299\,792\,458^2 \text{ J} \approx 8,98755 \cdot 10^{16} \text{ J} \approx 90 \text{ PJ}$  (petajoule).

Enligt uppgift finns det fossila energireserver i jorden i form av olja, naturgas och kol som skulle ge en energi om  $3,6 \cdot 10^{22}$  joule = 36 ZJ (zettajoule), vilket enligt Einsteins formel motsvarar 400 ton.

etymologi Ordet *energi* kommer av grekiskans *enérgeia* 'verksamhet, kraft', av *energés* 'verksam' i sin tur från *en* 'i' och *érgon* 'verk, arbete, göromål'.

**fart**

- definition hastighetsvektors längd  
 kommentar Hastigheten är en vektor  $v$ , och dess längd  $\|v\|$  är farten.  
 exempel Enligt definitionen av meter från 1983 är ljusfarten 299 792 458 m/s.

**frekvens<sub>1</sub>**

- definition antal perioder genom tid  
 kommentar Frekvens kan mätas i hertz, beteckning Hz;  $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$ .  
 exempel Människans öra kan uppfatta ljud med frekvenser mellan 20 Hz och 20 kHz.

Växelströmmen i vägguttagen i Europa och östra Japan har frekvensen 50 Hz; i USA och västra Japan 60 Hz.

De elektrifierade järnvägsnäten i Sverige, Norge, Schweiz, Tyskland och Österrike har en tredjedel så hög frekvens som vägguttagen, alltså  $16\frac{2}{3}$  Hz.

En FM-sändare i Sverige kan ha en frekvens 100 MHz, motsvarande en våglängd på ungefär 3 m.

Gult ljus har en frekvens omkring 521 THz, motsvarande en våglängd på 575 nm.

- etymologi *Frekvens* kommer av latinets *frequentia* 'talrikhet, stort antal', substantiv till adjektivet *frequens* 'talrik, ofta förekommande, vanlig'.  
 jämför *frekvens<sub>2</sub>* s. 275, *vinkelfrekvens* s. 75

**hastighet**

- definition tillryggalagd riktad sträcka genom tid  
 kommentar Hastigheten är alltså en vektor  $v$  och dess längd  $\|v\|$  kallas *fart*. Hastigheten kan vara en medelhastighet  $(x(t_1) - x(t_0)) / (t_1 - t_0)$  över tiden från  $t_0$  till  $t_1$ , eller en momentanhastighet, derivatan  $x'(t)$  av läget  $x(t)$ .  
 jämför *momentanhastighet* s. 72

**information**

- definition ⟨inom informationsteorin⟩ storhet som ger oss möjlighet att välja  
 kommentar Information mäts i enheterna bit och byte.

**kraft**

- definition rörelsemängds tidsderivata  
 kommentar En kraft är, liksom en rörelsemängd, en vektor, d.v.s. den har både storlek och riktning. En kraft skild från noll ger en partikel en acceleration skild från noll och med samma riktning.  
 SI-enheten för kraft är newton (N).

**ljusstyrka**

- definition frekvensanpassad effekt hos en ljuskälla  
 kommentar SI-grundenheten för ljusstyrka är candela (cd).

**längd**

definition	storlek hos en kurva
exempel	SI-grundenheten för längd är meter (m). En cirkel med radie $r$ har längden $2\pi r$ . Avståndet mellan två kolatomer i en diamant är $1,54 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 154 \text{ pm}$ (pikometer). Våglängden för gult ljus är ungefär $5,75 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 575 \text{ nm}$ (nanometer). Jordens diameter vid ekvatorn är $1,275632 \cdot 10^7 \text{ m} = 12,275632 \text{ Mm}$ (megameter), medan solens är cirka $1,4 \cdot 10^9 \text{ m} = 1,4 \text{ Gm}$ (gigameter). Medelavståndet mellan solen och jorden är $1,49476 \cdot 10^{11} \text{ m} = 149,476 \text{ Gm}$ . Vintergatans diameter är ungefär $10^{21} \text{ m} = 1 \text{ Zm}$ (zettameter). Det synliga universums diameter uppskattas till 20 miljarder ljusår $\approx 2 \cdot 10^{26} \text{ m} = 200 \text{ Ym}$ (yottameter).
jämför	<i>längd hos en vektor</i> s. 256

**massa**

definition	egenskap hos en materiell kropp <sub>1</sub> som är ett mått på dess motstånd mot rörelseändringar och dess attraktion till andra kroppar <sub>1</sub>
kommentar	Massan hos en kropp manifesteras både som tröghet under acceleration och som tyngd i ett gravitationsfält. I det senare fallet talar man om kroppens <i>vikt</i> <sub>1</sub> . SI-enheten för massa är kilogram (kg).
exempel	En elektron har massan $9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ , en proton $1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 1,67 \text{ yg}$ (yoktogram). Jordens massa inklusive atmosfären är $5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ , solens $2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ . (Man kan säga att dessa massor är 5,98 zettaton respektive 2000 yottaton, men vid räkning måste man då komma ihåg att zettaton och yottaton inte är SI-enheter.) Det synliga universums massa uppskattas till mellan $10^{53}$ och $10^{60} \text{ kg}$ , motsvarande ungefär $10^{83}$ till $10^{90}$ elektronmassor.

**momentanhastighet**

definition	hastighet vid en given tidpunkt
kommentar	Om läget vid tiden $t$ är $x(t)$ , så är momentanhastigheten derivatan $x'(t)$ vid tiden $t$ , gränsvärdet av medelhastigheten över ett tidsintervall $[t, s]$ eller $[s, t]$ när dettas längd går mot noll.
jämför	<i>hastighet</i> s. 71

**mätetal**

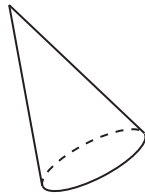
definition	tal som anger hur stor en viss storhet är uttryckt i en viss enhet
exempel	Ett mjölpaket väger 2 kg. Här är storheten paketets massa, enheten är kilogram (kg) och mätetalet är talet 2.



jämför      enhet s. 77, storhet s. 73, storhetsvärde s. 74

## rymdvinkel

definition       $\text{kon}_1$  i det tredimensionella rummet



Rymdvinkel.

exempel      Vid Venuspassagen 2004-06-08 hade Venus en vinkeldiameter på  $57,8''$  och solen  $31'30,8''$ . Solens vinkeldiameter var alltså 32,71 gånger Venus', och Venus täckte en rymdvinkel som var  $1/1070$  av solens, varför solljuset försvagades till 99,9% av sitt vanliga värde.

## rörelsemängd

definition      produkt av massa och hastighet

kommentar      En rörelsemängd är, liksom en hastighet, en vektor, d.v.s. den har både storlek och riktning. Dess storlek mäts i  $\text{m} \cdot \text{kg/s}$ .

## storhet

synonym      **kvantitet**

definition      egenskap hos ett föremål eller en företeelse som kan mätas, jämföras eller beräknas

kommentar      Storheter kan adderas och subtraheras endast om de har samma dimension<sub>2</sub>. De kan däremot multipliceras och divideras även om de har olika dimension<sub>2</sub>. Man kan bilda homogena polynom av storheter, men för andra funktioner, som sinus och cosinus, kan man endast definiera deras värden för dimensionslösa storheter.

historia      Av alla möjliga divisioner har två fått speciella namn i skolmatematiken: *innehållsdivision*, som är division när dividenden och divisorn har samma dimension<sub>2</sub> och alltså kvoten är dimensionslös; samt *delningsdivision*, som är division när divisorn är dimensionslös och alltså kvoten får samma dimension<sub>2</sub> som dividenden. Skolöverstyrelsens utredning i skolfrågor nummer 5, *Terminologi, beteckningssätt och uppställningstyper i den elementära matematikundervisningen* (1961), underkände termen *innehållsdivision* och angav att endast *division* skall användas för operationen.

exempel Längd, höjd, temperatur och vinkel är storheter.

En serpentin är 1 cm bred och 5 m lång. Dess omkrets är då  $2(1 \text{ cm} + 5 \text{ m}) = 2(0,01 + 5) \text{ m} = 10,02 \text{ m}$  (addition är möjlig, men endast sedan enheterna gjorts lika). Dess area är

$$1 \text{ cm} \cdot 5 \text{ m} = 5 \text{ cm} \cdot \text{m} = 5 \text{ dm}^2$$

(multiplikation är möjlig).

En kropp faller fritt. Accelerationen är  $9,8 \text{ m/s}^2$ . Under 4 sekunder ökar dess hastighet med  $4 \cdot 9,8 \text{ s m/s}^2 = 39,2 \text{ m/s}$  (acceleration gånger tid ger fart).

En bil accelererar från 0 km/h till 100 km/h på 9,8 sekunder. Accelerationen under denna tid är då i medeltal  $100/9,8 \text{ km h}^{-1} \text{ s}^{-1} \approx 2,8 \text{ m s}^{-2}$  (hastighet genom tid ger acceleration).

En järnplåt till ett fartyg är 12 mm tjock. Eftersom järnets densitet är  $7870 \text{ kg/m}^3$ , så blir plåtens massa genom arean  $7870 \cdot 0,012 \text{ m} \cdot \text{kg/m}^3 = 94,44 \text{ kg/m}^2$ .

Femtioperiodisk växelström kan beskrivas av en sinussvängning,  $\sin(2\pi\nu t)$ , där  $\nu$  är frekvensen, lika med 50 Hz, och  $t$  är tiden. Produkten  $2\pi\nu t$  har dimensionen<sub>2</sub> frekvens gånger tid, och är alltså dimensionslös, vilket gör att man kan ta sinus av den.

Fyra personer skall dela på tolv äpplen. Det blir 12 äpplen genom  $4 = 3$  äpplen (delningsdivision). Till hur många räcker tolv äpplen om var och en skall få två? Det blir 12 äpplen genom 2 äpplen = 6 (innehållsdivision). Men det är tydligare att skriva 12 äpplen genom 4 personer = 3 äpplen per person respektive 12 äpplen genom 2 äpplen per person = 6 personer.

jämför *dimension<sub>2</sub>* s. 70, *dimensionsanalys* s. 70, *storhetsvärde* s. 74

## storhetsvärde

definition värde som en storhet antar

kommentar Ett storhetsvärde kan uttryckas som produkten av ett måtetal och en enhet. En mer vardaglig benämning för storhetsvärde är **mätvärde**.

exempel Ett bords höjd är 0,74 m. Här är storheten höjd, storhetsvärdet 0,74 m, måtetalet 0,74 och enheten m (meter).

jämför *enhet* s. 77, *måtetal* s. 72, *storhet* s. 73

## substansmängd

definition mängd materia uttryckt som antal partiklar

kommentar Enheten för substansmängd är mol, med beteckningen mol.

## temperatur

definition egenskap hos materia som återger dess kinetiska energi

kommentar Den kinetiska energin är den samlade rörelseenergin hos alla ingående partiklar.

SI-grundenheten för temperatur är kelvin (K).

**tid**

**definition** fundamental egenskap hos världen som är en nödvändig förutsättning för att något skall kunna hända

**exempel** SI-enheten för tid är sekund.

Sedan urminnes tid används dygnet och året som tidsenheter. Det är den tid det tar för jorden att rotera ett varv i förhållande till solen, respektive den tid det tar för jorden att gå ett varv runt solen.

Gult ljus har en frekvens på  $5,21 \cdot 10^{14}$  Hz (hertz), d.v.s. varje svängning tar  $1,92 \cdot 10^{-15}$  s = 1,92 fs (femtosekunder).

Universums ålder uppskattas till mellan 12 och 14 miljarder år, ungefär  $4 \cdot 10^{17}$  s = 400 Ps (petasekunder).

**vikt<sub>1</sub>**

**definition** massa manifesterad som attraktionskraft

**vinkelfrekvens**

**definition** vinkelförändring genom tid

**kommentar** Vinkelfrekvensen kan mätas i radianer per sekund, rad/s. En axel som roterar med 1 varv per sekund har en vinkelfrekvens på  $2\pi$  rad/s. Växelström i Europa och östra Japan kan beskrivas med en sinusvängning  $\sin(2\pi\nu t) = \sin(\omega t)$ , där frekvensen<sub>1</sub> är  $\nu = 50$  Hz och vinkelfrekvensen  $\omega = 100\pi$  rad/s.

**volym**

**definition** storlek hos en kropp<sub>1</sub>

**exempel** SI-enheten för volym är kubikmeter, m<sup>3</sup>.

En läskedrycksburk kan rymma en volym om  $330\,000$  mm<sup>3</sup> =  $330$  cm<sup>3</sup> = 330 ml = 33 cl = 3,3 dl = 0,33 dm<sup>3</sup> = 0,33 l = 0,000 33 m<sup>3</sup>.

Jordens volym är ungefär  $1,08 \cdot 10^{21}$  m<sup>3</sup>; solens drygt en miljon gånger större, ungefär  $1,4 \cdot 10^{27}$  m<sup>3</sup>.

**etymologi** *Volym* kommer av latinets *volumen* 'bokrulle', bildat av *volvere* 'att rulla'. Betydelsen 'rymd som en kropp upptar' fanns inte i latinet; den uppstod i franskan.

**jämför** *kubikmeter* s. 79

**4.2. Enheter****ampere**

**definition** enhet för elektrisk ström lika med den ström som när den passerar genom två raka parallella ledare med oändlig längd och en meters avstånd från varandra ger upphov till en kraft på  $2 \cdot 10^{-7}$  N/m mellan dem

**kommentar** Ampere är en av SI-systemets sju grundenheter.

**etymologi** Enheten ampere är uppkallad efter André-Marie Ampère (1775—1836).

**areaenhet**

- definition enhet för att ange arean hos en yta
- kommentar I allmänspråket förekommer även benämningen *ytenhet*. En förkortning som förekommer i skolböckerna är a.e. Den används vid areaberäkningar i koordinatsystem då axlarna är utan angiven enhet.
- exempel SI-enheten är kvadratmeter ( $\text{m}^2$ ). Andra enheter är kvadratkilometer ( $\text{km}^2$ ), hektar (ha, lika med  $10\,000\text{ m}^2$ ; mest använt för att ange åkerareal), tunnland ( $14\,000$  kvadratalnar =  $56\,000$  svenska kvadratfot, ungefär lika med  $4\,936\text{ m}^2$ , en äldre enhet för att ange åkerareal).

**bit<sub>1</sub>** ['bit:], plural *bit*

- definition enhet för information lika med den information som behövs för att välja mellan två lika sannolika möjligheter
- kommentar Den information som ligger i en bokstav i det svenska alfabetet är högst lika med 5 bit, eftersom fem binära siffror räcker för att koda 32 bokstäver och därför även för 29 bokstäver. Om man kodar stora mängder text kan man spara minnesutrymme genom att ge  $a$  en kortare kod än  $q$ , förutsatt att det handlar om svenska, där  $a$  är vanligare än  $q$  – alla bokstäver är inte lika sannolika.
- exempel En överföringshastighet mellan två datorer kan vara 6 megabit per sekund (6 Mb/s).
- etymologi Ordet *bit* är troligen en sammandragning av den engelska termen *binary digit* eller *binary unit* och infördes 1946 av John W. Tukey (1915–2000).
- jämför *bit<sub>2</sub>* s. 76, *byte* s. 76, *information* s. 71

**bit<sub>2</sub>** ['bit:], plural *bitar* ['bit:ar]

- definition binär siffra
- kommentar De binära siffrorna skrivs vanligen 0 och 1.
- etymologi Samma som för *bit<sub>1</sub>*.
- jämför *bit<sub>1</sub>* s. 76, *byte* s. 76, *information* s. 71

**byte** ['bajt]; plural *byte*

- definition enhet för information, oftast lika med 8 bit<sub>1</sub>
- kommentar En byte tillåter oss att välja mellan  $2^8 = 256$  olika möjligheter. Termen syftar också på ett block av bit<sub>2</sub> som av datorn behandlas som en kod för ett tecken.
- jämför *information* s. 71, *bit<sub>1</sub>* s. 76

**candela**

- definition enhet för ljusstyrka lika med styrkan i en given riktning från en källa som utsänder monokromatisk strålning med frekvensen<sub>1</sub>  $5,40 \cdot 10^{14}$  hertz och vars strålningsstyrka i denna riktning är  $1/683$  watt per steradian
- kommentar Candela är SI-grundenheten för ljusstyrka och betecknas cd.

## enhet

synonym	<b>måttenhet</b>
definition	fastställt värde som används för att numeriskt uttrycka storhetsvärden
kommentar	Enheter har ofta en standardiserad beteckning. Tidigare sade man ibland <i>sort</i> .
exempel	Meter, sekund, kilogram, joule, ampere.
jämför	<i>storhetsvärde</i> s. 74

## enhetsbyte

definition	övergång från en enhet till en annan för samma storhet
kommentar	Tidigare sade man ibland <i>sortomvandling</i> .
exempel	En area som angivits i hektar kan räknas om till kvadratmeter. En temperatur som angivits i grader Fahrenheit kan räknas om till grader Celsius.

## enhetssystem

definition	system av enheter för flera storheter
kommentar	Det finns flera olika enhetssystem. I bl. a. Europa är SI-systemet det vanligaste.
jämför	<i>SI-enhet</i> s. 84

## gon

synonym	<b>nygrad</b>
definition	vinkelenhet lika med 1/400 av ett varv

## grad<sub>1</sub>

definition	vinkelenhet lika med 1/360 av ett varv
kommentar	Grad betecknas °.
historia	Indelningen i 360 grader har sitt ursprung i babylonisk astronomi från det första årtusendet f. Kr.
etymologi	<i>Grad</i> kommer från latinets <i>gradus</i> 'steg'.
jämför	<i>radian</i> s. 84

## grad Celsius

definition	enhet för temperatur lika med 1 kelvin men med skalan förskjuten så att 0,01 °C är temperaturen för vattnets trippelpunkt
kommentar	Trippelpunkten är den temperatur vid vilken det råder balans mellan de tre aggregationsformerna is, vätska och gas (ånga). Förskjutningen av skalan gör att vattnets fryspunkt blir 0 °C och vattnets kokpunkt blir 100 °C. Därför blir alla mätvärden i grader Celsius exakt 273,15 mindre än i kelvin. Grad Celsius betecknas °C.

En *grad Fahrenheit* är en hundraåttiondedel av temperaturdifferensen mellan vattnets kokpunkt ( $212^\circ\text{F}$ ) och dess fryspunkt ( $32^\circ\text{F}$ ).

En *grad Reamur* är lika med en åttiondedel av temperaturdifferensen mellan vattnets kokpunkt ( $80^\circ\text{R}$ ) och dess fryspunkt ( $0^\circ\text{R}$ ).

historia	Ursprungligen definierade Celsius skalan så att $0^\circ\text{C}$ var kokpunkten för vatten och $100^\circ\text{C}$ var fryspunkten vid normalt tryck. Skalan användes sedan till den nu använda.
etymologi	Enheter grad Celsius är uppkallad efter Anders Celsius (1701—1744), astronom i Uppsala.

## grundenhet

definition	enhet i ett enhetssystem från vilken andra enheter kan definieras
kommentar	En grundenhet har genom konvention fastlagts som sådan men kan själv vara härledd från andra grundenheter.
exempel	Sekund och kilogram är SI-grundenheter. Meter är härledd från enheten sekund, men är ändå enligt en konvention en SI-grundenhet. Likaså är ampere en SI-grundenhet, men härledd av sekund, meter och kilogram.
jämför	<i>enhetssystem</i> s. 77, <i>härledd enhet</i> s. 78

## härledd enhet

definition	enhet i ett enhetssystem bildad med hjälp av dess grundenheter
kommentar	För en härledd enhet utan eget namn används en beteckning som bildas i enlighet med hur storheten har bildats. Division av storheter utläses ”genom”, medan division av enheter utläses ”per”.
exempel	Enheter kubikmeter ( $\text{m}^3$ ) är härledd från grundenheten meter ( $\text{m}$ ).

## joule

definition	enhet för energi, lika med $1\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2$
kommentar	Joule är en SI-enhet; 1 joule är lika med 1 newtonmeter = 1 wattsekund = 1 coulombvolt.

Tidigare användes ofta energienheten kalori, särskilt för energiinnehåll i mat. Numera används även joule i detta sammanhang. Enligt en av flera definitioner är en kalori lika med  $4,1868\text{ J}$ .

En annan enhet för energi är elektronvolt (eV), den energi som fordras för att flytta en elektron över en potentialskillnad på  $1\text{ V}$ ;  $1\text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19}\text{ J}$ . Elektronens vilomassa motsvarar  $511\,000\text{ eV}$ .

exempel	Kolhydrater innehåller cirka $4\,000$ kalorier per gram. En vuxen människa behöver ungefär $3\,000\,000$ kalorier per dygn, motsvarande $145$ watt.
etymologi	Enheter <i>joule</i> är uppkallad efter fysikern James Prescott Joule (1818—1889). <i>Kalori</i> har bildats av latinets <i>calor</i> ’värme’.
jämför	<i>watt</i> s. 85

## kelvin

- definition     temperaturenhet för temperatur definierad så att 0 K är den absoluta nollpunkten och vattnets trippelpunkt får temperaturen 273,16 K
- kommentar     Kelvin är SI-enheten för temperatur och betecknas K.  
För temperaturdifferenser gäller att en kelvin är lika stor som en grad Celsius.
- etymologi     Enheten *kelvin* är uppkallad efter William Thomson, 1st Baron Kelvin (1824—1907).

## kilogram

- definition     enhet för massa lika med massan av den internationella kilogramprototypen
- kommentar     Kilogram betecknas kg.  
Kilogramprototypen förvaras i Pavillon de Breteuil i Sèvres nära Paris. Kilogram är den enda av SI:s grundenheter som fortfarande definieras med hjälp av en prototyp. Man överväger att införa en ny definition, som bygger på en naturkonstant.
- jämför         *massenhet* s. 80

## kubikmeter

- definition     volymenhet lika med volymen hos en kub med 1 meter långa sidor
- kommentar     Kubikmeter betecknas  $m^3$ .

## kvadratmeter

- definition     areaenhet lika med arean hos en kvadrat med 1 meter långa sidor
- kommentar     Kvadratmeter betecknas  $m^2$ .

## ljusår

- definition     längdenhet lika med den sträcka ljuset tillryggalägger på ett år
- kommentar     Ett ljusår är ungefär lika med  $9,46 \cdot 10^{15} \text{ m} = 9,46 \text{ Pm}$  (petameter).

## längdenhet

- definition     enhet för att ange längden av en kurva
- kommentar     Termen kan förkortas i.e. Den används vid längdberäkningar i koordinatsystem då axlarna är utan angiven enhet.
- exempel         SI-grundenheten är meter (m). Andra längdenheter är ångström (lika med  $10^{-10}$  meter); nanometer (nm); millimeter (mm); centimeter (cm); tum (olika i olika länder); fot; aln; famn; kilometer (km); verst (olika i olika länder); engelsk mil; sjömil, nautisk mil eller distansminut (numera är dessa tre definierade så att de är lika); så kallad svensk mil (används endast i Sverige och Norge); övriga multipler av meter såsom megameter (Mm), gigameter (Gm), petameter (Pm); ljusår; parsek.

## massenhet

definition	enhet för att ange massan hos en kropp <sub>1</sub>
kommentar	En tidigare benämning var <i>viktenhet</i> .
exempel	SI-grundenheten är kilogram (kg). Andra enheter som används är mikrogram ( $\mu\text{g}$ ), milligram (mg), gram (g), hektogram (hg), ton.

## meter

definition	längdenhet lika med längden av den sträcka som ljuset tillryggalägger i vakuum under tiden $1/299\,792\,458$ sekund
kommentar	Meter är en SI-grundenhet och betecknas m.
etymologi	<i>Meter</i> kommer av grekiska <i>métron</i> 'mått'.

## mol

definition	enhet för substansmängd lika med antalet atomer i 12 gram kol 12
kommentar	Antalet atomer i 12 g kol 12 kallas <i>Avogadros tal</i> (efter Amadeo Avogadro, 1776—1856) och är ungefär lika med $6,022\,141\,5 \cdot 10^{23}$ . Partiklarna kan vara atomer, molekyler, joner, elektroner, andra partiklar eller partikelgrupper. Enheten mol är en grundenhet i SI-systemet och betecknas mol.

## multipelenhet

definition	enhet som är en tiopotens av en SI-enhet eller en tilläggsenhet
kommentar	Enheten kilogram intar en särställning eftersom namnet innehåller ett prefix trots att det avser en grundenhet.
exempel	Deciliter (dl), centimeter (cm), megawatt (MW).
jämför	<i>SI-enhet</i> s. 84, <i>tilläggsenhet</i> s. 85



## multipelprefix

definition prefix som används för att skapa multiplar av enheter

kommentar Det finns prefix både för decimala och binära multipler.

### Prefix för decimala multipler (negativa exponenter)

<i>Benämning</i> <i>Beteckning</i>	<i>Definition</i> <i>Potens av tio; av tusen</i>	<i>Exempel</i> <i>Benämningens ursprung</i>
yokto- y	en kvadriljondel $10^{-24} = 1\,000^{-8}$	En proton väger 1,67 yg. Grekiska <i>okto</i> 'åtta'; latinska <i>octo</i> 'åtta'
zepto- z	tusen kvadriljondelar $10^{-21} = 1\,000^{-7}$	Latinska <i>sept-</i> 'sju'
atto- a	en triljondel $10^{-18}$	Danska <i>atten</i> 'arton'
femto- f	tusen triljondelar $10^{-15}$	1 fs = $10^{-15}$ sekunder Danska <i>femten</i> 'femton'
piko- p	en biljondel $10^{-12}$	1 pF = $10^{-12}$ farad Italienska <i>piccolo</i> 'liten', kanske med stöd av finska <i>pikku</i> 'liten'.
nano- n	0,000 000 001, en miljarddel $10^{-9}$	1 ns = $10^{-9}$ sekunder Grekiska <i>nános</i> 'dvärg'
mikro- $\mu$	0,000 001, en miljondel $10^{-6}$	1 $\mu\text{m}$ = $10^{-6}$ meter Grekiska <i>mikrós</i> 'liten'
milli- m	0,001, en tusendel $10^{-3}$	1 mm = 0,001 meter Latinska <i>mille</i> 'tusen'
centi- c	0,01, en hundradel $10^{-2}$	1 cm = 0,01 meter Latinska <i>centum</i> 'hundra'
deci- d	0,1, en tiondel $10^{-1}$	1 dl = 0,1 liter Latinska <i>decem</i> 'tio'

## Prefix för decimala multipler (positiva exponenter)

Benämning Beteckning	Definition <i>Potens av tio; av tusen</i>	Exempel <i>Benämningens ursprung</i>
deka- da	10, tio gånger $10^1$	1 dam = 10 meter Grekiska <i>déka</i> 'tio'
hekto- h	100, hundra gånger $10^2$	1 hg ("ett hekto") = 0,1 kilogram Grekiska <i>hekatón</i> 'hundra'
kilo- k [ci'lv- ]	1 000, tusen gånger $10^3$	1 kg ("ett kilo") = 1 000 gram Grekiska <i>khílioi</i> 'tusen'
mega- M	1 000 000, en miljon gånger $10^6$	1 MW = $10^6$ watt Grekiska <i>mégas</i> 'stor'
giga- G	en miljard gånger $10^9$	1 GW = $10^9$ watt Grekiska <i>gígas</i> 'gigant, jätte'
tera- T [te'ra-]	en biljon gånger $10^{12}$	1 TWh = $10^{12}$ watt-timmar = 3,6 PJ, motsvarande 40 g. Grekiska <i>téras</i> 'monster, något mycket stort'
peta- P	tusen biljoner gånger $10^{15} = 1\,000^5$	Universums ålder uppskattas till 400 Ps. 1 kg materia motsvarar ungefär 90 PJ. Grekiska <i>pénte</i> 'fem'
exa- E	en triljon gånger $10^{18} = 1\,000^6$	Avståndet till Betelgeuze är ungefär 4 Em. Grekiska <i>hex</i> 'sex'
zetta- Z	tusen triljoner gånger $10^{21} = 1\,000^7$	Vintergatans diameter är ungefär 1 Zm. De fossila energireserverna på jorden anses motsvara 36 ZJ. Italienska <i>sette</i> 'sju'
yotta- Y	en kvadriljon gånger $10^{24} = 1\,000^8$	Det kända universums diameter är ungefär 200 Ym. Solen strålar ut 385 YW. Italienska <i>otto</i> 'åtta'

etymologi Prefixen *peta-*, *exa-*, *zetta-*, *zepto-*, *yotta-*, *yokto-* har sitt ursprung i orden för fem, sex, sju och åtta i olika språk, framförallt grekiska, vilket förklaras av att deras värde motsvarar heltalspotenser av tusen. De har dock modifierats för att inte förväxlas med andra vanliga termer: *exameter*  $\neq$  *hexameter*.

## Prefix för binära multipler

Information och minneskapacitet mäts i bit och byte. Eftersom datorerna arbetar binärt, är prefixen *kilo-*, *mega-* etc. för decimala multipler olämpliga. I stället använder man potenser av 2, som  $2^{10} = 1\,024 \approx 10^3$ , kallad *kibi-*, och  $2^{20} = 1\,048\,576 \approx 10^6$ , kallad *mebi-*. Dessa är något större än kilo- och mega-, och

motsvarande relativa fel blir allt större ju högre upp man kommer. Det finns en internationell standard (CEI 60027-2, IEC 60027-2), där dessa prefix för binära multipler har fått benämningar och beteckningar enligt följande tabell.

<i>Benämning Beteckning</i>	<i>Potens av <math>1\,024 = 2^{10}</math></i>
kibi- Ki	$1\,024$
mebi- Mi	$1\,024^2 = 1,048\,576 \cdot 10^6$
gibi- Gi	$1\,024^3 \approx 1,074 \cdot 10^9$
tebi- Ti	$1\,024^4 \approx 1,100 \cdot 10^{12}$
pebi- Pi	$1\,024^5 \approx 1,126 \cdot 10^{15}$
exbi- Ei	$1\,024^6 \approx 1,153 \cdot 10^{18}$

Detta innebär till exempel att 1 gibibyte är lika med 1 073 741 824 byte (1 GiB = 1,073 741 824 GB), d.v.s. 1 gibibyte är ungefär 7,4 procent större än en gigabyte, medan 1 exbibyte är mer än 15 procent större än en exabyte.

### newton

definition enhet för kraft lika med den kraft som ger en massa på 1 kilogram en acceleration av 1 meter per sekundkvadrat;  $1\text{ N} = 1\text{ m} \cdot \text{kg}/\text{s}^2$

etymologi Enheten newton är uppkallad efter Isaac Newton (1642–1727).

### parsek

definition längdenhet lika med det avstånd varifrån jordens avstånd från solen upptar en bågsekund

kommentar Eftersom jordens medelavstånd från solen är  $1,494\,76 \cdot 10^{11}\text{ m}$  så blir  $1\text{ parsek} = 1,494\,76 \cdot 10^{11} / \sin 1''\text{ m} \approx 1,494\,76 \cdot 10^{11} \cdot 60 \cdot 60 \cdot 360 / (2\pi)\text{ m} \approx 3,08 \cdot 10^{16}\text{ m} = 30,8\text{ Pm}$  (petameter), ungefär lika med 3,26 ljusår.

etymologi Ordet *parsek* är en sammandragning av *parallaxsekund*.

### prefix

definition betydelsebärande orddel som placeras före ordroten och som vanligen inte kan förekomma som självständigt ord

etymologi *Prefix* kommer av latinska *praefixum* '(något som är) fäst framför'.

jämför *multiplprefix* s. 81

## radian

definition	vinkelenhet definierad som den vinkel en cirkelbåge av samma längd som radien upptar sedd från cirkelns medelpunkt
kommentar	En radian är lika med $180/\pi$ grader, approximativt $57,3^\circ$ . Radian är en SI-enhet och betecknas rad. Ett varv är $2\pi$ rad.
historia	Att mäta vinklar med bågmått förekom redan hos Ptolemaios under 100-talet e. Kr. Keralaskolan 1350–1550 bestämde serieutvecklingarna för sinus och cosinus och använde då bågmått för vinklar.
etymologi	<i>Radian</i> kommer från latinets <i>radius</i> 'liten stav, stråle, eker, radie'. Termen användes i sin nuvarande betydelse första gången i tryck år 1873 av James Thomson (1822–1892).
jämför	<i>grad</i> <sub>1</sub> s. 77, <i>varv</i> s. 85

## rymdvinkelenhet

definition	enhet för att ange storleken hos en rymdvinkel
kommentar	Hela himlavalvet har en area av $4\pi$ sr, vilket är $4\pi(180/\pi)^2$ kvadratgrader = $129\,600/\pi$ kvadratgrader $\approx 41\,253$ kvadratgrader.
exempel	Steradian, kvadratgrad.

## sekund

definition	tidsenhet lika med varaktigheten av 9 192 631 770 perioder för den strålning som motsvarar övergången mellan de två hyperfinnivåerna i grundtillståndet hos atomen cesium 133
kommentar	Sekund är en SI-grundenhet och betecknas s.
historia	Historiskt sett har en sekund definierats som 1/60 av en minut, som är 1/60 av en timme, som i sin tur är 1/24 av ett dygn. Eftersom jorden roterar allt långsammare, duger inte denna definition inom fysiken.

## SI-enhet

definition	enhet i det internationella enhetssystemet SI ( <i>Système International d'Unités</i> )
kommentar	SI består av sju grundenheter och ett antal härledda enheter. Grundenheter i SI-systemet är meter (m) för längd, kilogram (kg) för massa, sekund (s) för tid, ampere (A) för elektrisk ström, kelvin (K) för temperatur, mol (mol) för substansmängd och candela (cd) för ljusstyrka.
jämför	<i>härledd enhet</i> s. 78

## steradian

definition	rymdvinkelenhet lika med den rymdvinkel med spets i sfärens medelpunkt som upptas av 1 areaenhet på en sfär med radie 1 längdenhet
kommentar	En steradian är lika med $1/(4\pi)$ av den rymdvinkel som upptas av hela sfären från en punkt inne i sfären och därför lika med $(180/\pi)^2 \approx 3\,282,8$ kvadratgrader. Steradian är en SI-enhet och har beteckningen sr.

- exempel Månen har en vinkeldiameter på omkring  $30'$  sedd från jorden och upptar alltså en rymdvinkel om ungefär  $\pi \cdot (0,25)^2 \approx 0,196$  kvadratgrader eller  $0,000\,06$  sr.
- etymologi *Steradian* är en sammansättning av grekiska *stereós* 'solid, tredimensionell' och *radian* (se detta ord).

## tidsenhet

- definition enhet för att ange tid
- exempel SI-grundenheten är sekund. Andra enheter som används är minut (min), timme (h), dygn (d), vecka, månad, år.

## tilläggsenhet

- definition enhet som inte ingår i SI men som valts ut att användas tillsammans med SI-enheterna
- exempel Kilowattimme (kWh) är tilläggsenhet för energi lika med  $3,6$  MJ, motsvarande en massa av omkring  $40$  ng.  
Liter ( $\text{dm}^3$ ) är tilläggsenhet till SI-enheten kubikmeter ( $\text{m}^3$ ).

## varv

- definition enhet för plana vinklar lika med den vinkel en cirkel upptar från en punkt inne i cirkeln
- kommentar Ett varv är  $360$  grader och lika med  $2\pi$  radianer ( $360^\circ = 2\pi$  rad).

## vinkelenhet

- definition enhet för att ange storleken hos en plan vinkel
- exempel Sekund (bågsekund), minut (bågminut), militärt streck (i Sverige lika med  $1/6\,300$  varv, ungefär  $1$  milliradian), gon (lika med  $0,9$  grader), grad, radian, varv.
- historia Indelningen i minuter och sekunder användes inom grekisk trigonometri och astronomi under antiken. Den har sitt ursprung i babyloniernas sexagesimala talsystem och introducerades under 1100-talet i Europa genom arabisk förmedling.
- etymologi Latinets *pars minuta* 'den förminskade delen' och (*pars minuta*) *secunda* 'den andra (förminskade delen)' är översättningar från motsvarande arabiska termer.

## volymenhet

- definition enhet för att ange volymen av en kropp<sub>1</sub>
- kommentar Termen kan förkortas v.e.
- exempel Kubikmeter ( $\text{m}^3$ ), liter (l), skäppa (gammal svensk volymenhet för spannmål ungefär lika med  $25,35$  liter).

## watt

- definition enhet för effekt, lika med  $1$  joule per sekund
- jämför *joule* s. 78

## 4.3. Mätning

### fel

synonym	<b>absolut fel</b>
definition	differensen mellan ett närmevärde och det exakta värdet
kommentar	Ett fel kan vara positivt eller negativt. Vissa källor räknar dock endast med absolutbeloppet av differensen.
exempel	Om det exakta värdet är $1/7$ och närmevärdet $0,142\ 857$ , så är felet lika med $0,142\ 857 - 1/7$ , som är negativt.
jämför	<i>avrundningsfel</i> s. 36, <i>relativt fel</i> s. 86

### felgräns

definition	uppskattning av ett fels maximala absolutbelopp
------------	---

### mätfel

definition	fel hos uppmätta värden
kommentar	Mätfel kan t. ex. bero på brister i mätinstrumentet, störning i den omgivning där mätningen görs och uppmärksamhet eller okunnighet hos den som utför mätningen.
jämför	<i>systematiskt fel</i> s. 280

### noggrannhet

definition	mått på hur väl ett närmevärde återger det exakta värde som det representerar
exempel	Kvadratrötterna ur 7 är med sex siffrors noggrannhet $\pm 2,645\ 75$ .

### närmevärde

synonym	<b>approximativt värde</b>
definition	ungefärligt värde
kommentar	Närmevärden skrivs vanligen i decimalform. De flesta uppmätta värden är närmevärden.
exempel	Ett närmevärde för talet $\pi$ är 3,14.
jämför	<i>exakt värde</i> s. 37

### relativt fel

definition	kvoten av fel och närmevärde
kommentar	Relativt fel anges ofta i procent.
exempel	Om en våg visar 20 gram för ett brev som väger 19 gram, så är det relativa felet $(20 - 19)/20\% = 5\%$ . Om $\pi$ approximeras med 3,141 6 (fyra korrekta decimaler), så är det relativa felet mindre än 0,000 24 %.

## 5. Algebra

### 5.1. Allmänt

#### algebra<sub>2</sub>

definition mängd försedd med tre operationer, addition, multiplikation och multiplikation med skalär, som gör den till en ring under de två första och ett vektorrum under den första och den tredje operationen

jämför *algebra<sub>1</sub>* s. 11

#### algebraiskt uttryck

definition uttryck som innehåller tal och variabler förenade med algebraiska operationer

#### algebrans fundamentalsats

definition den sats som säger att varje polynom av grad minst 1 och med komplexa koefficienter har minst ett nollställe

kommentar Satsen är en existenssats; den säger ingenting om hur man i praktiken kan bestämma rötter till algebraiska ekvationer.

En följd av denna sats och faktorsatsen är att varje polynom kan faktoriseras i en produkt av förstgradsfaktorer om man tillåter komplexa koefficienter.

historia Gauss publicerade satsen år 1799.

jämför *faktorsatsen* s. 88, *restsatsen* s. 91

#### associativa lagen

definition den räknelag för addition och multiplikation som säger att  $(a + b) + c = a + (b + c)$  och att  $(ab)c = a(bc)$

kommentar En operation som uppfyller den associativa lagen säges vara **associativ**. Motsvarande lag gäller inte för subtraktion och division:  $(a - b) - c \neq a - (b - c)$  och  $(a/b)/c \neq a/(b/c)$  i allmänhet; däremot för till exempel union och snitt av mängder:  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ;  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ .

etymologi *Associativ* är en modern adjektivavledning till det latinska verbet *associare* 'att förena, att sammanföra'.

#### bilineär

definition linjär<sub>1</sub> i vart och ett av två argument när det andra hålles konstant

exempel Produkten av två reella tal är en bilineär form på  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ .

Funktionen  $b(x, y) = 3x_1y_1 + 5x_2y_1 + 8x_2y_2$  är bilineär på  $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ . Den är linjär i  $(x_1, x_2)$  när  $(y_1, y_2)$  hålles fix, och linjär i  $(y_1, y_2)$  när  $(x_1, x_2)$  är fix.

#### binom

definition polynom som består av endast två termer

etymologi *Binom* kommer från medeltidslatinets *binomium* 'något som har två namn'. Det är en sammansättning av latinets *bi-* 'två-' och *nomen* 'namn'.

jämför *monom* s. 90

## distributiva lagen

definition den räknelag som säger att  $a(b + c) = ab + ac$  och  $(a + b)c = ac + bc$

kommentar När denna lag gäller säger man att multiplikationen är **distributiv** över additionen.

exempel Snittoperationen är distributiv över unionsoperationen,  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ , och omvänt,  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

etymologi *Distributiv* kommer från det latinska uttrycket *distributivus* 'som fördelar'.

## faktorsatsen

definition den sats som säger att ett tal  $a$  är ett nollställe till ett polynom  $p(x)$  om och endast om  $x - a$  är en delare till  $p(x)$

jämför *algebrans fundamentalsats* s. 87, *delare* s. 30, *restsatsen* s. 91

## gemensam faktor i polynom

definition (i två eller flera polynom) polynom som de givna polynomen är delbara med

## gemensam multipel av polynom

definition (av två eller flera polynom) polynom som är en multipel av vart och ett av de givna polynomen

## grad<sub>2</sub>

definition (hos ett monom) summan av exponenterna hos de ingående variablerna;

(hos ett polynom) maximum av de ingående monomens grader

exempel Monomet  $3x^5$  har graden 5; monomet  $x^2y^3z^2$  har graden  $2+3+2 = 7$ .

Polynomet  $3x^5 + 4x^4 + 7x^2$  har graden  $5 \vee 4 \vee 2 = 5$ ; polynomet  $2x^3y^2z^5 + 7xy^5z^3$  har graden  $(3 + 2 + 5) \vee (1 + 5 + 3) = 10 \vee 9 = 10$ .

etymologi<sub>1</sub> Se *grad*<sub>1</sub>.

jämför *exponent* s. 63

## grupp

definition matematisk struktur bestående av en mängd och en operation som är associativ, där det finns ett neutralt element, och där varje element har en invers

kommentar Om operationen är kommutativ så kallas gruppen *kommutativ* eller **abelsk**. I så fall skrivs operationen ofta som addition, annars som multiplikation.



- exempel** Heltalen under addition: det neutrala elementet är 0, inversen till  $n$  är  $-n$ .  
 De nollskilda komplexa talen,  $\mathbf{C}^* = \dot{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ , under multiplikation: det neutrala elementet är 1, inversen till  $z$  är  $1/z$ .  
 De icke-singulära ( $2 \times 2$ )-matriserna under multiplikation: det neutrala elementet är matrisen  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ; inversen till  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  är  $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} / (ad - bc)$ .
- historia** Den tidigaste användningen av grupper omfattade konkreta exempel: grupper av permutationer av rötterna till ekvationer. Évariste Galois (1811–1832) analyserade dem i sina studier av lösbarheten av ekvationer, men hans arbete publicerades först 1846. En generell definition av ändliga grupper lades fram 1854 av Arthur Cayley (1821–1895), men det var först mot slutet av 1800-talet som oändliga grupper behandlades.
- etymologi** Valet av ordet förklaras av att en grupp är en samling av element (individer) som hör ihop. Termen infördes av Galois (franska *groupe*).
- jämför** *kropp*<sub>2</sub> s. 90, *ring* s. 91

## invers<sub>1</sub>

- definition** (till ett givet element) element som kombinerat med det givna elementet ger det neutrala elementet
- kommentar** I definitionen förutsätts att man har en tvåställig operation för vilken det finns ett neutralt element.  
 En **högerinvers** till  $x$  är ett element  $y$  sådant att  $xy$  är lika med det neutrala elementet; en **vänsterinvers** ett element  $z$  sådant att  $zx$  är det neutrala elementet.
- exempel** Den **additiva inversen** till ett heltal  $x$  är  $-x$  (summan av  $x$  och  $-x$  är 0, det neutrala elementet under addition).  
 Den **multiplikativa inversen** till ett reellt tal  $x \neq 0$  är talet  $1/x$  (produkten av  $x$  och  $1/x$  är 1, det neutrala elementet under multiplikation).
- etymologi** *Invers* kommer av latinets *invertere* 'att vända om, att vrida om'.

## koefficient

- definition** konstant faktor i ett uttryck
- exempel** I polynomet  $\frac{1}{2}x^2 + xy$  är koefficienterna  $\frac{1}{2}$  och 1.  
 I monomet  $5ax$ , där  $a$  är en konstant, är koefficienten  $5a$ .  
 I funktionen  $f(x) = 5e^{3x}$  är 5 och 3 koefficienter.
- etymologi** *Koefficient* kommer från den latinska participformen *coefficientens* 'samverkande'.

## kommutativa lagen

- definition** den räknelag för addition och multiplikation som säger att  $a+b = b+a$  och att  $ab = ba$
- kommentar** En operation som uppfyller den kommutativa lagen säges vara **kommutativ**. Motsvarande lag gäller inte för subtraktion och division.

exempel  $8 + 2 = 2 + 8$ ;  $5 \cdot 3 = 3 \cdot 5$ ;  $A \cup B = B \cup A$ ;  $A \cap B = B \cap A$ .  
 etymologi *Kommutativ* kommer från latinets *commutativus* 'som kan bytas om'.

## kropp<sub>2</sub>

definition ring där multiplikationen är kommutativ och det finns ett neutralt element för denna och där varje element skilt från 0 har en multiplikativ invers

exempel De rationella talen under addition och multiplikation. Mängden  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$  under addition och multiplikation modulo 5.

historia Begreppet kropp infördes av Richard Dedekind (1831—1916) för en mängd av reella eller komplexa tal där summan, differensen<sub>1</sub>, produkten och kvoten<sub>1</sub> av två tal i mängden också ingår i mängden (utom när man dividerar med noll). Den moderna definitionen, som är allmännare, formulerades under 1890-talet.

etymologi Termen *kropp* (tyska *Körper*) för detta begrepp valdes av Dedekind för att den betecknar ett system som äger en viss fullständighet, fullkomlighet och slutenhet, varigenom det framträder som ett organiskt helt, som en naturlig enhet.

Äldre termer var *rationales Gebiet* (Dedekind) och *Rationalitätsbereich* (Kronecker), syftande på att räknelagarna är desamma som för de rationella talen.

jämför *grupp* s. 88, *ring* s. 91

## linjär algebra

definition gren av algebra<sub>1</sub> som behandlar vektorrum, linjära avbildningar, matriser och determinanter

kommentar Den linjära algebran kan tillämpas på linjära ekvationssystem och på geometriska problemställningar, i synnerhet vad gäller räta linjer, plan och deras motsvarigheter i högre dimensioner.

## monom

definition polynom som består av endast en term

etymologi *Monom* är en sammansättning av de grekiska orden *mónos* 'en, enda, ensam' och *ónoma* 'namn'.

jämför *binom* s. 87

## neutralt element

definition (i en mängd med en tvåställig operation) element sådant att operationen verkande på det och ett godtyckligt element ger just detta element

exempel För addition är 0 ett neutralt element:  $x + 0 = 0 + x = x$  för alla  $x$ .  
 För multiplikation är 1 ett neutralt element:  $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$  för alla  $x$ .

För unionsbildning är den tomma mängden  $\emptyset$  ett neutralt element:  $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$  för alla  $A$ .

För snittoperationen är hela universum  $X$  ett neutralt element:  $A \cap X = X \cap A = A$  för alla  $A$ .

## obekant

- definition storhet i en ekvation eller olikhet vars värde skall bestämmas
- kommentar En obekant betecknas ofta  $x$ ,  $y$  eller  $z$  (det franska alfabetets sista bokstäver), medan konstanter och kända storheter ofta betecknas  $a$ ,  $b$  eller  $c$  (från alfabetets början).

## polynom

- definition algebraiskt uttryck där konstanterna och variablerna är förenade med multiplikation och addition
- kommentar Subtraktion av termerna får förekomma: den kan återföras på addition. Däremot får division av variablerna inte förekomma. Ett polynom som endast innehåller en term kallas *monom*. Ett polynom med endast två termer kallas *binom* och med endast tre termer *trinom*. Ett polynom med variabeln  $x$  kan betecknas  $p(x)$ , och  $p(a)$  betecknar då polynomets värde för  $x = a$ ;  $p(x)$  utläses ” $p$  av  $x$ ” eller ” $p$   $x$ ”. Ett polynom med flera variabler kan skrivas  $p(x, y)$ .
- exempel  $p(x) = \frac{1}{2}x^2 - 7x + \frac{1}{7} = \frac{1}{2}x^2 + (-7x) + \frac{1}{7}$ .  
 $q(x, y, z) = 4x^4y^3z^5 + \sqrt{5}xyz$ .
- etymologi *Polynom* kommer från de grekiska orden *polýs* ’mången’ och *ónoma* ’namn’.
- jämför *binom* s. 87, *monom* s. 90, *term* s. 26, *grad<sub>2</sub>* s. 88

## rationellt uttryck

- definition uttryck som kan skrivas som kvoten<sub>1</sub> mellan två polynom
- kommentar Ett rationellt uttryck har inte ett väldefinierat värde när nämnaren är lika med 0.
- jämför *polynom* s. 91

## restsatsen

- definition den sats som säger att när ett polynom  $p(x)$  divideras med första-gradspolynomet  $x - a$ , så blir resten  $p(a)$
- jämför *algebrans fundamentalsats* s. 87, *faktorsatsen* s. 88

## ring

- definition matematisk struktur bestående av en mängd och två operationer, nämligen addition med neutralt element 0 och multiplikation, som är en kommutativ grupp under additionen, och där multiplikationen är associativ och distributiv över additionen
- kommentar Det behöver inte finnas ett neutralt element under multiplikation, och även om så skulle vara fallet, behöver det inte finnas multiplikativa inverser.
- exempel Heltalen under addition och multiplikation.  
 De reella talen under addition och multiplikation.  
 Mängden  $\{0, 1, \dots, 11\}$  under addition och multiplikation modulo 12.

historia	Begreppet ring infördes av Richard Dedekind, men i en snävare mening än i dag; en ring utgjordes av en viss delmängd av de reella eller komplexa talen. Först i början av 1900-talet definierades en ring som en algebraisk struktur. Den definition som används i dag formulerades 1921 av Emmy Noether (1882–1935).
etymologi	Dedekind använde termen <i>Ordnung</i> 'ordning' för ring. Den nutida termen <i>ring</i> (tyska <i>Ring</i> ) infördes under 1890-talet. Även <i>Zahlring</i> 'talring' användes då. Valet förklaras av att det tyska ordet <i>Ring</i> 'ring, krets, förbund, trust' – i motsats till det franska <i>anneau</i> – kan syfta också på en krets av personer som har något gemensamt.
jämför	<i>grupp</i> s. 88, <i>kropp</i> <sub>2</sub> s. 90

## sätta in

synonym	<b>substituera</b>
definition	ersätta en bokstavs-beteckning i ett uttryck med ett tal eller annat uttryck
kommentar	Förfarandet kallas <i>insättning</i> eller <i>substituering</i> .
exempel	I formeln $C = (F - 32)/1,8$ , där $C$ är temperaturen i grader Celsius och $F$ är temperaturen i grader Fahrenheit, kan vi sätta in $F = 60$ . Vi får då $C = (60 - 32)/1,8 \approx 15,6$ , d.v.s. $60^\circ\text{F} \approx 15,6^\circ\text{C}$ . I polynomet $P(x) = x^3 + 4$ kan vi sätta in $x = z + 3$ och får då ett nytt polynom $P(z + 3) = Q(z) = z^3 + 9z^2 + 27z + 31$ .

## 5.2. Algebraiska operationer

### algebraisk operation

definition	en av operationerna addition, subtraktion, multiplikation, division, rotutdragnings eller upphöjandet till heltalspotens eller rationell potens
kommentar	Icke-algebraiska operationer kan exemplifieras av logaritmfunktionen, vars definition beror på gränsprocesser i analysen.
jämför	<i>transcendent</i> s. 55

### konjugatregeln

definition	den regel som säger att $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ .
exempel	$9x^2 - 4y^2 = (3x + 2y)(3x - 2y)$ ; $a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$ .
etymologi	De två binomen $a + b$ och $a - b$ kan sägas vara <b>konjugat</b> till varandra.
jämför	<i>komplext konjugat</i> s. 47, <i>kvadreringsreglerna</i> s. 93

### kvadratkomplettering

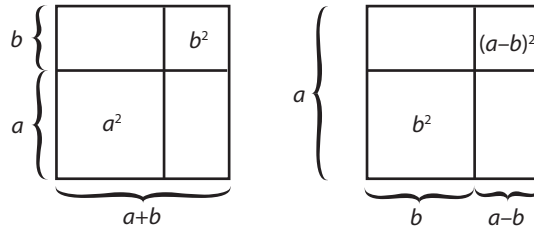
definition	metod att omforma ett polynom så att åtminstone några termer bildar en kvadrat
kommentar	Metoden kan användas som ett steg i lösningen av en andragradsekvation.

**exempel** Polynomt  $x^2 - 4x + 3$  kan skrivas  $(x - 2)^2 - 1$ ; man säger då att man *kvadratkompletterat* termerna  $x^2 - 4x$ . Ekvationen  $x^2 - 4x + 3 = 0$  är därför ekvivalent med  $(x - 2)^2 = 1$  och kan så lösas genom att  $x - 2 = \pm\sqrt{1}$ ,  $x = 2 \pm 1$ .

Polynomt  $x^4 - 2x^2 + 4$  kan omformas till  $(x^2 - 1)^2 + 3$ .

### kvadreringsreglerna

**definition** de regler som säger att  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  (första kvadreringsregeln) och  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$  (andra kvadreringsregeln)



Kvadreringsreglerna.

**kommentar** De två kvadreringsreglerna följer från varandra genom att man byter ut  $b$  mot  $-b$ . Liknande formler finns för  $(a + b)^n$  även då  $n$  är ett heltal större än 2; se binomialsatsen. Hur dessa formler är uppbyggda kan utläsas ur Pascals triangel.

**jämför** *binomialsatsen* s. 106, *konjugatregeln* s. 92, *Pascals triangel* s. 107

## 5.3. Ekvationer

### additionsmetoden

**definition** den metod för att lösa linära ekvationssystem som består av ledvis addition, d.v.s. högerleden i ekvationerna adderas för sig och vänsterleden för sig

**kommentar** Idén med additionsmetoden är att den ena variabeln skall försvinna då man adderar ekvationerna.

**exempel** För att eliminera  $y$  i ekvationssystemet  $11x + 3y = 155$  och  $5x + 2y = 80$  multipliceras den första ekvationen med 2 och den andra med  $-3$ . Man får då  $22x + 6y = 310$  och  $-15x - 6y = -240$ , så att termerna med  $y$  försvinner efter ledvis addition:  $22x - 15x = 310 - 240$ .

### andragradsekvation

**definition** ekvation av andra graden

**kommentar** En ekvations grad bestäms av den potens som har den största exponenten. En ekvation med en obekant kan ha högst det antal lösningar som svarar mot ekvationens grad (om denna är minst 1).

En andragradsekvation kan allmänt skrivas på formen  $ax^2 + bx + c = 0$  med  $a \neq 0$  och har således högst två lösningar. Lösningarna är

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

vilket visar att det finns en rot, kallad *dubbelrot*, om  $b^2 - 4ac = 0$ , annars två olika rötter med medelpunkt  $-b/(2a)$ .

exempel  $x^2 - 10x + 16 = 0$ .

historia I babylonisk matematik (omkring 1500 f. Kr.) löstes geometriska problem som motsvarade andragradsekvationer genom kvadratkomplettering. Diophantos (troligen under 200-talet e. Kr.) formulerade och löste andragradsekvationer. De återkommer också i arabisk matematik från 800-talet och framåt.

jämför *algebraisk ekvation* s. 97

## diofantisk ekvation

definition ekvation med två eller flera obekanta där lösningarna skall vara heltal

exempel Ekvationen  $x^p + y^p = z^p$ , där alla fyra obekanta skall vara heltal.

historia Denna typ av ekvationer har fått namn efter Diophantos, som levde i Alexandria, troligen på 200-talet e. Kr. Diophantos själv accepterade positiva rationella tal som lösningar. Teorin för positiva heltalslösningar utvecklades av indiska matematiker från och med 500-talet.

## diskriminant

definition (för en andragradsekvation  $x^2 + px + q = 0$ ) uttrycket  $p^2 - 4q$

kommentar Diskriminanten är noll precis när ekvationen har en dubbelrot; den diskriminerar (urskiljer) fallet med dubbelrot från fallet med enkla rötter.

Man kan mera allmänt definiera diskriminanten för  $n$  tal  $x_1, \dots, x_n$  som produkten av alla kvadrater  $(x_j - x_k)^2$  över alla  $j$  och  $k$  med  $j > k$ . Den är noll precis när minst två av talen är lika. Därmed kan man definiera diskriminanten för ett polynom som diskriminanten för dess rötter. För ett polynom av andra graden återfår man den redan givna definitionen.

## dubbelrot

definition multipelrot av multipliciteten 2

exempel Ekvationen  $x^2 - 4x + 4 = 0$  har dubbelroten 2.

jämför *andragradsekvation* s. 93, *multiplicitet* s. 97

## ekvation

definition matematisk utsaga som innehåller en likhet

kommentar Ofta innehåller en ekvation en eller flera obekanta. En ekvation som gäller för alla värden på de obekanta talen kallas *identitet*.

De obekanta betecknas med bokstäver, ofta  $x$ ,  $y$  eller  $z$ . En lösning till en ekvation är ett eller flera tal som gör att vänstra ledet (VL) är lika med högra ledet (HL).

exempel	$2 + 3 = 5;$ $2 + 3 = 7;$ $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ (konjugatregeln, en identitet); $7x - y = 14;$ $x^2 + 3x = 25.$
etymologi	<i>Ekvation</i> kommer av latinets <i>aequatio</i> 'likställande, utjämning', som kom i bruk under 1200-talet. Det är ett substantiv till verbet <i>aequare</i> 'att göra lika'.
jämför	<i>likhet</i> s. 16

### ekvationssystem

definition	två eller flera ekvationer som skall gälla samtidigt
kommentar	Man söker de lösningar som är gemensamma för samtliga ekvationer i systemet.
exempel	Systemet $2x + 3y = 8$ , $4x + y = -4$ . Systemet $x^3 - y^5 = 1$ , $x^2 + y^2 = 4$ .

### ekvivalenta ekvationer

definition	ekvationer som har samma lösningsmängd
exempel	$3x - 2 = x + 2$ är ekvivalent med $x - 2 = 0$ .

### eliminera

definition	vid lösandet av ekvationssystem bortskaffa en eller flera obekanta
kommentar	Vid <b>elimination</b> reduceras också antalet ekvationer.
jämför	<i>additionsmetoden</i> s. 93, <i>substitutionsmetoden</i> s. 99

### enhetsrot

definition	(avseende ett visst positivt heltal $n$ ) lösning till ekvationen $z^n = 1$
kommentar	Enhetsrötterna kan skrivas $z = e^{2\pi ik/n} = \cos(2\pi k/n) + i \sin(2\pi k/n)$ , där $k = 0, \dots, n - 1$ . De är alltså $n$ till antalet.

### falsk rot

definition	tal som kommit fram under lösandet av en ekvation men som inte uppfyller ekvationen
kommentar	En falsk rot kan uppstå genom att man gör en operation så att man får en ny ekvation med flera lösningar än den ursprungliga ekvationen. De två ekvationerna är alltså inte ekvivalenta. Vissa operationer på de två leden av en ekvation kan leda till en ny ekvation som följer av den första men inte är ekvivalent med den. Dit hör kvadrering. Omvänt kan division med en kvantitet som är noll (fast detta inte syns) leda till att en rot till den ursprungliga ekvationen inte är en rot till den nya ekvationen.

exempel	Om vi vill lösa ekvationen $\sin x = \cos x$ , så kan vi kvadrera och får då $\sin^2 x = \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ , som löses av $\sin x = \pm 1/\sqrt{2}$ , $x = \pm\pi/4 + k\pi$ , $k \in \mathbf{Z}$ . Men alla dessa $x$ löser inte den ursprungliga ekvationen. Vissa av de nya rötterna måste alltså förkastas.
---------	---

## funktionalekvation

- definition ekvation med en eller flera obekanta som är funktioner
- exempel Funktionalekvationen  $f^2 = f$  löses av alla funktioner som endast antar värdena 0 och 1.
- En annan typ av funktionalekvation är när man söker alla funktioner  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  sådana att ekvationen  $f(x + y) = f(x)f(y)$  skall gälla för alla  $x, y \in \mathbf{R}$ .

## förstgradsekvation

- synonym **lineär<sub>2</sub> ekvation**
- definition algebraisk ekvation av första graden
- exempel Ekvationen  $2x - 3 = 9$ . Ekvationen  $7x - y + 5z = 14$ .
- jämför *algebraisk ekvation* s. 97, *räta linjens ekvation* s. 98, *planets ekvation* s. 97

## grafisk metod

- definition metod för lösning av ekvationer eller ekvationssystem med hjälp av funktioners uppritade grafer
- jämför *ekvationssystem* s. 95

## homogen ekvation

- definition algebraisk ekvation sådan att alla termer är av en och samma grad
- exempel Ekvationen  $x + 2y - 3z = 0$  är homogen av grad 1.  
 Ekvationen  $2x^2y^3 + 4xy^4 - 5z^5 = 0$  är homogen av grad 5.  
 Ekvationen  $2x - 3y = 1$  är inte homogen. Den kallas *inhomogen* (inte *heterogen*).

## homogent ekvationssystem

- definition ekvationssystem i vilket samtliga ingående ekvationer är homogena av samma grad
- jämför *homogen ekvation* s. 96, *lineärt<sub>2</sub> ekvationssystem* s. 97

## högra ledet

- synonym **högerledet**
- definition det led som står till höger om likhetstecknet i en ekvation eller till höger om olikhetstecknet i en olikhet
- kommentar En vanlig förkortning är **HL**.
- jämför *vänstra ledet* s. 99

## led

- definition uttryck på en av sidorna om likhetstecknet i en ekvation eller på en av sidorna om olikhetstecknet i en olikhet
- jämför *högra ledet* s. 96, *vänstra ledet* s. 99



## lineärt<sub>2</sub> ekvationssystem

definition ekvationssystem i vilket samtliga ingående ekvationer är av första graden

jämför *förstegradsekvation* s. 96

## lösning

definition (till en ekvation, olikhet eller utsaga) sådana värden på de obekanta som gör att ekvationen gäller respektive olikheten eller utsagan blir sann

kommentar En lösning till en ekvation med en obekant kallas ofta för *rot*.

jämför *ekvation* s. 94, *rot* s. 67, *satisfiera* s. 99

## multiplrot

definition (till en algebraisk ekvation) rot som har multiplicitet minst 2

kommentar Om  $p$  är ett polynom, så är ett tal  $c$  en multiplrot till ekvationen  $p(x) = 0$  om polynomet innehåller  $(x - c)^2$  som faktor.

jämför *multiplicitet* s. 97, *dubbelrot* s. 94

## multiplicitet

definition (hos ett nollställe  $c$  till ett polynom) det heltal  $m$  sådant att polynomet är delbart med  $(x - c)^m$  men inte med  $(x - c)^{m+1}$

exempel Polynomet  $x(x - 3)^5$  har ett nollställe 0 med multipliciteten 1 (ett **enkelt nollställe**) och ett nollställe 3 med multipliciteten 5.

etymologi *Multiplicitet* kommer av latinets *multiplicitas* 'mångfald'.

jämför *dubbelrot* s. 94, *multiplrot* s. 97, *rot* s. 67

## omvänd proportionalitet

definition (mellan två storheter) samband sådant att storheternas produkt är konstant

kommentar Om storheterna är  $x$  och  $y$  så är de omvänt proportionella när det finns en konstant  $k$  sådan att  $y = k/x$ .

exempel Enligt Newton är gravitationskraften mellan två klotformiga kroppar<sub>1</sub> omvänt proportionell mot kvadraten på avståndet mellan kropparna.

## planets ekvation

definition förstegradsekvation i tre variabler

kommentar En sådan ekvation har formen  $ax + by + cz + d = 0$ , där koefficienterna  $a, b, c$  inte är noll alla tre. Nollställena bildar ett plan i det tredimensionella rummet. (Om  $a = b = c = 0$  är lösningsmängden antingen den tomma mängden  $\emptyset$  eller hela  $\mathbf{R}^3$ , mängder som inte är plan.)

## polynomekvation

synonym **algebraisk ekvation**

definition ekvation av typen  $p(x) = 0$  eller  $p(x, y) = 0$  eller motsvarande med flera obekanta, där  $p$  är ett polynom

- kommentar Polynomets grad<sub>2</sub> kallas också för ekvationens grad.
- exempel Ekvationen  $x^2 + 5x - 3 = 0$ , som är av andra graden.  
 Ekvationen  $7x^3y^4z^5 - 6x^2yz^3 + 3 = 0$ , som är av grad 12.

## potensekvation

- definition algebraisk ekvation i en variabel med två termer varav den ena är konstant
- exempel Ekvationen  $x^7 = 25$ .
- jämför *algebraisk ekvation* s. 97

## proportionalitet

- definition (mellan två storheter) samband sådant att kvoten<sub>1</sub> mellan storheterna är konstant
- kommentar Om storheterna är  $x$  och  $y$  så är de proportionella när det finns en konstant  $k$  (**proportionalitetskonstanten**) sådan att  $y = kx$ . Man skriver då någon gång  $y \propto x$ , och säger att  $y$  är **proportionell mot**  $x$ .
- exempel Om 1 portion ris utgörs av 0,75 dl så är 3 portioner  $= 3 \cdot 0,75 \text{ dl} = 2,25 \text{ dl}$ . Proportionalitetskonstanten  $k$  är här 0,75 deciliter per portion. Rismängden är proportionell mot antal portioner.
- etymologi *Proportionalitet* kommer från ett latinskt prepositionsuttryck *pro portione* 'efter andel'.

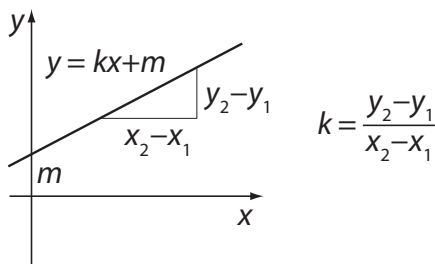
## pröva en lösning

- definition genom insättning undersöka om ett tal eller en uppsättning av tal löser en ekvation, ett ekvationssystem eller en olikhet
- kommentar Om den förmodade lösningen till en ekvation är riktig, så skall vänstra ledet bli lika med högra ledet.
- jämför *sätta in* s. 92, *satisfiera* s. 99

## räta linjens ekvation

- definition förstegradsekvation i två variabler
- kommentar En sådan ekvation har formen  $ax + by + c = 0$ , där inte både  $a$  och  $b$  är noll. Man säger att den är räta linjens ekvation på **allmän form**. Ekvationens lösningar bildar en linje i planet. (Om  $a = b = 0$  så är lösningsmängden antingen den tomma mängden  $\emptyset$  eller hela  $\mathbf{R}^2$ , mängder som inte är linjer.)

Om konstanten  $b$  är skild från noll kan ekvationen skrivas  $y = -ax/b - c/b$ . Man inför då  $k = -a/b$  och  $m = -c/b$  så att ekvationen får formen  $y = kx + m$ , som kallas linjens ekvation på  **$k$ -form**. Konstanten  $m$  ger  $y$ -koordinaten då  $x = 0$ : man kan rita upp linjen genom att starta i punkten  $(0, m)$ . Konstanten  $k$  kallas för **riktningskoefficienten** och anger linjens lutning. När  $k$  är positiv lutar linjen uppåt, när  $k$  är noll är den horisontell, och när  $k$  är negativ lutar linjen nedåt (åt höger räknat). Ett stort positivt eller negativt värde på  $k$  ger brant lutning.



Räta linjens ekvation.

Man kan även beskriva en linje genom dess ekvation på **parameterform**. Det innebär att man ger linjen som mängden av alla punkter  $(x, y) = (x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta) = (x_0, y_0) + t(\alpha, \beta)$  med  $t \in \mathbf{R}$ , där  $(x_0, y_0)$  är en punkt på linjen och  $(\alpha, \beta)$  dess riktning.

jämför *förstgradsekvation* s. 96, *intercept* s. 158, *rät linje* s. 186, *riktningskoefficient* s. 186

## satisfiera

definition uppfylla ställda krav

kommentar Man säger att en lösning till en ekvation *satisfierar* ekvationen.

etymologi *Satisfiera* kommer av det latinska *satisfieri* 'att bli tillfyllest', sammansatt av *satis* 'tillräckligt, tillfyllest' och *fieri*, passivum till *facere* 'att göra'.

jämför *lösning* s. 97

## substitutionsmetoden

definition den metod för lösning av ekvationssystem som innebär att man löser ut en av de obekanta ur en av ekvationerna och sätter in den i de andra

exempel I ekvationssystemet  $3x + 4y = 18$ ,  $2x - 3y = -5$  kan vi lösa ut  $x$  ur den andra ekvationen:  $x = \frac{3}{2}y - \frac{5}{2}$ , och sätta in det funna värdet i den första för att få en ekvation med en enda obekant:  $3(\frac{3}{2}y - \frac{5}{2}) + 4y = 18$ .

etymologi *Substitution* kommer av latinets *substitutio* 'ersättning, utbyte', substantiv till verbet *substituere* 'att ersätta, att byta ut'.

jämför *ekvationssystem* s. 95, *eliminera* s. 95, *sätta in* s. 92

## vänstra ledet

synonym **vänsterledet**

definition det led som står till vänster om likhetstecknet i en ekvation eller till vänster om olikhetstecknet i en olikhet

kommentar En vanlig förkortning är **VL**.

jämför *högra ledet* s. 96

## 5.4. Mängdlära

### alef-noll, $\aleph_0$

definition	det minsta oändliga kardinaltalet
kommentar	Talet är kardinaltalet för mängden av de naturliga talen $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ . Aritmetiken för detta tal är ganska enkel: $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ . Men $2^{\aleph_0}$ är inte lika med $\aleph_0$ , utan större.
historia	Symbolen $\aleph_0$ infördes 1895 av Georg Cantor.
etymologi	Den första bokstaven i det hebreiska alfabetet är $\aleph$ (alef).

### boolesk algebra

definition	struktur med två kommutativa och associativa operationer $\vee$ och $\wedge$ som båda har ett neutralt element $\mathbf{0}$ respektive $\mathbf{1}$ och som är distributiva över varandra och där det varje element $x$ har en invers $y$ sådan att $x \vee y = \mathbf{1}$ och $x \wedge y = \mathbf{0}$
kommentar	Det handlar ofta om logiska uttryck, där de två värdena är <i>sant</i> och <i>falskt</i> . Operatorer som används i boolesk algebra är konjunktion, infimum ( $\wedge$ eller AND); disjunktion, supremum ( $\vee$ eller OR); sträng disjunktion ( $\neq$ eller XOR) och negation ( $\neg$ eller NOT). Boolesk algebra används t.ex. vid sökning i databaser. För att uttrycket $a$ AND $b$ skall gälla måste både $a$ och $b$ vara sanna (eller vid sökning förekomma). För att uttrycket $a$ OR $b$ skall gälla räcker det att antingen $a$ eller $b$ är sant (eller vid sökning förekommer). För att uttrycket $a$ XOR $b$ skall gälla skall ett och endast ett av uttrycken $a$ eller $b$ vara sant (eller vid sökning förekomma). För att uttrycket $a$ NOT $b$ skall gälla måste $a$ vara sant och $b$ falskt (eller vid sökning $a$ men inte $b$ förekomma).
exempel	Delmängderna till en given mängd $X$ bildar en boolesk algebra om vi definierar $A \vee B = A \cup B$ , $A \wedge B = A \cap B$ , $\mathbf{0} = \emptyset$ , $\mathbf{1} = X$ eller tvärtom.
historia	Boolesk algebra introducerades av George Boole (1815–1864).
jämför	<i>disjunktion</i> <sub>2</sub> s. 117, <i>supremum</i> s. 61, <i>konjunktion</i> <sub>2</sub> s. 119, <i>infimum</i> s. 58, <i>negation</i> <sub>2</sub> s. 120

### delmängd

definition	(till en given mängd) mängd som är innehållen i den givna mängden
kommentar	Delmängden kallas <i>äkta</i> om den inte är lika med den givna mängden. Att $B$ är en delmängd av $A$ skrivs $B \subset A$ eller $A \supset B$ . (Ibland ser man beteckningen $B \subseteq A$ , som är analog med $b \leq a$ , men i så fall kan $B \subset A$ inte användas för äkta delmängd i analogi med $b < a$ ; man måste skriva $B \subsetneq A$ eller $B \subsetneq A$ .) Familjen av alla delmängder av en mängd $A$ betecknas ofta $\mathcal{P}(A)$ .
exempel	Lövträden är en delmängd av mängden av alla träd. Eftersom det också finns barrträd handlar det om en äkta delmängd.
jämför	<i>tillhöra</i> s. 103

## De Morgans lagar

definition	de lagar som säger att komplementet till unionen av två mängder är lika med snittet av deras komplement, respektive att komplementet till snittet av två mängder är lika med unionen av deras komplement
kommentar	Med mängdlärens beteckningar lyder lagarna $\mathcal{C}(A \cup B) = (\mathcal{C}A) \cap (\mathcal{C}B)$ och $\mathcal{C}(A \cap B) = (\mathcal{C}A) \cup (\mathcal{C}B)$ .
exempel	Den som varken är rik eller frisk är fattig och sjuk. Den som inte är rik och frisk är fattig eller sjuk.
etymologi	Lagarna är uppkallade efter Augustus De Morgan (1806—1871).
jämför	<i>komplement</i> s. 102, <i>snitt</i> s. 103, <i>union</i> s. 104

## differens<sub>2</sub>

synonym	<b>mängddifferens</b>
definition	(av två mängder $A$ och $B$ ) mängden av de element som tillhör $A$ men inte $B$
kommentar	Differensen mellan $A$ och $B$ skrivs $A \setminus B$ med ett snett minustecken.
jämför	<i>komplement</i> s. 102

## disjunkta

definition	(om två mängder) utan gemensamt element
kommentar	Att $A$ och $B$ är disjunkta kan skrivas $A \cap B = \emptyset$ .
exempel	De udda och jämna heltalen är två disjunkta mängder av $\mathbf{Z}$ .
etymologi	<i>Disjunkta</i> kommer av latinets <i>disjunctus</i> 'åtskild', av <i>dis-</i> 'isär-' och <i>iungere</i> 'att förena'; jämför <i>iugum</i> 'ok'.

## ekvipotenta

definition	(om två eller flera mängder) med samma kardinaltal
kommentar	Två mängder är ekvipotenta precis när deras element kan paras ihop med en bijektiv avbildning. Man säger då också att de har samma <b>kardinalitet</b> .
exempel	Galileo Galilei (1564—1642) konstaterade att mängden av kvadrattal $\{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$ är ekvipotent med mängden av naturliga tal trots att den förstnämnda är glesare. De två mängderna kan paras ihop genom kvadrattalens baser. Primtalen och de rationella talen bildar två ekvipotenta mängder. De fyra nämnda mängderna har alla kardinaliteten $\aleph_0$ (alef-noll).

## element

definition	(i mängdläran) objekt som tillhör en mängd
kommentar	Man talar också om elementen i en följd.
jämför	<i>mängd</i> s. 17, <i>element i en följd</i> s. 109

## inklusion

definition	relation mellan två mängder som uttrycker att den första är en delmängd av den andra
------------	--

jämför *delmängd* s. 100

## kartesisk produkt

synonym **cartesisk produkt**

definition  $\langle$ av mängderna  $X$  och  $Y$  $\rangle$  mängden av alla ordnade par  $(x, y)$ , där  $x$  är ett element i  $X$  och  $y$  är ett element i  $Y$

kommentar Den kartesiska produkten av  $X$  och  $Y$  skrivs  $X \times Y$  (utläses ” $X$  kryss  $Y$ ”). Om  $Y = X$  så skriver man  $X \times X = X^2$ .

Ibland används termen **produktmängd**.

etymologi Se *kartesiskt koordinatsystem*, sidan 236.

## komplement

definition  $\langle$ till en given mängd $\rangle$  mängden av alla objekt som inte tillhör mängden

kommentar Komplementet till en mängd  $B$  betecknas  $\complement B$  eller  $B^c$ . Ofta tar man komplementet av en delmängd  $B$  med avseende på en given mängd  $A$ . Då förstår man med komplementet till  $B$  mängden av alla element i  $A$  som inte hör till  $B$ ; således differensen  $A \setminus B = A \cap \complement B$ .

jämför *differens*<sub>2</sub> s. 101

## mängdalgebra

definition gren av mängdläran som behandlar operationerna att bilda union, snitt och komplement

## mängdlära

synonym **mängdteori**

definition läran om matematiska mängder, deras kardinalitet och de operationer som kan utföras på dem

## omvänd relation

synonym **invers**<sub>2</sub>

definition  $\langle$ till en given relation $\rangle$  den relation som råder mellan  $x$  och  $y$  precis när  $y$  och  $x$  har den givna relationen

exempel Relationen *barn till* är omvänd till relationen *förälder till*. Relationen *kusin till* är sin egen omvändning; den är *symmetrisk*.

Om speciellt  $f$  är en bijektion från  $X$  på  $X$  så är den omvända relationen  $f^{-1}$  en avbildning, en bijektion  $X \rightarrow X$  och sammansättningarna  $f^{-1} \circ f$  och  $f \circ f^{-1}$  är den identiska avbildningen i  $X$  (det neutrala elementet under sammansättning). I detta fall är alltså *inversen*<sub>2</sub> till  $f$  också en *invers*<sub>1</sub>.

## oändlig mängd

definition mängd som har ett oändligt antal element

kommentar En oändlig mängd kan vara uppräknelig, d.v.s. avbildas bijektivt på de naturliga talen, eller icke uppräknelig. Ett exempel på en icke uppräknelig mängd är de reella talen.

jämför *alef-noll* s. 100, *ändlig mängd* s. 105, *uppräknelig mängd* s. 104, *överuppräknelig mängd*, s. 105

## reflexiv relation

definition relation  $R$  sådan att  $xRx$  gäller för alla  $x$  i definitionsmängden

kommentar Om  $xRx$  aldrig gäller, säges relationen vara *irreflexiv*.

exempel Relationen  $=$  är reflexiv. Relationen  $\neq$  är irreflexiv.

## skära

definition (om två mängder) ha en gemensam punkt

kommentar Definitionen innebär att två mängder skär varandra precis när deras snitt är icke-tomt.

## snitt

synonym **skärningsmängd**

definition (av två mängder) mängden som består av de element som tillhör de båda givna mängderna

kommentar Snittet av  $A$  och  $B$  skrivs  $A \cap B$ . Snittet av en godtycklig familj av givna mängder definieras som mängden av de element som tillhör samtliga givna mängder. Snittet är den största mängd som är en delmängd av alla givna mängder. Snittet av mängderna  $A_j$ ,  $j \in J$ , skrivs  $\bigcap_{j \in J} A_j$ . Om indexmängden  $J$  är tom, gäller  $\bigcap_{j \in \emptyset} A_j = X$ , där  $X$  är universum.

Tidigare användes termen *produktmängd* om snittet, och man skrev det som  $AB$ .

jämför *union* s. 104, *kartesisk produkt* s. 102

## symmetrisk relation

definition relation  $R$  sådan att  $xRy$  gäller om och endast om  $yRx$

exempel Relationen  $=$  är symmetrisk.

## tillhöra

definition vara element i

kommentar Att ett objekt  $x$  tillhör en mängd  $A$  skrivs  $x \in A$  eller  $A \ni x$ . Motsatsen, att ett objekt  $y$  inte tillhör mängden  $A$ , skrivs  $y \notin A$ .

Att  $x \in A$  är ekvivalent med att singletonmängden  $\{x\}$  är en delmängd av  $A$ ,  $\{x\} \subset A$ , vilket också kan skrivas  $\{x\} \in \mathcal{P}(A)$ .

etymologi Giuseppe Peano (1858–1932) använde år 1889 symbolen  $\varepsilon$ , den grekiska bokstaven epsilon, för tillhörighet. Det är den första bokstaven i ordet  $\varepsilon\sigma\tau\acute{\iota}$ , *esti* 'är'. Bokstaven kan också skrivas  $\epsilon$ ; den stiliserades senare till  $\in$ .

jämför *delmängd* s. 100

## tomma mängden

definition den mängd som saknar element

- kommentar** Den tomma mängden betecknas  $\emptyset$  eller  $\{ \}$ . Den är ett neutralt element för unionsbildning:  $A \cup \emptyset = A$  för varje mängd  $A$ ; jämför med nollans roll för addition:  $x + 0 = x$ .
- etymologi** Symbolen  $\emptyset$  infördes 1939 med den matematiska betydelsen av Nicolas Bourbaki, pseudonym för en grupp matematiker. Ansvarig var André Weil (1906–1998), som uppgivit att han tog den från det norska alfabetet.

## transitiv relation

- definition** relation  $R$  sådan att det för alla  $x, y, z$  gäller att  $xRy$  och  $yRz$  medför  $xRz$
- exempel** Relationerna  $=$  (likhet),  $<$  (mindre än) och  $\leq$  (mindre än eller lika med) är alla transitiva.

## union

- synonym** **föreningsmängd**
- definition** (av två givna mängder) den mängd som består av de element som tillhör minst en av de givna mängderna
- kommentar** Unionen av  $A$  och  $B$  skrivs  $A \cup B$ . Unionen av en godtycklig familj av mängder kan också definieras på samma sätt. Unionen av mängderna  $A_j$ ,  $j \in J$ , skrivs  $\bigcup_{j \in J} A_j$ . Om indexmängden  $J$  är tom, gäller  $\bigcup_{j \in \emptyset} A_j = \emptyset$ .
- Tidigare talade man om summan av två mängder och skrev  $A+B$  för unionen. Med orden *föreningsmängd* och senare *union* undviker man nu sammanblandningen.
- jämför** *snitt* s. 103

## uppräknelig mängd

- definition** mängd som är ändlig eller kan sättas i en bijektiv relation till de naturliga talen
- jämför** *ändlig mängd* s. 105, *oändlig mängd* s. 102, *överuppräknelig mängd* s. 105

## urvalsaxiomet

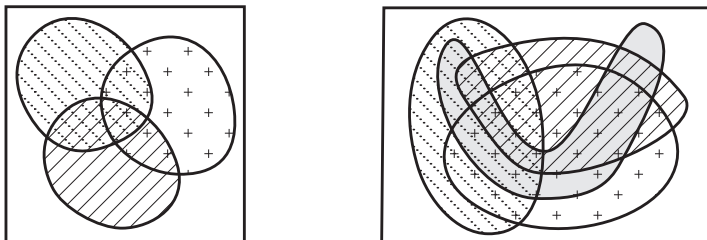
- definition** det axiom i mängdläran som säger att man för varje familj av icke-tomma mängder kan välja ut ett element i var och en av dem
- kommentar** Axiomet innebär att om en familj  $(A_x)_{x \in X}$  är given och ingen av mängderna  $A_x$  är tom, så finns det en avbildning  $f: X \rightarrow \bigcup_{x \in X} A_x$  sådan att  $f(x) \in A_x$  för alla  $x \in X$ . Av alla element i  $A_x$  kan man alltså välja ut ett, nämligen  $f(x)$ . Detta behövs i många men inte alla matematiska konstruktioner.

## Vennidiagram

- synonym** **mängddiagram**
- definition** diagram med vars hjälp mängder och förhållanden mellan dem åskådliggörs



**kommentar** Med hjälp av ett Venndiagram kan elementen i en mängd avgränsas från element som inte tillhör mängden, och snitt, unioner och komplement åskådliggöras.



Ett Venndiagram med tre mängder och ett med fyra. I det senare finns det  $2^4 = 16$  olika fält som kan innehålla element, nämligen, om mängderna kallas  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , mängderna  $A_1^{k_1} \cap A_2^{k_2} \cap A_3^{k_3} \cap A_4^{k_4}$ , där  $k_j = 1, -1$  och  $A_j^1 = A_j$ ,  $A_j^{-1} = \complement A_j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ .

**etymologi** Venndiagrammen är uppkallade efter John Venn (1834–1923).

### ändlig mängd

**definition** mängd som har ett ändligt antal element

**kommentar** Varje ändlig mängd är uppräknelig, men inte omvänt.

Antalet element i en ändlig mängd är ett naturligt tal,  $0, 1, 2, \dots$

**jämför** *oändlig mängd* s. 102

### överuppräknelig mängd

**definition** oändlig mängd som inte kan sättas i en bijektiv relation till de naturliga talen

**kommentar** Med hjälp av Cantors diagonalförfarande kan man visa att mängden av alla följder av nollor och ettor inte kan räknas upp med hjälp av de naturliga talen: till varje uppräknung kan man bilda den följd som skiljer sig från följden med nummer  $j$  på plats  $j$  och alltså inte är med i uppräknungen. Det följer av detta att inte heller de reella talen kan räknas upp. Detta innebär att  $\text{card } \mathbf{R} > \text{card } \mathbf{N}$ .

Mängden av alla avbildningar från en mängd  $X$  in i en mängd  $Y$  kan betecknas  $Y^X$ . Vi kan definiera potenser av kardinaltal genom att definiera  $(\text{card } Y)^{\text{card } X}$  som  $\text{card } (Y^X)$ . Med denna definition blir

$$\text{card } \mathbf{R} = \text{card } (\{0, 1\}^{\text{card } \mathbf{N}}) = \text{card } (\mathcal{P}(\mathbf{N})) = 2^{\text{card } \mathbf{N}} = 2^{\aleph_0}.$$

Mängden av alla funktioner  $\mathbf{R} \rightarrow \{0, 1\}$  får kardinaltalet

$$\text{card } (2^{\text{card } \mathbf{R}}) = \text{card } (\mathcal{P}(\mathbf{R})) = 2^{(2^{\aleph_0})} > \text{card } \mathbf{R} = 2^{\aleph_0},$$

ett ännu större kardinaltal. I själva verket gäller för alla mängder  $X$  att

$$2^{\text{card } X} = \text{card } (\{0, 1\}^X) = \text{card } (\mathcal{P}(X)) > \text{card } X.$$

## 6. Kombinatorik, följder och serier

### 6.1. Kombinatorik

#### binomialkoefficient

definition tal av formen  $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ , där  $n, k \in \mathbf{N}$ ,  $0 \leq k \leq n$

kommentar Dessa tal uppstår som koefficienter för  $x^k y^{n-k}$  då ett binom  $x + y$  höjs till en heltalig potens  $n \geq 0$ .

Binomialkoefficienten  $\frac{n!}{k!(n-k)!}$  skrivs  $\binom{n}{k}$  och utläses ” $n$  över  $k$ ”. Andra beteckningar är  $C(n, k)$  och  $C_n^k$ .

jämför *binomialsatsen* s. 106, *Pascals triangel* s. 107

#### binomialsatsen

definition den sats som säger att ett binom  $x + y$  upphöjt till ett naturligt tal  $n$  ges av summan

$$(x + y)^n = \sum \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

jämför *binomialkoefficient* s. 106, *Pascals triangel* s. 107

#### fakultet

definition (av ett positivt heltal  $n$ ) produkten av de på varandra följande heltalen från 1 till  $n$

$0!$  definieras som 1

kommentar Beteckningen  $n!$  utläses ” $n$ -fakultet”.

exempel  $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

historia Fakultetsbeteckningen  $!$  introducerades i början av 1800-talet.

etymologi Ordet *fakultet* kommer från latinets *facultas*, som bl. a. betyder ’möjlighet, det man kan göra’, av *facere* ’att göra’.

#### kombination

definition urval av element ur en mängd utan hänsyn till i vilken ordningen elementen plockas ut

kommentar Om  $0 \leq k \leq n$  så är antalet kombinationer av  $k$  element bland  $n$  element

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

exempel Om tre av åtta element skall väljas ut, så kan det ske på  $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!} = 56$  olika sätt.

jämför *binomialkoefficient* s. 106, *permutation* s. 108

#### kombinatorik

definition gren av matematiken som behandlar möjligheterna att välja ut och ordna elementen i en mängd

## lådprincipen

synonym	<b>Dirichlets lådprincip, duvslagsprincipen</b>
definition	den princip som säger att om $n + 1$ föremål skall placeras i $n$ lådor, så måste åtminstone en låda innehålla minst två av föremålen
exempel	Av åtta personer måste minst två vara födda på samma veckodag.
historia	Principen är uppkallad efter Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805—1859).

## magisk kvadrat

definition	kvadratisk tabell med olika positiva heltal sådana att summan av talen i varje rad, kolonn och de två diagonalerna är densamma
------------	--

4	9	2
3	5	7
8	1	6

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

Två magiska kvadrater. Den första har ordning tre och är känd i Kina som Lo-Shu-kvadraten sedan 650 f.Kr. Den andra, av ordning fyra, är från 900-talet, hittad i templet Parshvanath Jain i Khajuraho i Indien och känd som Chautisa Yantra.

etymologi	Ordet <i>magisk</i> kommer av det grekiska ordet <i>mágos</i> 'trollkarl, svartkonstnär'.
-----------	---

## multiplikationsprincipen

definition	den regel inom kombinatoriken som ger antal möjliga kombinationer när flera val görs efter varandra
kommentar	Antalet möjligheter i första valet multipliceras med antalet möjligheter i andra valet som multipliceras med antalet möjligheter i tredje valet o.s.v.
exempel	Man kan välja mellan 5 olika sorters tandkräm. Varje sort finns förpackad i 3 olika tubstorlekar. Man har då $5 \cdot 3 = 15$ olika tandkrämstuber att välja bland.
jämför	<i>träddiagram</i> s. 270

## Pascals triangel

definition	heltal uppställda i triangelform så att varje tal är summan av de båda närmaste talen i raden ovanför, där det översta talet är 1, och man tänker sig nollor utanför triangeln
kommentar	Talen är binomialkoefficienterna.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & \\
 & & & & & & 1 & & 2 & & 1 \\
 & & & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & & & & & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
 \end{array}$$

Pascals triangel.

historia Triangeln var bekant inom indisk, arabisk, persisk och kinesisk matematik under det tionde eller elfte århundradet, och i Italien under det sextonde. Al-Karajī (953—1029) kände till den, liksom troligen även ‘Umar Khayyām (1048—1131). Den kallas **Khayyāms triangel** i Iran, **Yang Huis triangel** i Kina (efter Yang Hui, 1238—1298), och **Tartaglias triangel** i Italien (efter Niccolò Fontana Tartaglia, 1500—1577). Blaise Pascal (1623—1662) behandlade triangeln i en uppsats 1654.

etymologi Triangeln är uppkallad efter Blaise Pascal.

jämför *binomialkoefficient* s. 106

## permutation

definition omordning av en följd

kommentar En följd med  $n$  element kan ordnas på  $n!$  olika sätt, d.v.s. antalet permutationer av en mängd med  $n$  element är  $n!$ . Permutationen är en bijektion, och det man räknar är alltså antalet bijektioner av en ändlig mängd på sig själv.

Antalet följder med  $k$  element utvalda bland  $n$  element (alltså med hänsyn till ordningen) är  $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ , och betecknas ibland  $P(n, k)$ . När  $k = n$  får man  $P(n, n) = n!$ .

etymologi *Permutation* kommer från latinets *permutatio* ’fullständig förändring’.

jämför *följd* s. 110, *kombination* s. 106

## 6.2. Följder och serier

### aritmetisk serie

definition serie sådan att dess termer bildar en aritmetisk talföljd

kommentar Summan av en ändlig aritmetisk serie ges av formeln

$$\sum_{j=0}^n a_j = \sum_{j=0}^n (a_0 + jd) = (n+1) \frac{a_0 + a_n}{2}$$

(antalet termer gånger medelvärdet av första och sista termen).

jämför *aritmetisk talföljd* s. 109

## aritmetisk talföljd

definition talföljd sådan att differensen<sub>1</sub> mellan ett godtyckligt element (utom det första) och närmast föregående alltid är lika stor

kommentar En aritmetisk talföljd kan ges genom formeln  $a_j = a_0 + jd$ , där  $d$  är differensen.

exempel Följden (2, 6, 10, 14, 18, 22), som har differensen 4.

etymologi Adjektivet *aritmetisk* förklaras av att varje term utom den första och den sista är lika med det aritmetiska medelvärdet av sina grannar.

## binomialserie

definition serie som fås av utvecklingen av en potens av binomet  $1 + z$

kommentar Om  $a$  är ett godtyckligt komplext tal, så kan potensen  $(1 + z)^a$  av binomet  $1 + z$  utvecklas i en serie som konvergerar för alla komplexa tal  $z$  med  $|z| < 1$ :

$$(1 + z)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} z^k.$$

Här är  $\binom{a}{k} = a(a-1)(a-2)\cdots(a-k+1)/k!$ . Om  $a$  är ett naturligt tal, så är serien ändlig och utvecklingen gäller för alla komplexa tal  $z$ . Koefficienterna  $\binom{a}{k}$  för naturliga tal  $a$  och  $k$  återfinns vi i Pascals triangel.

jämför *binomialkoefficient* s. 106, *kvadreringsreglerna* s. 93, *Pascals triangel* s. 107

## element i en följd

definition följdens värden

kommentar En följd  $(a_j)$  säges ha elementen  $a_j$ .

## faltning

definition den operation som till två givna talföljder ordnar deras faltningsprodukt

etymologi Ordet *faltning* kommer av det tyska ordet *Faltung* med samma betydelse, bildat till verbet *falten* 'att vika ihop'.

## faltningsprodukt

definition (av två talföljder) talföljd vars element med index  $j$  är summan, om den existerar, av alla produkter av tal i de givna talföljderna vilkas index har summan  $j$

kommentar Definitionen innebär uttryckt med formler att faltningsprodukten av två talföljder  $(a_j)_{j \in \mathbf{Z}}$  och  $(b_j)_{j \in \mathbf{Z}}$  är talföljden  $(c_j)_{j \in \mathbf{Z}}$  definierad av  $c_j = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k b_{j-k}$ ,  $j \in \mathbf{Z}$ , om summan existerar.

Om talföljderna  $(a_j)$  och  $(b_j)$  är sådana att  $a_j = b_j = 0$  då  $j \leq m$  för något tal  $m \in \mathbf{Z}$ , så är summan ändlig och faltningsprodukten existerar.

jämför *glidande medelvärde* s. 43

## Fibonaccis talföljd

definition följden 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

kommentar Följden definieras rekursivt av att  $F(0) = 0$ ,  $F(1) = 1$  och  $F_{j+2} = F_j + F_{j+1}$ ,  $j \in \mathbf{N}$ , och ges explicit av formeln

$$F_j = \frac{\alpha^j - \beta^j}{\sqrt{5}}, \quad j \in \mathbf{N},$$

där  $\alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) > 1$  och  $\beta = \frac{1}{2}(-\sqrt{5} + 1) < 0$  är de två rötterna till ekvationen  $1 + x = x^2$ .

historia Fibonaccis talföljd är uppkallad efter Leonardo av Pisa, känd som Fibonacci (troligen omkring 1170 — efter 1240).

jämför *gyllene snittet* s. 178, *rekursionsformel* s. 112

## följd

definition funktion definierad på ett intervall av heltal

kommentar Funktionsvärdena kallas ofta *följdens element* i analogi med en mängds element. Oftast skrivs funktionsvärdet i punkten  $j \in \mathbf{Z}$  som  $a_j$  i stället för det annars vanliga  $a(j)$ .

En följd kan vara ändlig eller oändlig. I det första fallet kan den anges som  $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$  eller  $(a_j)_{j=0}^n$ ; i det andra som  $(a_j)_{j \in \mathbf{N}}$ ,  $(a_0, a_1, a_2, \dots)$  eller  $(a_j)_{j \in \mathbf{Z}}$ ,  $(\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots)$ .

En följd med två element kallas ett *ordnat par*, en följd med tre element en *trippel*.

exempel De ordnade paren  $(1, 3)$  och  $(3, 1)$  är olika, medan mängderna  $\{1, 3\}$  och  $\{3, 1\}$  är lika.

## geometrisk serie

definition serie sådan att dess termer bildar en geometrisk talföljd

kommentar Summan av en ändlig geometrisk serie  $\sum_{j=0}^n a_j = \sum_{j=0}^n a_0 k^j$  ges av formeln

$$\sum_{j=0}^n a_j = a_0 \frac{k^{n+1} - 1}{k - 1},$$

förutsatt att kvoten  $k$  inte är 1.

Summan av en oändlig geometrisk serie  $\sum_0^\infty a_j = \sum_0^\infty a_0 k^j$  är  $a_0/(1 - k)$  förutsatt att  $|k| < 1$ .

## geometrisk talföljd

definition talföljd sådan att kvoten<sub>1</sub> mellan vilket element som helst (utom det första) och det närmast föregående alltid är lika stor

kommentar En geometrisk talföljd kan ges genom formeln  $a_j = a_0 k^j$ , där  $k$  är kvoten.

exempel  $(1, 1/3, 1/9, 1/27, 1/81)$ , som har kvoten  $1/3$ .

- historia Användning av geometriska talföljder med kvoten 2 och  $1/2$  finns belagd i egyptisk matematik från omkring 1800 f. Kr. De användes vid multiplikation respektive division.
- etymologi Adjektivet *geometrisk* förklaras av att varje term utom den första och den sista är lika med det geometriska medelvärdet av sina grannar.

## harmonisk serie

- definition serie sådan att dess termer bildar en harmonisk talföljd
- kommentar Ibland avser man med termen endast serien  $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \dots$ , det enklaste exemplet på en harmonisk serie.

## harmonisk talföljd

- definition talföljd sådan att inverserna av elementen bildar en aritmetisk talföljd
- kommentar Inversen av elementen skall tas i multiplikativ mening, d.v.s. det är  $1/a_j$  som skall bilda en aritmetisk följd.
- exempel  $(1/2, 1/6, 1/10, 1/14, 1/18, 1/22)$ .
- etymologi Förklaringen till att följden kallas *harmonisk* är att den grundfrekvens som en svängande sträng alstrar är omvänt proportionell mot dess längd.
- jämför *aritmetisk talföljd* s. 109, *harmonisk serie* s. 111

## index

- definition tal som fogas till bokstäver för att skilja dem åt
- kommentar Man säger att bokstäverna är *indicerade*. Beteckning med index är särskilt praktisk då man betecknar olika storheter som på något sätt hör samman, t. ex. en följd av tal.  
Ett index kan skrivas nedtill till höger eller upptill till höger; undantagsvis på andra platser.  
Termen har en annan betydelse i statistiken.
- exempel I följden  $a_1, a_2, a_3$  är talen 1, 2 och 3 index.
- etymologi *Index* kommer från latinets *index* 'pekfinger, markör'.
- jämför *konsumentprisindex* s. 276

## Kroneckerdelta

- definition (på en given mängd  $X$ ) den funktion på  $X \times X$  som tar värdet 1 när argumenten är lika och annars värdet 0
- kommentar Kroneckerdelta skrivs oftast  $\delta_{xy}$  och man har alltså  $\delta_{xx} = 1$ ,  $\delta_{xy} = 0$  då  $x \neq y$ ,  $x, y \in X$ .
- etymologi Kroneckerdelta är uppkallat efter Leopold Kronecker (1823—1891).
- jämför *Diracmåttet* s. 142

## numerisk serie

- definition serie i vilken termerna är tal

## oordnat par

- definition mängd med ett eller två element
- exempel Av tre element kan man bilda nio ordnade par, sex oordnade par och tre mängder med två element.
- jämför *ordnat par* s. 112

## ordnat par

- definition följd med två element
- kommentar Ett ordnat par skrivs  $(a, b)$  och utläses ”det ordnade paret  $a$   $b$ ” eller kortare ”paret  $a$   $b$ ”. Två par  $(a, b)$  och  $(c, d)$  är lika om och endast om  $a = c$  och  $b = d$ . Således är  $(1, 2) \neq (2, 1) \neq (2, 1, 2)$ .
- jämför *mängd* s. 17, *ordnat par* s. 112, *talpar* s. 113

## rekursion

- definition metod att beräkna en funktions värde för ett visst argument genom att utnyttja dess värden för argument som är mindre än det aktuella
- kommentar En viktig klass av funktioner är de **rekursiva**.
- etymologi *Rekursion* kommer från latinets *recursio* ’återvändande’, substantiv till *recurere* ’att återvända, att skynda tillbaka’.

## rekursionsformel

- definition formel för bestämning av en följd varvid varje element beräknas ur ett eller flera av de föregående elementen
- exempel Fibonaccis talföljd kan definieras rekursivt genom att  $F_{j+2} = F_{j+1} + F_j$ ,  $j \in \mathbf{N}$ , med begynnelsevärdena  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$ .
- jämför *Fibonaccis talföljd* s. 110

## serie

- definition addition av termer i en talföljd
- kommentar En serie är en talföljd där man avser att, om möjligt, summera alla elementen, som kallas seriens *termer*.  
Serien med termerna  $a_0, a_1, a_2, \dots$  skrivs  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ .  
Om summan existerar, så skrivs även den  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ . Man måste alltså förstå när det är serien själv eller dess summa som åsyftas.
- jämför *talföljd* s. 112

## talföljd

- definition följd av tal
- exempel Den ändliga följden  $(2, 3, 5, 7)$  av de fyra första primtalen.  
Den oändliga följden  $(2, 3, 5, 7, 11, \dots)$  av alla primtal.
- jämför *följd* s. 110, *aritmetisk talföljd* s. 109, *geometrisk talföljd* s. 110, *harm-onisk talföljd* s. 111



**talpar**

- definition ordnat par av tal
- kommentar En punkts läge i ett plan kan anges med ett talpar. Det första talet är då  $x$ -koordinaten och det andra  $y$ -koordinaten.
- exempel  $(4, 6)$ , som kan utläsas ”punkten fyra sex”.

**6.3. Gränsvärden****divergent serie**

- definition serie som inte är konvergent
- exempel Serien  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$  är konvergent då  $-1 < x < 1$  och divergent för alla andra reella tal  $x$ .
- etymologi Ordet *divergent* är sannolikt bildat som antonym till *konvergent* med prefixet *dis-* ’isär-’.
- jämför *divergent talföljd* s. 113, *konvergent serie* s. 114, *konvergent talföljd* s. 114

**divergent talföljd**

- definition talföljd som inte är konvergent
- exempel Följden  $((-1)^k)_{k=0}^{\infty}$  är divergent; den oscillerar mellan 1 och  $-1$ . Följden  $(k)_{k=0}^{\infty}$  är också divergent; den går mot  $+\infty$ , som inte är ett tal.

 $e$ 

- definition gränsvärdet av talföljden  $(1 + 1/n)^n$  då  $n$  går mot oändligheten
- kommentar Talet  $e$  (ibland skrivet  $e$ ) är irrationellt, till och med transcendent. Dess tio första siffror är 2,7 1828 1828. Talet är basen för de naturliga logaritmerna.  
Funktionen  $x \mapsto a^x$ , där  $a$  är en positiv konstant, har derivatan  $x \mapsto a^x \ln a$ . Det betyder att den är lika med sin egen derivata om och endast om  $a = e$ .
- historia Symbolen  $e$  introducerades omkring 1730 av Leonhard Euler som symbol för det tal för vilken logaritmen är 1. Först i slutet av 1800-talet visade Charles Hermite (1822–1901) att det är ett transcendent tal.

**gränsvärde**

- synonym **limes**
- definition det värde mot vilket en talföljd eller funktion närmar sig när argumentet närmar sig en viss punkt
- kommentar Gränsvärdet av en talföljd  $(a_j)_{j \in \mathbf{N}}$  när  $j$  växer skrivs

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} a_j$$

och utläses ”limes av  $(a_j)$  då  $j$  går mot oändligheten”. På liknande sätt betecknas gränsvärdet av en funktion  $f$  när  $x$  närmar sig  $a$  med

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

och utläses ”limes av  $f$  av  $x$  då  $x$  går mot  $a$ ”. Man säger också ” $f(x)$  går mot  $b$  då  $x$  går mot  $a$ ” om gränsvärdet betecknas  $b$ ; med symboler  $f(x) \rightarrow b$  då  $x \rightarrow a$ .

Man definierar gränsvärdet så här: gränsvärdet av följderna  $(a_j)_{j=0}^{\infty}$  då  $j$  går mot oändligheten,  $\lim_{j \rightarrow \infty} a_j$ , existerar och är lika med  $b$  om och endast om det till varje positivt tal  $\varepsilon$  finns ett index  $m$  sådant att  $|a_j - b| \leq \varepsilon$  då  $j \geq m$ . För funktioner blir det: gränsvärdet av  $f$  då  $x$  går mot  $a$  existerar och är lika med  $b$  om och endast om det till varje positivt tal  $\varepsilon$  finns ett positivt tal  $\delta$  sådant att  $|f(x) - b| \leq \varepsilon$  då  $|x - a| \leq \delta$ . Det finns sedan varianter av denna definition, till exempel när  $x \rightarrow +\infty$  eller när  $b = +\infty$  eller  $b = -\infty$ .

historia Det var först på 1820-talet genom arbeten av Augustin Louis Cauchy (1789—1857) som gränsvärdesbegreppet fick en klar innebörd.

etymologi *Limes* är det latinska ordet för gräns.

## konvergent serie

definition serie vars följd av delsummor är konvergent

kommentar Definitionen innebär för en serie  $\sum_0^{\infty} a_j$  att det finns ett tal  $s$ , kallat *seriens summa*, sådant att det till varje positivt tal  $\varepsilon$  finns ett tal  $m$  så att alla delsummor  $\sum_{j=0}^k a_j$  med  $k \geq m$  uppfyller  $\left| \sum_{j=0}^k a_j - s \right| \leq \varepsilon$ .

En serie sägs vara **absolut konvergent** om absolutbeloppen av seriens termer konvergerar. Absolut konvergens medför konvergens, men inte omvänt. En serie sägs vara **betingat konvergent** om serien är konvergent men inte absolut konvergent.

etymologi Ordet *konvergent* kommer från det latinska ordet *convergere* ’att vetta åt samma håll’.

jämför *divergent serie* s. 113, *konvergent talföljd* s. 114

## konvergent talföljd

definition talföljd som har ett gränsvärde

kommentar Definitionen innebär för en talföljd  $(t_k)_0^{\infty}$  att det finns ett tal  $t$  sådant att det till varje positivt tal  $\varepsilon$  finns ett index  $m$  sådant att  $|t_k - t| \leq \varepsilon$  för alla index  $k \geq m$ .

## limes inferior

synonym **undre gränsvärde**

definition det minsta värde mot vilket en delföljd av en talföljd eller av en funktions värden närmar sig när argumentet närmar sig en viss punkt

kommentar Limes inferior av  $f$  när  $x$  närmar sig  $a$  betecknas

$$\liminf_{x \rightarrow a} f(x) \text{ eller } \underline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x).$$

Det finns alltså en följd  $(x_j)_{j \in \mathbf{N}}$  sådan att  $x_j \rightarrow a$  då  $j \rightarrow +\infty$  och  $f(x_j) \rightarrow \liminf_{x \rightarrow a} f(x)$ , men för alla följder  $(x_j)_{j \in \mathbf{N}}$  sådana att  $x_j \rightarrow a$  då  $j \rightarrow +\infty$  och  $(f(x_j))_{j \in \mathbf{N}}$  har ett gränsvärde gäller att  $\lim_{j \rightarrow +\infty} f(x_j) \geq \liminf_{x \rightarrow a} f(x)$ .

## limes superior

- synonym **övre gränsvärde**  
 definition det största värde mot vilket en delföljd av en talföljd eller av en funktions värden närmar sig när argumentet närmar sig en viss punkt  
 kommentar Limes superior av  $f$  när  $x$  närmar sig  $a$  betecknas

$$\limsup_{x \rightarrow a} f(x) \text{ eller } \overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x).$$

## serieutveckling

- definition serie som framställer en funktion  
 jämför *Maclaurinserie* s. 166, *Taylorserie* s. 168

## summa av en serie

- definition det tal som seriens delsummor konvergerar mot  
 exempel Serien  $\sum_{j=0}^{\infty} x^j$  har summan  $1/(1-x)$  om  $x$  är ett tal med absolutbelopp mindre än 1. Om  $|x| \geq 1$ , så konvergerar inte serien och man kan inte (på något enkelt sätt) ge den en summa.

## 7. Matematisk argumentation

### 7.1. Logik

#### avgörbar

**definition**    ⟨om ett påstående i en teori⟩ sådant att man med hjälp av en algoritm kan komma fram till huruvida det är sant eller falskt i teorin;  
 ⟨om en teori⟩ sådan att varje påstående formulerat i teorin är avgörbart

**exempel**        Satskalkylen är avgörbar.

Predikatalkalkylen är inte avgörbar (det finns visserligen ett bevis till varje sant påstående, men detta kan inte hittas med en algoritm).  
 Mängdteorin med de vanliga axiomen är inte avgörbar.

#### bunden variabel

**definition**    variabel i ett logiskt eller matematiskt uttryck som är bunden av en kvantifikator eller en operation med avseende på variabeln

**kommentar**    De kvantifikatorer som är vanligast är *för alla* och *det finns*, och de operationer som är vanligast är summering med hjälp av summatecken och integrering. Om en bunden variabel byts ut, så ändras inte utsagens betydelse.

**exempel**        I följande uttryck är  $x$  och  $y$  bundna variabler, medan  $a$  är en fri variabel. Utsagan *Det finns ett tal  $x$  sådant att  $x^2 = a$*  är ekvivalent med utsagan *Det finns ett tal  $y$  sådant att  $y^2 = a$* .

I uttrycket

$$\sum_{j=1}^3 j^2 = \sum_{k=1}^3 k^2 = 14$$

är  $j$  och  $k$  bundna variabler.

I uttrycket

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(t)dt$$

är  $x$  och  $t$  bundna variabler, medan  $a$  är fri.

**jämför**        *fri variabel* s. 118

#### disjunktion<sub>1</sub>

**definition**    ⟨givet två utsagor  $P$  och  $Q$ ⟩ utsagan  $P$  eller  $Q$

**kommentar**    Disjunktionen är sann om  $P$  eller  $Q$  eller båda är sanna, annars falsk. Ordet *eller* skall alltså här tolkas inkluderande i den meningen att disjunktionen är sann när båda de ingående utsagorna är sanna. En exkluderande disjunktion kan skrivas  $P \nrightarrow Q$ ; den är falsk när både  $P$  och  $Q$  är sanna.

Ett vanligt skrivsätt är  $P \vee Q$ .

**etymologi**     *Disjunktion* kommer av latinets *disiunctio* 'åtskiljande', bildat av prefixet *dis-* 'isär-' och *iungere* 'att förena', således som motsatsord till *coniunctio*.

## disjunktion<sub>2</sub>

- definition den operation som utgående från två utsagor ger deras disjunktion<sub>1</sub>
- kommentar Man kan jämföra med operationerna addition, subtraktion, multiplikation och division, och deras resultat, summa, differens, produkt, kvot.

## disjunktionstecken

- definition Tecknet  $\vee$

## ekvivalens<sub>1</sub>

- definition  $\langle$ givet två utsagor  $P$  och  $Q$  $\rangle$  utsagan  $P$  om och endast om  $Q$
- kommentar Ekvivalensen är sann om  $P$  och  $Q$  båda är sanna eller båda falska, annars falsk. Ett vanligt skrivsätt är  $P \Leftrightarrow Q$ .
- kommentar Man säger att utsagorna är **ekvivalenta**.
- etymologi *Ekvivalent* kommer från de två latinska orden *aequus* 'lika' och *valere* 'att vara värd'.

## ekvivalens<sub>2</sub>

- definition den operation som från två utsagor ger deras ekvivalens<sub>1</sub>

## ekvivalenspil

- definition dubbelriktad pil som anger att två utsagor är ekvivalenta
- kommentar Pilen skrivs vanligen  $\Leftrightarrow$  och kan läsas "är ekvivalent med".
- exempel  $x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x = 3 \text{ eller } x = -3)$ .

## ekvivalensrelation

- definition relation som är reflexiv, symmetrisk och transitiv
- kommentar Definitionen innebär, om vi kallar relationen för  $R$ , att  $xRx$  för alla  $x$ ; att  $xRy$  medför  $yRx$  för alla  $x$  och  $y$ ; samt att  $xRy$  och  $yRz$  medför  $xRz$  för alla  $x, y, z$ .
- exempel Likhet.  
Kongruens modulo något tal.  
Relationen mellan två geometriska figurer att vara likformiga.

## entitet

- definition avgränsat (matematiskt) objekt som uppvisar vissa egenskaper
- kommentar Termen *entitet* används ofta på samma sätt som det äldre *substans*, i betydelsen 'något objektivt underliggande som bär upp såväl specifika som tillfälliga egenskaper'.
- exempel Tal, triangel och täljare är entiteter, medan udda, liksidig och dividera inte är det.

## falsk

- definition ej sann

kommentar I satskalkylen kan en utsaga anta sanningsvärdena *sann* och *falsk*.  
 jämför *sann*<sub>1</sub> s. 120, *sann*<sub>2</sub> s. 120

## fri variabel

definition variabel i ett logiskt eller matematiskt uttryck som inte är bunden  
 exempel I utsagan *Det finns ett  $x$  sådant att  $x^2 = a$*  är  $a$  en fri variabel,  $x$  en bunden variabel. Utsagan är inte ekvivalent med *Det finns ett  $x$  sådant att  $x^2 = b$* .  
 jämför *bunden variabel* s. 116

## implikation<sub>1</sub>

definition  $\langle$ givet två utsagor  $P$  och  $Q$  $\rangle$  utsagan  $P$  *medför*  $Q$   
 kommentar Implikationen är sann om  $P$  är falsk eller  $Q$  är sann, annars falsk. Den är således falsk endast när  $P$  är sann och  $Q$  är falsk: man tolkar implikationen  $P$  *medför*  $Q$  som  $\neg P \vee Q$ .  
 Ett vanligt skrivsätt är  $P \Rightarrow Q$ .  
 kommentar Man säger att den första utsagan *implicerar* eller *medför* den andra. Den första utsagan kallas för *hypotes* eller *försats* och den andra för *slutsats*.  
 etymologi *Implicera* kommer från latinets *implicare* 'infoga, inveckla' av *plicare* 'att vika, att veckla'.  
 jämför *ekvivalens*<sub>1</sub> s. 117, *falsk rot* s. 95

## implikation<sub>2</sub>

definition den operation som från två utsagor ger deras implikation<sub>1</sub>

## implikationspil

definition pil som anger att ett logiskt uttryck implicerar ett annat, d.v.s. att det andra följer av det första  
 kommentar Implikationspilen skrivs vanligen  $\Rightarrow$ .  
 exempel  $x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 9$  (omvändningen gäller inte).

## kalkyl

definition  $\langle$ i logiken $\rangle$  system av utsagor med regler för hur de får se ut och hur de kan härledas  
 kommentar För att beskriva en kalkyl fordras att man anger de tecken som får förekomma; regler för vilka sammanställningar av tecknen som är acceptabla (sådana sammanställningar kallas ofta *välformade*); samt vilka axiomen är och vilka härledningsreglerna är.  
 jämför *satskalkyl* s. 121, *predikatalkyl* s. 120

## konjunktion<sub>1</sub>

definition  $\langle$ inom logiken; givet två utsagor  $P$  och  $Q$  $\rangle$  utsagan  $P$  och  $Q$   
 kommentar Konjunktionen är sann om  $P$  och  $Q$  båda är sanna, annars falsk. Vanliga skrivsätt är  $P \wedge Q$  och  $P \& Q$ .

etymologi *Konjunktion* kommer av latinets *coniunctio* 'förening, förbindelse', bildat av prefixet *con-* 'samman-' och *iungere* 'att förena'.

## konjunktion<sub>2</sub>

definition ⟨inom logiken⟩ den operation som från två givna utsagor ger deras konjunktion<sub>1</sub>

## konjunktionstecken

definition tecknet  $\wedge$

kommentar Ibland skriver man  $\&$ .

## kvantifikator

synonym **kvantor**

definition logisk operation som binder en fri variabel

kommentar De vanligaste kvantifikatorerna är *allkvantifikatorn*, som ofta betecknas  $\forall$  och uttalas "för alla", *existenskvantifikatorn*, som ofta betecknas  $\exists$  och uttalas "det finns" eller "det finns minst ett element", och kvantifikatorn *det finns exakt ett element*, som ibland betecknas  $\exists!$ .

exempel *För alla heltal  $n$  finns det ett primtal  $p$  som är större än  $n$ . Här binds variablerna  $n$  och  $p$  av var sin kvantifikator. Ordningen är viktig: utsagan *Det finns ett primtal  $p$  sådant att för alla heltal  $n$  gäller att  $p$  är större än  $n$*  är inte ekvivalent med den första.*

## logik

definition slutledningskonst

kommentar Logiken studeras både som en gren av filosofin och som en gren av matematiken. Den sistnämnda kallas *symbolisk logik* eller *matematisk logik*.

historia Logiken som vetenskap grundades av Aristoteles på 300-talet f. Kr. Han beskrev en grupp av slutledningar, som han kallade *sylogismer*, och gav en uttömmande och korrekt beskrivning av de möjliga syllogismerna.

etymologi *Logik* kommer av grekiska *logiké* 'konsten att resonera', bildat av *lógos* i betydelsen 'resonemang'.

## logisk följd

definition ⟨från givna utsagor⟩ påstående som kan härledas med hjälp av logik från de givna utsagorna

kommentar Om de givna utsagorna är sanna, så är följderna också sanna. Om de givna utsagorna är falska, så är följderna inte nödvändigtvis falska.

jämför *slutledning* s. 121

## logisk operation

definition någon av operationerna konjunktion<sub>2</sub>, disjunktion<sub>2</sub>, implikation<sub>2</sub>, ekvivalens<sub>2</sub>, negation<sub>2</sub>, användning av en kvantifikator

## motsägelse

- definition förekomsten av två oförenliga påståenden
- kommentar Om man inom en teori kan härleda en motsägelse, så är varje påstående en sats inom teorin, och denna är därmed ointressant. Det är därför viktigt att, om möjligt, bevisa att en teori är motsägelsefri. Detta är dock omöjligt att göra inne i en någorlunda rik matematisk teori: Kurt Gödel (1906—1978) bevisade 1931 att om en sådan någorlunda avancerad teori innehåller ett bevis för sin egen motsägelsefrihet, så innehåller den också en motsägelse.

## negation<sub>1</sub>

- definition  $\langle$ givet en utsaga  $P$  $\rangle$  utsagan *icke*  $P$
- kommentar Negationen är sann om  $P$  är falsk, annars falsk. Ett vanligt skrivsätt är  $\neg P$ .

## negation<sub>2</sub>

- definition den operation som från en utsaga  $P$  ger dess negation<sub>1</sub>

## predikat kalkyl

- definition satskalkylen utökad med kvantifikatorerna *för alla* och *det finns* som får verka på predikat, d.v.s. egenskaper
- exempel Påståendet  $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x P(x) \Rightarrow \forall x Q(x))$  är en sann sats inom predikat kalkylen.

## påstående

- synonym **utsaga**
- definition uttryck som yttrar sig om de ingående entiteterna
- exempel  $3 + 5 = 7$  och  $3 + 5 = 8$  är påståenden;  $3 + 5$  är ett uttryck men inte ett påstående.

## sann<sub>1</sub>

- synonym **faktiskt sann**
- definition överensstämmande med verkligheten
- kommentar Det finns kanske flera verkligheter – eller ingen.
- jämför *falsk* s. 117

## sann<sub>2</sub>

- synonym **logiskt sann**
- definition  $\langle$ om ett påstående $\rangle$  sant<sub>1</sub> oberoende av hur verkligheten är beskaffad
- kommentar I satskalkylen kan en utsaga anta sanningsvärdena *sann* och *falsk*.
- jämför *falsk* s. 117

## sanningsvärdestabell

- definition tabell inom satskalkylen som visar en utsagas sanningsvärde (sant eller falskt) för alla möjliga kombinationer av sanningsvärden hos de ingående variablerna



exempel För påståendet  $P \Rightarrow Q$  är sanningsvärdestabellen:

$P$	$Q$	$P \Rightarrow Q$
$s$	$s$	$s$
$s$	$f$	$f$
$f$	$s$	$s$
$f$	$f$	$s$

Med två ingående satser finns det 4 möjliga par av sanningsvärden för de ingående variablerna och således  $2^4 = 16$  olika sanningsvärdestabeller. Åtta av dem är:

$P \vee (\neg P)$	$P \vee Q$	$Q \Rightarrow P$	$P$	$P \Rightarrow Q$	$Q$	$P \Leftrightarrow Q$	$P \wedge Q$
$s$	$s$	$s$	$s$	$s$	$s$	$s$	$s$
$s$	$s$	$s$	$s$	$f$	$f$	$f$	$f$
$s$	$s$	$f$	$f$	$s$	$s$	$f$	$f$
$s$	$f$	$s$	$f$	$s$	$f$	$s$	$f$

De övriga åtta tabellerna är för dessas negationer, d.v.s.  $(\neg P) \wedge P$ ,  $(\neg P) \wedge (\neg Q)$ ,  $Q \wedge (\neg P)$ ,  $\neg P$ ,  $P \wedge (\neg Q)$ ,  $\neg Q$ ,  $\neg(P \Leftrightarrow Q)$  och  $(\neg P) \vee (\neg Q)$ .

## satskalkyl

definition kalkyl för de logiska operationerna konjunktion<sub>2</sub> och negation<sub>2</sub>

kommentar De logiska operationerna disjunktion<sub>2</sub>, implikation<sub>2</sub> och ekvivalens<sub>2</sub> omfattas också av satskalkylen, eftersom de kan uttryckas med hjälp av konjunktion<sub>2</sub> och negation<sub>2</sub>. Satskalkylen är avgörbar, eftersom alla utsagor kan analyseras fullständigt med sanningsvärdestabeller av förutsebar storlek.

exempel Utsagorna  $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$  och  $\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q)$ .

## sluten utsaga

definition utsaga utan fria variabler

exempel För alla  $a$  finns det ett  $y$  sådant att  $y^2 = a$ . Här är variablerna  $a$  och  $y$  bundna.

jämför *öppen utsaga* s. 121, *bunden variabel* s. 116, *fri variabel* s. 118

## slutledning

definition förlopp varvid man från ett eller flera antaganden logiskt härleder en eller flera slutsatser

jämför *logisk följd* s. 119

## öppen utsaga

definition utsaga med minst en fri variabel

exempel Det finns ett  $y$  sådant att  $y^2 = a$ . Här är variabeln  $a$  fri, variabeln  $y$  bunden.

jämför *sluten utsaga* s. 121

## 7.2. Matematiska modeller

### exempel

definition	enskilt fall som illustrerar en utsaga
kommentar	Ett exempel konkretiserar ett begrepp eller ett påstående.
exempel	Talet 5 är ett naturligt tal. En kvadrat med sidan 3 cm har arean $9 \text{ cm}^2$ .
etymologi	Ordet <i>exempel</i> kommer från latinets <i>exemplum</i> 'exempel' bildat av verbet <i>eximere</i> 'att ta ut'.

### matematisk modell

definition	matematisk struktur eller teori som avser att kvalitativt eller kvantitativt återge viktiga aspekter av verkligheten
kommentar	En matematisk modell kan vara en ordinär eller partiell differentialekvation, det vanligaste verktyget för att matematiskt beskriva förändring. Den kan vara ett dynamiskt system som återger förändringen stegvis. Den kan slutligen vara en hel matematisk teori, som teorin för operatorer i Hilbertrum, en modell för kvantmekaniken.
exempel	Låt oss ta jordytan som en del av verkligheten som vi vill beskriva med en matematisk modell. Om den del vi vill beskriva är en stad, så är ett plan en lämplig modell för den delen av jordytan. Denna krökning är så obetydlig att den inte förstör en vanlig turistkarta över staden. Men för större delar av jordytan är krökningen så stor att vi måste ta en sfär som modell. Denna modell duger för de flesta kartor, men om man vill mäta mycket noggrant, så fordras det att man tar hänsyn till att jorden är avplattad vid polerna, vilket innebär att sfären måste ersättas av en ellipsoid (medelovaloiden) som modell. Ibland räcker inte heller det, utan man måste ta hänsyn till att massfördelningen i jorden är ojämn, varför man sätter upp en något bucklig yta (kallad geoid) som en fjärde modell. Slutligen återstår finstrukturen med berg, dalar och havsdjup om man vill ha en ännu noggrannare beskrivning.

Som framgår av detta exempel kan en matematisk modell vara mer eller mindre komplicerad, och mer eller mindre noggrann. Men det är inte så att den mer förfinade modellen är den bästa för sitt ändmål. Att rita en turistkarta över ett mindre landområde med hänsyn till ellipsoidens avplattning är en komplikation som inte ger någon utdelning.

Ett klassiskt exempel på en matematisk modell är den differentialekvation som beskriver radioaktivt sönderfall. Den är  $u' = -au$ , där  $u$  är utstrålningen hos ett stycke materia,  $t$  tiden, och  $a$  en konstant. Utstrålningen minskar under en kort tid med en andel  $a$  per tidsenhet.

Ekvationen är lätt att lösa, och man ser att utstrålningen vid tiden  $t \geq 0$  är  $u(t) = u(0)e^{-at}$ . Halveringstiden blir  $a^{-1} \ln 2$ .

Denna modell används med framgång i många situationer, till exempel i kol-14-metoden för att bestämma organiska materials ålder.

Men ändå kan man inte säga att den är en perfekt modell. Ty den materia vi startar med innehåller blott ändligt många partiklar, och efter en viss ändlig tid kommer inte någon mer heliumkärna att sändas ut (om vi nu studerar alfa-strålning). När den sista heliumkärnan skickats ut, så borde vi ha  $u(t) = 0$ . Men enligt modellen kommer vi att för all framtid ha  $u(t) > 0$ , d.v.s. strålningen kommer aldrig att upphöra helt.

Modellen återger med hög noggrannhet strålningen så länge antalet partiklar är stort, men kan inte göra det när tiden blivit så långt framskriden att blott ett litet antal partiklar återstår. Denna bristande överensstämmelse beror på att modellen bygger på reella tal, medan verkligheten i detta fall är diskret<sub>1</sub>: antalet heliumkärnor är ett naturligt tal, inte ett godtyckligt positivt tal som i modellen. Hur skall man definiera halveringstiden om man startar med 75 heliumkärnor?

### motexempel

- definition** enskilt fall som motsäger en utsaga
- kommentar** Om det finns ett enda motexempel till en utsaga eller en teori, så visar det att utsagan respektive teorin inte kan vara sann. Ett exempel kan däremot inte visa att en teori är sann.
- exempel** Utsagan *Alla primtal är udda* är falsk, eftersom det finns ett motexempel: talet 2.

### Ockhams rakkniv

- definition** tankeprincip som innebär att man inte bör konstruera eller införa flera begrepp eller göra flera antaganden än nödvändigt för att beskriva eller förklara ett fenomen.
- historia** Principen är uppkallad efter William av Ockham (cirka 1285 — cirka 1349), teolog och logiker. Hans rakknivsprincip kommer bl. a. till uttryck i citaten ”mångfald skall inte förutsättas om det inte är nödvändigt” och ”det är meningslöst att göra med flera ting vad man kan göra med färre”.

## 7.3. Matematiska resultat

### axiom

- synonym** **postulat** (äldre synonym)
- definition** grundförutsättning i en matematisk teori
- kommentar** En matematisk teori består av satser som bevisas gälla under vissa förutsättningar. Förutsättningar som gäller för hela teorin kallas axiom. De är inte logiskt härledda från andra påståenden inom teorin, utan tjänar som utgångspunkter för denna.

Man har tidigare ofta sagt att axiomen är ”självklara sanningar”. Detta uttryckssätt är missvisande. De är helt enkelt förutsättningar som man kommer överens om innan man bygger upp teorin.

Det kan förefalla egendomligt att termen *postulat*, som betyder 'något begärt', kan vara synonym till *axiom*. Termen skall emellertid förstås i ett dialektiskt sammanhang: ett postulat var ett påstående som en mästare krävde att hans elever skulle acceptera för att han skulle kunna gå vidare och bygga upp teorin. Därigenom fick postulaten karaktären av överenskommelser, precis som axiomen.

etymologi *Axiom* kommer av grekiskans *axíōma* 'allmänt erkänd värdering, axiom', av *áxios* 'värd'.

*Postulat* är från latinets *postulatum* 'krav, fordran', ett substantiv till verbet *postulare* 'att kräva', en avledning av *poscere* 'att fordra'.

exempel Inom teorin för grupper kan man ta den kommutativa lagen, alltså att  $xy = yx$  för alla element  $x, y$  i en grupp, som ett axiom. Då får man teorin för abelska grupper. Om man stryker detta men behåller övriga axiom, så får man teorin för allmänna grupper.

Ett annat exempel är parallellaxiomet, som användes inom den euklidiska geometrin. Om man stryker det, så får man en mer allmän geometri.

## axiomatisk

definition (om teori) som bygger på användningen av axiom och härledningar från dessa

## definition

definition uttalande som ger en precis bestämning av en symbols betydelse

kommentar Den symbol som definieras kallas *definiendum* och kan vara ett ord, en term, en matematisk symbol eller ett längre uttryck. Det som förklarar definiendum kallas *definiens*.

En definition bör vara så utformad att man kan avgöra huruvida ett objekt uppfyller den eller inte.

Det finns flera typer av definitioner:

En *ostensiv definition* är en definition där man tar hjälp av verkligheten och pekar på ett eller flera exempel på föremål som omfattas av definitionen.

En *terminologisk definition* (den typ som förekommer i denna bok) anger ett språkligt uttryck som idealiskt kan ersätta en term i varje sammanhang utan att betydelsen ändras. (Böjningsformer eller syntax kan göra att man måste skriva om litet.)

En *lexikalisk definition* anger mer eller mindre precist ett ords betydelse med hjälp av synonymer, tillhörighet till större grupper etc.

En *stipulativ definition* anger hur en term kommer att användas i ett visst verk.

Definitionerna kan också ordnas efter en skala *deskriptiv – preskriptiv*, med andra ord *beskrivande – normerande*. En terminologisk definition är en rekommendation, och kan utnännas till standard eller norm. Kraften i rekommendationen kan variera starkt. En lexikalisk definition å andra sidan är oftast beskrivande: den redogör för språkbruket utan att ta ställning till om det är lämpligt eller

ej. En stipulativ definition slutligen är normerande eller tvingande och måste accepteras av läsaren om texten skall kunna förstås, men dess räckvidd är mycket begränsad: den gäller endast det verk där författaren är suverän.

Aristoteles' definitionsteknik innebär att man går upp en nivå (till *genus* 'släktet') och sedan preciserar (*differentia specifica* 'särskiljande drag') för att peka ut arten inom släktet. Ett exempel på detta är de olika definitioner av en kvadrat som nämns nedan; det överordnade begreppet är här rektangel eller romb. Att definiera ett reellt tal som ett komplext tal med imaginärdel noll är också ett exempel på denna teknik, men mindre lämpligt i undervisningen. I matematiken är därför en annan form vanlig: man beskriver en term med hjälp av andra, mer välkända termer; ett reellt tal är ett tal som kan approximeras godtyckligt nog med rationella tal.

**exempel** Man pekar på ett antal röda föremål och säger: "De här är röda." Detta är en ostensiv definition av färgen *röd*. Pekandet kan förstås kompletteras med att man pekar på ett antal gula, blå, gröna ... föremål och säger: "De där är inte röda." Barn lär sig ofta genom denna metod.

En kvadrat kan definieras på flera ekvivalenta sätt:

*En kvadrat är en rektangel där alla sidor är lika långa*; alternativt

*En kvadrat är en romb där en vinkel är rät*; alternativt

*En kvadrat är en romb där alla vinklar är räta*.

Se vidare diskussionen om definitionen av en cirkel i Anders Tengstrands kåseri, sidan 292.

**etymologi** Ordet *definition* kommer av latinets *definitus*, perfekt particip av verbet *definire* 'att begränsa, att avgränsa, att innesluta inom gränser, att noga bestämma, att närmare ange, att fastställa, att inskränka, att förklara, att definiera'.

**jämför** *explicit definition* s. 126, *implicit definition* s. 126

## existenssats

**definition** sats som påstår existensen av ett visst matematiskt objekt

**kommentar** Satsen som påstår existensen behöver inte ge någon metod för att hitta eller beräkna objektet.

Satsen behöver heller inte påstå att existensen är entydig. Ofta är det svårare att bevisa icke entydig existens än entydig existens.

En existenssats som ger en metod att beräkna en lösning är allmänt sett värdefullare än en som inte ger en sådan metod.

**exempel** En känd existenssats säger att det existerar en lösning till differentialekvationen  $u'(t) = f(t, u(t))$ ,  $t \in \mathbf{R}$ , med begynnelsevärdet  $u(0) = 0$  om  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  är kontinuerlig. Satsen säger att det finns minst en lösning, men det kan finnas flera (till exempel om  $f(t, y) = 2\sqrt{|y|}$ ; man har då lösningarna  $u(t) = ((t - t_0)^+)^2$  för godtyckligt  $t_0 \geq 0$ ). Om  $f$  uppfyller ett visst villkor som garanterar entydighet, så duger ett enklare bevis.

## explicit definition

definition	definition som bestämmer det som skall definieras direkt i termer av redan kända egenskaper
kommentar	En funktion är explicit definierad om man anger vilka dess värden är för alla värden på argumentet. En egenskap definieras explicit genom att man beskriver den med hjälp av redan kända egenskaper. Definitionerna i denna bok är alla explicita; de innehåller termer som anses vara kända eller definieras i andra termposter.
exempel	Funktionen $f$ är explicit definierad genom att man föreskriver att $f(x) = x^3$ för $x \geq 0$ och $f(x) = x^4$ för $x < 0$ .
etymologi	Ordet <i>explicit</i> kommer av latinets <i>explicitus</i> 'tydlig', egentligen 'utvecklade, klart synlig', av verbet <i>explicare</i> 'utveckla'.
jämför	<i>implicit definition</i> s. 126

## förmodan

synonym	<b>hypotes</b> <sub>2</sub>
definition	utsaga som troligen är sann enligt någons gissning
exempel	Goldbachs förmodan säger att varje jämnt heltal större än 2 kan skrivas som summan av två primtal. Den är lätt att verifiera för små tal, och med dator har den verifierats upp till åtminstone $10^{18}$ . Men den har inte bevisats. (Christian Goldbach, 1690—1764.) Riemannhypotesen uttalar sig om var nollställena till en viss analytisk funktion ligger. Denna förmodan har inte bevisats. (Bernhard Riemann, 1826—1866.)

## generalisering

definition	(av ett givet påstående) påstående med mer utsträckt giltighet än det givna påståendet
kommentar	Ordet syftar också på processen att generalisera. Det givna påståendet säges vara ett <i>specialfall</i> av generaliseringen.
exempel	En cirkelskivas area är $\pi r^2$ , där $r$ är dess radie. Formeln kan lätt generaliseras till en elliptisk skiva: dess area är $\pi ab$ , där $a$ och $b$ är halvaxlarnas längder. Formeln $A = \pi r^2$ är ett specialfall av formeln $A = \pi ab$ , och den senare är en generalisering av den första. (Det är svårare att generalisera formeln för en cirkels omkrets, $2\pi r$ , till en ellips.)

## implicit definition

definition	definition som bestämmer det som skall definieras indirekt genom att ange egenskaper som det skall uppfylla
kommentar	En funktion kan vara implicit definierad genom att man anger en ekvation som dess värden skall uppfylla. En egenskap kan likaså definieras implicit genom att man anger ett påstående som skall vara sant vid den rätta definitionen och endast då.

exempel Ekvationen  $y^5 + 3x^2y^3 + 7 = 0$  bestämmer implicit den reella variabeln  $y$  som en funktion av den reella variabeln  $x$ .

Från semantiken har vi ett exempel på en implicit definition: *elev* kan definieras implicit genom uttalandet: *Om du har en lärare, så är du elev till den läraren.*

Egenskapen att *vara fullt utrustat* kan bestämmas implicit genom att man anger att påståendet *Exempelvis skall svenskan också framgent vara ett språk fullt utrustat för att tala om naturvetenskap på* skall vara sant.

jämför *explicit definition* s. 126

## korollarium

synonym **följdsats**

definition resultat som följer jämförelsevis lätt från en sats eller en proposition

kommentar I klassisk matematik får ett lemma inte ha några korollarier, men man ser ändå detta ibland.

etymologi *Korollarium* betyder något som man får på köpet, som bonus. Det kommer av latinets *corolla* 'liten krans', och syftade på de kransar som gavs till gäster på banketter.

**lemma**, bestämd form *lemmat*, plural *flera lemman*

synonym **hjälpssats**

definition matematiskt resultat i en teori som skrivs ut som en etapp på väg mot en sats eller proposition

kommentar Ett lemma har ofta inte något intresse som självständigt resultat, utan hjälper till för att vi skall komma fram till något väsentligare. Men vissa mycket viktiga resultat kallas av historiska skäl ändå för lemman, t. ex. Zorns lemma.

etymologi *Lemma* kommer av grekiskans *lémma* 'sats', ursprungligen något som man förutsätter, tar för givet; grundordet är *lambánein* 'att ta'.

## omvändning

definition (till ett givet påstående) påstående som uppstår ur det givna genom att en implikation vänds

exempel Påståendet

*Om två rektangelområden är kongruenta, så har de samma area har omvändningen*

*Om två rektangelområden har samma area, så är de kongruenta.*

Det första påståendet är sant, det andra falskt. Om vi inskränker påståendet till speciella rektanglar, till exempel till kvadrater, så blir även det andra påståendet sant – man har då infört ett nytt antagande.

## proposition

definition matematiskt resultat i en teori som är mindre viktigt än en sats men viktigare än ett lemma

**sats**

synonym	<b>teorem</b>
definition	viktigt matematiskt resultat i en teori
etymologi	<i>Teorem</i> är substantiv till det grekiska verbet <i>theōrein</i> 'att betrakta, att överväga, att undersöka'.

**villkor**

definition	krav som ställs på ett matematiskt objekt eller i en sats
kommentar	Man skiljer på nödvändiga villkor och tillräckliga villkor. Ett <b>nöd-vändigt villkor</b> för en viss egenskap kan inte strykas utan att egenskapen går förlorad. Ett <b>tillräckligt villkor</b> medför egenskapen. Om således $A \Rightarrow B$ , så är $A$ tillräckligt för $B$ , och $B$ är nödvändigt för $A$ .

## 7.4. Bevis

**algoritm**

definition	regel som talar om hur man stegvis kan beräkna något eller hur man stegvis kan lösa ett problem
exempel	Algoritmen för division av hela tal. Euklides' algoritm.
etymologi	Ordet <i>algoritm</i> , ursprungligen <i>algorism</i> , är bildat av namnet på matematikern, astronomen, astrologen och geografen Muhammad Ibn Mūsā al-Khwārizmī, som var verksam i Bagdad (Bagdād) under första hälften av 800-talet. Al-Khwārizmī betyder 'han från Khwārezm'. (Khwārezm var en historisk provins kring den nuvarande staden Khiva i Uzbekistan och var betydligt större än den nuvarande provinsen Khorezm.) I sin nuvarande betydelse användes termen av Leibniz 1684 i en uppsats där han formulerade de grundläggande deriveringsreglerna.

**antagande**

synonym	<b>hypotes<sub>1</sub></b>
definition	utsaga som antas vara sann i en sats eller under ett resonemang
etymologi	<i>Hypotes</i> kommer av grekiskans <i>hypóthesis</i> 'förutsättning, det underlag på vilket man bygger sitt resonemang', bildat av <i>hypó</i> 'under' och <i>tithénai</i> 'att sätta, att ställa, att lägga'.



## bevis

definition övertygande argumentation för att ett matematiskt resultat skall accepteras som sant

kommentar Motsvarande verb är *bevisa*.

Ett matematiskt bevis för en sats skall med logisk nödvändighet leda läsaren från teorins accepterade axiom och satsens antaganden till satsens slutsats.

Kraven på hur ett gott matematiskt bevis skall vara beskaffat har varierat under historiens lopp. I stort sett kan man säga att kraven ökat med tiden.

Det är inte så att ett bevis måste innehålla alla logiskt nödvändiga steg för att accepteras. Det kan få innehålla små luckor, om dessa är sådana att en rutinerad läsare lätt kan fylla ut dem. Därmed står det klart att läsarens kunskaper avgör huruvida luckorna är acceptabla.

jämför *logisk följd* s. 119, *slutledning* s. 121

## deduktiv metod

definition bevismetod som använder logiska resonemang utgående från givna antaganden

## direkt bevis

definition Bevis som utgår från antagandena och därifrån leder till slutsatsen

jämför *indirekt bevis* s. 130

## empirisk

definition grundad på erfarenheten

etymologi *Empirisk* kommer av grekiskans *empeiria* 'erfarenhet', sammansatt av *en* 'i' och *peira* 'försök, experiment'.

## heuristik

definition studiet av och praktiserandet av heuristiska lösningsmetoder

kommentar Den förste som i modern tid uppmärksammade heuristikens betydelse i utbildning och forskning var George Pólya (Pólya György, 1887–1985).

## heuristisk

definition utnyttjande allmänna principer för problemlösning, tidigare erfarenheter, försök och gissningar

kommentar Heuristiskt lärande och problemlösande söker sig fram genom allmänna principer snarare än standardlösningar och prövar flera möjligheter så att man lär sig av begångna misstag och successivt når fram till målet.

etymologi Adjektivet *heuristisk* är bildat av det grekiska verbet *heuriskein* 'att finna (vad man söker), att uppfinna, att upptäcka'; jämför med utropet *Heurēka!* 'Jag har funnit (det)!' [*hēure:ka*], som tillskrivs Arkimedes (287–212 f. Kr.).

## härleda

synonym	<b>deducera</b>
definition	⟨om ett påstående⟩ från givna antaganden och med hjälp av givna regler och logiska resonemang nå fram till påståendet; ⟨om en formel⟩ genom resonemang och räkningar nå fram till formeln
kommentar	Motsvarande substantiv är <b>härledning</b> och <b>deduktion</b> , som syftar på processen; någon gång på resultatet.
etymologi	<i>Deduktion</i> kommer av latinets <i>deducere</i> 'att leda bort, att härleda'.

## indirekt bevis

definition	bevis som utgår från att det som skall bevisas är falskt och bevisar att något av antagandena är falskt
kommentar	I stället för en implikation $P \Rightarrow Q$ betraktar man $\neg Q \Rightarrow \neg P$ . Ett direkt bevis för det senare påståendet blir ett indirekt bevis för det förstnämnda. Man säger att $\neg Q \Rightarrow \neg P$ uppstår genom <b>kontraposition</b> av $P \Rightarrow Q$ . De två påståendena är ekvivalenta i klassisk logik, men inte i den intuitionistiska logiken.
jämför	<i>direkt bevis</i> s. 129

## induktion

synonym	<b>matematisk induktion</b>
definition	bevismetod för en uppsättning påståenden grundad på att alla naturliga tal kan nås från talet 0 medelst ändligt många steg
kommentar	Påståendena kan vara ändligt eller uppräkneligt oändligt många. Man bevisar först påståendet $P_0$ , <b>induktionsbasen</b> . Därefter visar man att påståendet $P_n$ implicerar $P_{n+1}$ för alla $n \in \mathbf{N}$ , <b>induktionssteget</b> , eller, i fallet ändlig induktion, för alla $n$ upp till en viss gräns. Ordet <i>induktion</i> har en helt annan betydelse inom vetenskapsfilosofin: där betyder det att en generell utsaga görs trolig genom ett antal enskilda exempel.
etymologi	<i>Induktion</i> kommer från det latinska verbet <i>inducere</i> 'att föra in'.

## itera

definition	utföra en procedur upprepade gånger
kommentar	Genom iteration kan man bevisa existensen av lösningar till olika ekvationer.
exempel	Den positiva roten ur 2 är det geometriska medelvärdet av 1 och 2, men också lika med det geometriska medelvärdet av $x$ och $2/x$ för varje positivt tal $x$ . Om $x$ och $2/x$ ligger nära varandra, kan man i stället för det geometriska medelvärdet ta det aritmetiska medelvärdet $\frac{1}{2}(x+2/x)$ . Denna idé har länge använts för att beräkna ett närmevärde för $\sqrt{2}$ genom iterering. Vi kan till exempel ta $x = 1$ som en första approximation och därefter det aritmetiska medelvärdet av 1 och $2/1$ , som är 1,5. Därefter tar vi det aritmetiska medelvärdet

av 1,5 och  $2/1,5$ , som är  $\approx 1,416\,667$ . Det aritmetiska medelvärdet av detta tal och 2 genom detta tal är  $\approx 1,414\,216$ , som redan är en ganska god approximation av  $\sqrt{2} \approx 1,414\,214$ . Man kan visa att man kan beräkna hur många decimaler som helst i den decimala representationen av  $\sqrt{2}$  på detta sätt.

Vi kan visa existensen av en lösning till differentialekvationen  $u' = f(u)$  genom att först definiera en funktion  $u_0$  och sedan definiera  $u_{j+1}$  genom att lösa  $u'_{j+1} = f(u_j)$ ,  $j \in \mathbf{N}$ . Man itererar proceduren som från  $u_j$  ger  $u_{j+1}$ . Under lämpliga antaganden konvergerar följden  $(u_j)$  mot en lösning till ekvationen.

etymologi *Iterera* kommer av det latinska verbet *iterare* 'att upprepa', bildat till *iterum* 'ånyo, om igen'.

## konstruktivt bevis

definition bevis som från antagandena leder fram till slutsatsen genom steg som alla innebär konstruktion av de efterfrågade matematiska objekten

jämför *existenssats* s. 125, *indirekt bevis* s. 130, *motsägelsebevis* s. 131

## motsägelsebevis

synonym **reductio ad absurdum**

definition bevis som utgår från att satsen är falsk och härleder en motsägelse

kommentar Om satsen har formen  $P \Rightarrow Q$ , så är dess negation  $P \& \neg Q$ , och det är från den hypotesen som man bevisar en motsägelse.

Denna typ av bevis förutsätter att man accepterar lagen om det uteslutna tredje, d.v.s. att det inte finns någon annan möjlighet än att ett påstående är sant eller falskt.

jämför *direkt bevis* s. 129, *indirekt bevis* s. 130

## paradigm

definition (inom grammatiken) böjningsmönster;

(inom vetenskapsfilosofin) tankemönster inom en vetenskap

kommentar Den gamla språkvetenskapliga betydelsen av ordet har numera över-skuggats av den som Thomas Kuhn (1922–1996) skapade i sitt verk *The Structure of Scientific Revolutions* (1962), där han beskrev hur forskarnas tankemodeller styr vilka frågor de ställer, och därmed vilka svar som kan nås.

etymologi Ordet *paradigm* är från grekiska *parádeigma*, avledd från verbet *paradeiknýnai* 'att ställa bredvid, att visa sida vid sida'.

jämför *paradigmskifte* s. 131

## paradigmskifte

synonym **vetenskaplig revolution**

definition (inom vetenskapsfilosofin) förkastande av ett tankemönster inom en vetenskap och övergång till ett annat, annorlunda

kommentar Avvikelser från en teori betraktas först som undantag, anomalier eller observationsfel, men en tillräckligt stor samling anomalier kan till slut (under gynnsamma omständigheter) bringa ett paradigmskifte åstad.

etymologi Termen *paradigmskifte* fanns inte i Thomas Kuhns bok *The Structure of Scientific Revolutions* (1962) utan uppstod i debatten i anslutning till denna.

jämför *paradigm* s. 131

## paradox

synonym **antinomi**

definition svårförklarad motsägelse

exempel Zenons paradox om Akilles, som inte kan springa ikapp sköldpaddan trots att han springer dubbelt så fort som denna. (Denna paradox är skenbar och har fått en tillfredsställande förklaring genom teorin för summering av oändliga serier.)

Bertrand Russell (1872–1970) formulerade paradoxen om barberaren som rakar alla som inte rakar sig själva. (Denna paradox har lett till en utveckling av mängdläran.)

etymologi *Paradox* kommer av grekiskans *para-* 'bredvid-' och *doxa* 'mening'.

*Antinomi* kommer av grekiskans *antinomía*, en juridisk term med betydelsen 'lagens motsägelse mot sig själv', bildat av *anti-* 'mot-' och *nómos* 'lag'.

## 7.5. Problemlösning

### cirkels kvadratur

definition problemet att med passare och linjal konstruera ett kvadrat område med samma area som en given cirkelskiva

kommentar Detta är ett välkänt olösligt problem. Kvadratområdet skall alltså ha sidan  $a = \sqrt{\pi r^2}$ .

historia Problemet är ett av de mest berömda i matematikens historia och ställdes redan under antiken. År 1882 kunde Ferdinand von Lindemann (1852–1939) bevisa att det inte går att lösa. Talet  $\sqrt{\pi}$  kan nämligen inte konstrueras med passare och linjal; det är inte ens algebraiskt, utan transcendent.

jämför *olösligt problem* s. 133

### kubens fördubbling

definition problemet att med passare och linjal konstruera en kub med dubbelt så stor volym som en given kub

kommentar Detta är ett välkänt olösligt problem. Den nya kuben skall ha sidan  $\sqrt[3]{2}$  gånger den givna kubens sida. Den reella kubikroten ur två kan inte konstrueras med passare och linjal. Den uppfyller tredjegrads-ekvationen  $x^3 - 2 = 0$ , som inte kan lösas med passare och linjal.

historia Problemet ställdes redan under antiken, och inspirerade Ménaikmos att studera kägelsnittet. Umar Khayyām förmodade att det är olösligt, och Pierre Wantzel (1814–1848) visade år 1837 att så är fallet.

jämför *olösligt problem* s. 133

## metod

definition planmässigt eller vetenskapligt tillvägagångssätt vid problemlösning  
etymologi Ordet *metod* kommer av grekiskans *méthodos*, ursprungligen 'en väg att följa', av *meta-* 'efter, längs' och *hodós* 'väg'.

## olösligt problem

definition problem som inte kan lösas  
kommentar Det finns flera kända problem om vilka man bevisat att de inte kan lösas.

I problemformuleringen ingår vissa förutsättningar. Till exempel kan en vinkel delas i tre lika delar med hjälp av quadratrixen, men detta löser inte problemet om vinkelns tredelning, eftersom quadratrixen är ett otillåtet hjälpmedel i just detta sammanhang.

jämför *olöst problem* s. 133, *cirkelns kvadratur* s. 132, *kubens fördubbling* s. 132, *vinkelns tredelning* s. 133

## olöst problem

synonym **öppet problem**

definition problem som, såvitt det är känt, ännu inte har lösts

kommentar Ett olöst problem kan ha lösts tidigare, men lösningen kanske råkar vara okänd i den krets man befinner sig i. Ett olöst problem kan också vara olösligt.

Ibland används termen *öppet problem* i stället om ett övningsproblem där inte alla villkor är angivna, och där avsikten är att eleven själv skall tillfoga rimliga omständigheter och värden.

exempel Riemanns hypotes.  
Goldbachs förmodan.

Fermats sista sats var olöst fram till 1994, då Andrew Wiles bevisade den.

jämför *olösligt problem* s. 133

## problem

definition fråga där man begär ett svar

kommentar Ett problem kan vara löst, d.v.s. en lösning kan redan vara känd, men man begär ändå att någon skall lösa det som övning eller i en tentamen (ett övningsproblem). Ett problem kan vara olöst (eller, med en synonym, öppet), d.v.s. man känner inte till någon lösning. Slutligen finns det olösliga problem, d.v.s. problem som inte kan lösas.

jämför *olöst problem* s. 133, *olösligt problem* s. 133

## vinkelns tredelning

definition problemet att dela en godtycklig vinkel i tre lika delar med passare och omärkt linjal

- kommentar** Detta är ett välkänt olösligt problem. Eftersom  $4 \cos^3 \frac{1}{3}\alpha - 3 \cos \frac{1}{3}\alpha = \cos \alpha$ , så är problemet ekvivalent med att lösa tredjegrads ekvationen  $4x^3 - 3x = \cos \alpha$  för varje vinkel  $\alpha$ . En sådan ekvation kan lösas med passare och linjal för speciella värden, t. ex.  $\alpha = \pi/2$  och  $\alpha = \pi/4$ . För de flesta värden på  $\alpha$ , inklusive  $\alpha = \pi/3$ , går det inte.
- historia** Ptolemaios förmodade på 100-talet e. Kr. att problemet med vinkelns tredelning inte går att lösa, men detta bevisades först 1837 av Pierre Wantzel.
- jämför** *olösligt problem* s. 133

## 8. Avbildningar och funktioner

### 8.1. Allmänt om avbildningar

#### additionsformel

definition (för en given avbildning) formel som anger hur avbildningens värde i argumentet  $x + y$  beror av dess värden i  $x$  och  $y$

kommentar För exponentialfunktionen är additionsformeln mycket enkel:  $e^{x+y} = e^x e^y$  för reella eller komplexa  $x, y$ . Additionsformlerna för de trigonometriska funktionerna följer av denna: de är

$$\begin{aligned}\sin(x + y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \cos(x + y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \tan(x + y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}.\end{aligned}$$

jämför *subtraktionsformel* s. 139

#### affin avbildning

synonym **linjär<sub>2</sub> avbildning**

definition polynomiell avbildning av högst första graden

kommentar Grafen till en affin funktion av en reell variabel är en rät linje.

exempel Funktionen som ges av  $f(x) = 2x + 1$  är av första graden och alltså affin.

En parallellprojektion är en affin avbildning.

Funktionerna  $g(x) = x^4$  och  $h(x) = \sin x$  är inte affina.

jämför *linjär<sub>1</sub> avbildning* s. 138, *rät linje* s. 186

#### argument<sub>1</sub>

definition (för en avbildning) element i avbildningens definitionsmängd

etymologi Ordet *argument* kommer av latinets *argumentum* 'innehåll, bevismedel', bildat av verbet *arguere* 'att klargöra, att anklaga', vars grund är det indoeuropeiska \**ar(e)g* 'glänsande', som också återfinns i franskans *argent* 'silver'.

#### beroende variabel

definition variabel som antas påverkas av en annan variabel

kommentar För funktioner definierade på reella axeln och med reella värden används oftast den horisontella axeln i ett koordinatsystem för den oberoende variabeln och den vertikala axeln för den beroende.

exempel Om luftens temperatur antas påverkas av höjden över havet så är temperaturen den beroende variabeln och höjden över havet den oberoende variabeln. (Just i detta fall kan det vara bättre att avsätta den oberoende variabeln vertikalt.)

jämför *oberoende variabel* s. 138 (figur finns där)

## bijektion

synonym	<b>bijektiv avbildning</b>
definition	avbildning som är både injektiv och surjektiv
etymologi	<i>Bijektion</i> är sammansatt av latinets <i>bi-</i> 'två-' (här i betydelsen 'dubbel') och <i>iect-</i> , perfektstam av <i>iacere</i> 'att kasta'.
jämför	<i>injektion</i> s. 137, <i>surjektion</i> s. 140

## diskontinuerlig avbildning

definition	avbildning som inte är kontinuerlig
kommentar	Om en funktion definierad på reella axeln har ett vänstergränsvärde och ett högergränsvärde i en punkt $a$ och de är olika, så säger man att funktionen har ett <b><i>språng</i></b> i $a$ . Det är ett enkelt fall av diskontinuitet. Funktionen $\mathbf{R} \ni x \mapsto f(x) = \sin(1/x)$ , $x \neq 0$ , $f(0) = 0$ är diskontinuerlig i origo och oscillerar snabbt nära origo.
etymologi	<i>Diskontinuerlig</i> kommer från det latinska prefixet <i>dis-</i> (här i nekande funktion) och <i>continuus</i> 'sammanhängande'.
jämför	<i>kontinuerlig avbildning</i> s. 138

## graf

definition	(till en given avbildning) mängden av alla par $(x, f(x))$ där $x$ tillhör avbildningens definitionsmängd
kommentar	Grafen ligger i den kartesiska produkten av definitionsmängden och målmängden, alltså i $X \times Y$ , om $f$ avbildar $X$ in i $Y$ . Om $X, Y \subset \mathbf{R}$ , så kan man kanske rita upp grafen på ett papper.
exempel	Om avbildningen är en polynomfunktion av en reell variabel, så blir grafen en glatt kurva i planet. Den består då av alla punkter $(x, f(x)) \in \mathbf{R}^2$ , där $x \in \mathbf{R}$ .
etymologi	Termen <i>graf</i> består av stammen i det grekiska verbet <i>gráphein</i> 'att rita, att skriva'.
jämför	<i>epigraf</i> s. 142, <i>hypograf</i> s. 145

## homeomorfism

definition	bijektion mellan två topologiska rum som är kontinuerlig och har kontinuerlig invers
kommentar	En homeomorfism bevarar alla topologiska egenskaper. Om man har en homeomorfism av ett rum $X$ på ett rum $Y$ , så säger man att rummen är <b><i>homeomorfa</i></b> och att paret $(X, Y)$ har egenskapen <b><i>homeomorfi</i></b> .
etymologi	<i>Homeomorf</i> är bildat av grekiska <i>hómoios</i> 'liknande' och <i>morphé</i> 'form'.

## homomorfism

definition	avbildning som bevarar vissa givna egenskaper
------------	---



- kommentar Vilka egenskaper som bevaras får förstås av sammanhanget. En homomorfism  $f: G \rightarrow H$  av en grupp  $G$  in i en annan grupp  $H$  bevarar gruppoperationen, d.v.s.  $f(xy) = f(x)f(y)$  för alla element  $x, y$  i  $G$ .
- etymologi *Homomorf* är bildat av grekiska *homós* 'lika, samma' och *morphé* 'form'.
- jämför *isomorfism* s. 137

## identisk avbildning

- definition avbildning som avbildar varje element i definitionsmängden på just detta element
- kommentar Den identiska avbildningen  $I$  är ett neutralt element under sammansättning: om  $f: X \rightarrow X$  är en avbildning av  $X$  in i  $X$ , så är  $f \circ I = I \circ f = f$ , vilket betyder att  $f(I(x)) = f(x)$  och  $I(f(x)) = f(x)$  för alla  $x \in X$ .
- etymologi *Identisk* kommer av latinets *identitas* 'identitet', i sin tur bildat av *idem* 'samma'.

## injektion

- synonym **injektiv avbildning**
- definition avbildning som alltid avbildar två olika element på två olika element
- kommentar Termen *ett-till-ett-avbildning* har oftast betydelsen 'injektion'. Men ibland åsyftas i stället betydelsen 'bijektion'. Man bör därför undvika den.
- exempel Funktionen  $\mathbf{R} \ni x \mapsto x^5 \in \mathbf{R}$  är injektiv, medan funktionen  $\mathbf{R} \ni x \mapsto x^4 \in \mathbf{R}$  inte är det.
- etymologi *Injektion* är sammansatt av latinets *iniectio*, substantiv till *inicere* 'kasta in'; *iect-* är perfektstam till *iacere* 'att kasta'.
- jämför *bijektion* s. 136, *surjektion* s. 140

## invers avbildning

- definition (till en bijektion  $f$ ) den avbildning  $g$  sådan att  $g(f(x)) = x$  och  $f(g(y)) = y$  för alla argument  $x$  och  $y$
- jämför *invers<sub>1</sub>* s. 89, *omvänd relation* s. 102

## isomorfism

- definition bijektion som bevarar vissa givna egenskaper
- kommentar Vilka egenskaper det handlar om får förstås av sammanhanget. En isomorfism mellan ringar bevarar additionen och multiplikationen.  
Om man har en isomorfism  $f: A \rightarrow B$  av en struktur (till exempel en grupp)  $A$  på en struktur  $B$ , så säger man att  $A$  och  $B$  är **isomorfa** och att paret  $(A, B)$  har egenskapen **isomorfi**.
- jämför *homomorfism* s. 136

## konstant avbildning

definition avbildning vars värden är lika för alla argument

## kontinuerlig avbildning

definition avbildning sådan att dess värden blott varierar litet när argumentet varierar litet

kommentar En populär beskrivning av en kontinuerlig kurva är att man kan rita den utan att lyfta pennen. En allmännare, mer abstrakt definition är att en avbildning är kontinuerlig om och endast om den är sådan att Urbilden av en öppen mängd alltid är öppen.

Det finns ett samband med gränsvärdesbegreppet: funktionen  $f$  är kontinuerlig i en punkt  $a$  om och endast om gränsvärdet av  $f(x)$  då  $x$  går mot  $a$  existerar (och då är det lika med  $f(a)$ ).

exempel Funktionen  $x \mapsto x^3$  är kontinuerlig eftersom små ändringar i  $x$  endast leder till små ändringar värdet hos  $x^3$ . Om man vill att värdet hos  $x^3$  inte skall förändra sig med mer än 0,001, så kan man ange hur mycket  $x$  får ändra sig för att detta skall vara uppfyllt. Närmare bestämt har man att  $|x^3 - a^3| = |x - a||x^2 + xa + a^2| \leq 3M^2|x - a|$  om  $|x|, |a| \leq M$ . Alltså räcker det exempelvis att kräva att  $|x - a| \leq \frac{1}{3} \cdot 10^{-5}$  om  $|x|, |a| \leq 10$ .

Signumfunktionen  $\operatorname{sgn}$  är däremot inte kontinuerlig i origo. Den har värdet 0 i origo, och hur små ändringar som helst av den oberoende variabeln kan leda till att funktionsvärdet ändrar sig med kvantiteten 1:  $\operatorname{sgn}(0) = 0$  medan  $\operatorname{sgn}(x) = 1$  om  $x > 0$ .

historia Euler betraktade kurvors kontinuitet utgående från sitt funktionsbegrepp (1748): En funktion bestod av ett analytiskt uttryck, t.ex.  $z^2 + az + b$ . En funktion kunde uttrycka en kontinuerlig kurva. Om en kurvas delar uttrycktes av olika uttryck var den diskontinuerlig – detta även om kurvan kunde ritas utan att man lyfte pennen. Cauchy gav 1821 en modern definition av begreppet kontinuerlig funktion.

etymologi *Kontinuerlig* kommer från latinets *continuus* 'sammanhängande'.

jämför *diskontinuerlig avbildning* s. 136

## lineär<sub>1</sub> avbildning

definition avbildning från ett vektorrum till ett annat som uppfyller  $f(x + ty) = f(x) + tf(y)$  för alla vektorer  $x$  och  $y$  och alla skalärer  $t$

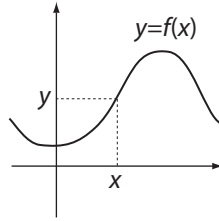
kommentar En sådan avbildning antar alltid värdet 0 i origo. Motsvarande substantiv för egenskapen att vara lineär är *linearitet*.

exempel Funktionen  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  som ges av  $f(x) = 2x + a$  är affin, men lineär<sub>1</sub> endast om  $a = 0$ .

etymologi *Lineär* kommer från det franska adjektivet *linéaire*, som har sitt ursprung i det latinska ordet *linearis* 'som hör till eller består av linjer'.

## oberoende variabel

definition variabel som antas påverka en annan variabel



Den oberoende variabeln är här  $x$ , den beroende  $y$ .

- kommentar** Vid grafisk representation av en reellvärd funktion av en reell variabel avsätts vanligen den oberoende variabeln längs den horisontella axeln och den beroende längs den vertikala axeln.
- exempel** Vid många fysikaliska förlopp betraktas tiden som en oberoende variabel.
- jämför** *beroende variabel* s. 135

## restriktion

- definition** (av en avbildning till en delmängd av dess definitionsmängd) den avbildning som har delmängden som definitionsmängd och har samma värden som den givna avbildningen där
- kommentar** Restriktionen av en avbildning  $f$  till en mängd  $A$  skrivs ofta  $f|_A$ .
- exempel** Om två kontinuerliga funktioner på reella axeln har samma restriktion till de rationella talen, så är de lika.
- etymologi** Ordet *restriktion* kommer av latinets *restrictio*, substantiv bildat till verbet *restringere* av *re-* 'åter-' (här närmast förstärkande) och *stringere* 'att dra åt, att åtstrama'.

## sammansatt avbildning

- definition** avbildning av typen  $x \mapsto g(f(x))$ , där  $g$  och  $f$  är avbildningar
- kommentar** Sammansättningen  $x \mapsto g(f(x))$  betecknas  $g \circ f$  (uttalas "g efter f"); alltså  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ . Den är definierad för alla  $x \in D_f$  sådana att  $f(x) \in D_g$ , där  $D_f$  och  $D_g$  är definitionsmängderna för  $f$  respektive  $g$ .

## subtraktionsformel

- definition** formel som anger hur funktionsvärdet för argumentet  $x - y$  beror av funktionsvärdena i  $x$  och  $y$
- kommentar** En subtraktionsformel följer enkelt från motsvarande additionsformel genom att man ersätter  $y$  med  $-y$ . Den behöver alltså inte memoreras.
- jämför** *additionsformel* s. 135

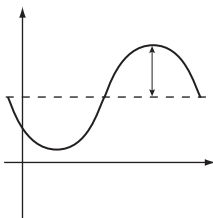
## surjektion

synonym	<b>surjektiv avbildning</b>
definition	avbildning vars värdemängd är lika med hela målmängden
exempel	Funktionen $x \mapsto x^3$ är en surjektion av $\mathbf{R}$ på $\mathbf{R}$ , medan $x \mapsto x^2$ inte är det. Om vi däremot betraktar avbildningen $x \mapsto x^2$ från $\mathbf{R}$ till $[0, +\infty[$ , så är den en surjektion, ty vi har nu ändrat målmängden så att denna är lika med värdemängden.
etymologi	<i>Surjektion</i> är bildat av prefixet <i>sur-</i> (franska <i>sur-</i> , latinska <i>super-</i> '(ovan)på') och <i>iect-</i> , perfektstam av <i>iacere</i> 'att kasta'.
jämför	<i>bijektion</i> s. 136, <i>injektion</i> s. 137

## 8.2. Funktioner och deras värden

### amplitud

definition	(hos en svängning) halva differensen mellan svängningens största och minsta värde
------------	---



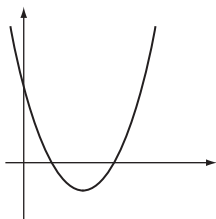
Amplitud.

### analytisk funktion

definition	komplexvärd funktion av reella eller komplexa variabler som nära varje punkt kan representeras av sin Taylorserie
kommentar	En analytisk funktion av komplexa variabler där Taylorserien endast innehåller potenser av variablerna (inte deras konjugat) kallas också <i>holomorf</i> .
historia	Termen analytisk funktion förekom första gången i tryck 1797 i Joseph Louis Lagranges <i>Théorie des Fonctions Analytiques</i> .

### andragradsfunktion

definition	funktion som ges av ett polynom av andra graden
kommentar	I en variabel kan funktionen definieras av $f(x) = ax^2 + bx + c$ , där $a \neq 0$ . På motsvarande sätt namnges funktioner som anges av polynom av högre grad.



Andragradsfunktion av en reell variabel.

### avtagande funktion

definition funktion sådan att värdet blir mindre (i icke-strikt mening) när argumentet växer

kommentar Om funktionen  $f$  är definierad för reella tal och tar reella värden, innebär definitionen att  $f(x_1) \geq f(x_2)$  om  $x_1 \leq x_2$ . Om  $x_1 < x_2$  medför att  $f(x_1) > f(x_2)$ , så kallas funktionen **strängt avtagande** eller **strikt avtagande**.

### begränsad funktion

definition funktion vars bildmängd är begränsad

### Bernsteinpolynom

definition (till en given funktion  $f$  på  $[0, 1]$ ) de polynom  $B_m(f)$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$  som ges av

$$B_m(f)(x) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} f(k/m) x^k (1-x)^{m-k}, \quad x \in \mathbf{R}$$

kommentar Då  $m = 1$  får vi  $B_1(f) = f(0)(1-x) + f(1)x$ , alltså den affina funktion som överensstämmer med  $f$  för  $x = 0$  och  $x = 1$ . Om  $f$  själv är en affin funktion, så är  $B_m(f) = f$  för alla  $m \geq 1$ .

Om  $f \leq g$  på intervallet  $[0, 1]$ , så gäller  $B_m(f) \leq B_m(g)$ . Om  $p$  är ett andragradspolynom, så gäller

$$B_m(p)(x) = p(x) + p''(0)x(1-x)/(2m),$$

d.v.s. andragradspolynom reproduceras nästan, med ett fel som är högst  $|p''(0)|/(8m)$  och går mot noll då  $m$  växer. Detta leder till ett bevis för satsen att en kontinuerlig funktion kan approximeras med polynom på ett slutet begränsat intervall.

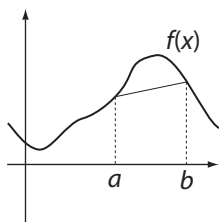
Om  $f$  har värden i  $\mathbf{R}^2$ , så definierar Bernsteinpolynomen plana kurvor, som fått namnet **Bézierkurvor**.

etymologi Bernsteinpolynomen är uppkallade efter Sergej Natanovič Bernštejn (1880–1968). Bézierkurvorna är uppkallade efter Pierre Étienne Bézier (1910–1999).

## differenskvot

synonym **förändringskvot**

definition  $\langle$ för en funktion med avseende på två punkter i definitionsmängden) kvoten av differensen mellan funktionsvärdena i de två punkterna och de senares differens



Differenskvoten är lika med riktingskoefficienten för sekanten.

kommentar Differenskvoten för funktionen  $f$  med avseende på punkterna  $a$  och  $b$ , där  $a \neq b$ , är  $(f(b) - f(a))/(b - a)$ .

Differenskvoten kan tolkas som en medelhastighet, men också som riktningskoefficienten för en sekant.

jämför *derivata* s. 162

## Diracmättet

definition den funktional som för varje kontinuerlig funktion ger dess värde i origo

kommentar Om vi betecknar Diracmättet med  $\delta$ , så är alltså  $\delta(\varphi) = \varphi(0)$  för varje kontinuerlig funktion  $\varphi$ .

etymologi Diracmättet är uppkallat efter Paul Adrien Maurice Dirac (1902 – 1984).

jämför *Heavisidefunktionen* s. 145, *Kroneckerdelta* s. 111

## elementär funktion

definition funktion av en variabel som kan byggas upp medelst aritmetiska operationer och potenser och deras inversa funktioner

kommentar Med termen avses vanligen polynomfunktioner, rationella funktioner, exponentialfunktioner, potensfunktioner, logaritmfunktioner, trigonometriska funktioner och arcusfunktioner, som alla kan byggas upp som definitionen anger.

exempel Cosinusfunktionen är elementär med den angivna definitionen, eftersom  $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ .

Funktionen  $\mathbf{R} \ni x \mapsto \int_{-\infty}^x e^{-t^2} dt \in \mathbf{R}$  är inte elementär.

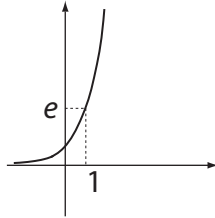
## epigraf

definition  $\langle$ till en given funktion  $f$  med reella värden) mängden  $\{(x, y) \in X \times \mathbf{R}; f(x) \leq y\}$ , där  $X$  är funktionens definitionsmängd

- etymologi Termen *epigraf* är bildad av den grekiska prepositionen *epí* 'på' och stammen i det grekiska verbet *gráphein* 'att rita, att skriva'.
- jämför *graf* s. 136, *hypograf* s. 145

### exponentialfunktionen

- definition den funktion som definieras av  $x \mapsto e^x$

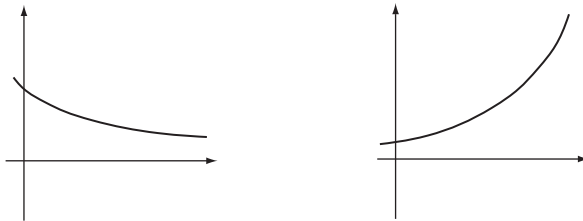


Exponentialfunktionen.

- kommentar Man skriver också  $e^x = \exp x$ . Man har  $\exp 0 = 1$ ,  $\exp 1 = e \approx 2,718281828$ ,  $\exp(-1) = 1/e \approx 0,367879$ .
- jämför *potensfunktion* s. 151

### exponentiellt avtagande

- definition avtagande som funktionen  $x \mapsto e^{\alpha x + \beta}$  för något negativt  $\alpha$



Exponentiellt avtagande och exponentiellt växande.

- jämför *exponentialfunktionen* s. 143, *exponentiellt växande* s. 143

### exponentiellt växande

- definition växande som funktionen  $x \mapsto e^{\alpha x + \beta}$  för något positivt  $\alpha$
- jämför *exponentialfunktionen* s. 143, *exponentiellt avtagande* s. 143

## extrapolation

synonym	<b>extrapolering</b>
definition	beräkning av ett funktionsvärde i en punkt utanför ett intervall med kända värden
etymologi	Ordet <i>extrapolation</i> är bildat i analogi med <i>interpolation</i> .
jämför	<i>interpolation</i> s. 145

## extrempunkt

definition	lokal maximipunkt eller lokal minimipunkt
kommentar	Funktionsvärdet $f(a)$ för en extrempunkt $a$ kallas <b>extremvärde</b> . Ett extremvärde är därmed värdet i en lokal maximipunkt eller värdet i en lokal minimipunkt.
jämför	<i>maximipunkt</i> s. 148, <i>minimipunkt</i> s. 149

## funktional

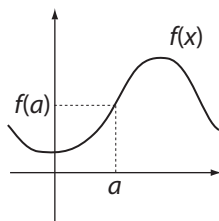
definition	funktion vars definitionsmängd består av funktioner
------------	---

## funktionsserie

definition	serie i vilken termerna är funktioner
------------	---------------------------------------

## funktionsvärde

definition	värde som en funktion kan anta
------------	--------------------------------



Funktionsvärde. Funktionen  $f$  antar värdet  $f(a)$  i punkten  $a$  (för argumentet  $a$ ).

exempel	Om funktionen är $f(x) = x^2 + 3x$ , så är dess värde i punkten $x = 2$ lika med 10.
jämför	<i>bild</i> s. 13

## harmonisk funktion

definition	funktion som satisfierar Laplaces ekvation
kommentar	Funktionen är i varje punkt lika med medelvärdet av sina värden på en cirkel med medelpunkt i punkten, därav benämningen <i>harmonisk</i> – den lever i harmoni med sina grannar.
exempel	Funktionen $h(x, y) = e^{ax} \sin by$ , $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ , är harmonisk om och endast om konstanterna $a$ och $b$ är lika eller motsatta.



etymologi Se Fourieranalys s. 251.

## Heavisidefunktionen

definition den funktion på reella axeln som har värdet 0 då  $x < 0$  och värdet 1 då  $x \geq 0$

kommentar Värdet i origo är oftast inte viktigt.

Funktionen har derivatan noll i alla punkter utom origo. Dess derivata i distributionsmening är Diracmättet  $\delta$ , vilket innebär att

$$-\int_{\mathbf{R}} H(x)\varphi'(x)dx = \varphi(0) = \delta(\varphi)$$

för alla lämpliga funktioner  $\varphi$ .

etymologi Heavisidefunktionen är uppkallad efter Oliver Heaviside (1850—1925).

jämför *Diracmättet* s. 142, *språngfunktion* s. 152, *trappfunktion* s. 153

## holomorf funktion

definition komplexvärd funktion av komplexa variabler vars derivator med avseende på dessa variabler existerar överallt

kommentar En holomorf funktion är analytisk som funktion av de komplexa variablerna likaväl som funktion av dessas real- och imaginärdelar.

exempel Varje polynom i en komplex variabel eller i flera komplexa variabler är en holomorf funktion. Kvoten mellan två holomorfa funktioner i en öppen mängd är holomorf i den öppna delmängd där divisorn är skild från noll.

Funktionen  $z \mapsto \bar{z}$  är inte holomorf.

etymologi *Holomorf* kommer av grekiska *hólos* 'hel' och *morphé* 'form'.

## hypograf

definition (till en given funktion  $f$  med reella värden) mängden  $\{(x, y) \in X \times \mathbf{R}; y \leq f(x)\}$ , där  $X$  är funktionens definitionsmängd

etymologi Termen *hypograf* är bildad av den grekiska prepositionen *hypó* 'under' och stammen i det grekiska verbet *gráphein* 'att rita, att skriva'.

jämför *epigraf* s. 142, *graf* s. 136

## interpolation

synonym **interpolering**

definition beräkning av ett funktionsvärde i en punkt mellan kända värden

etymologi Ordet *interpolation* kommer från det latinska verbet *interpolare* 'att sätta in (något) emellan'.

jämför *extrapolation* s. 144

## jämn funktion

definition funktion som antar samma värde i en punkt som i dess motsatta punkt

- exempel Funktionen  $f(x) = x^4 + x^2 - 1$  är jämn:  $f(-x) = f(x)$  för alla  $x$ .  
 Funktionen  $x \mapsto \cos x$  är jämn.
- jämför *udda funktion* s. 153

## komplex analys

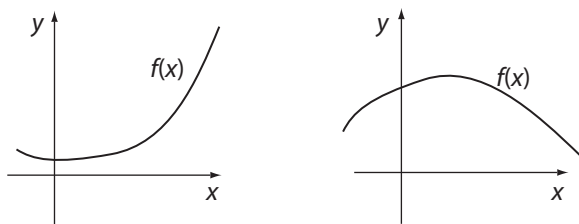
- definition teori för funktioner av komplexa variabler
- kommentar En äldre benämning var **funktionsteori**, som dock hade en snävare betydelse, eftersom den huvudsakligen handlade om analytiska funktioner, medan man i komplex analys studerar även andra funktioner.

## konkav funktion

- definition funktion  $f$  sådan att  $-f$  är konvex
- etymologi Adjektivet *konkav* kommer av latinets *concaucus* 'ihålig, kupig', bildat av prefixet *con-* (här med förstärkande betydelse) och *cavus* 'ihålig, urholkad'.
- jämför *konvex funktion* s. 146 (figur finns där)

## konvex funktion

- definition funktion sådan att dess epigraf är en konvex mängd



En konvex och en konkav funktion. Sedda underifrån ser de konvexa respektive konkava ut i en vardaglig mening.

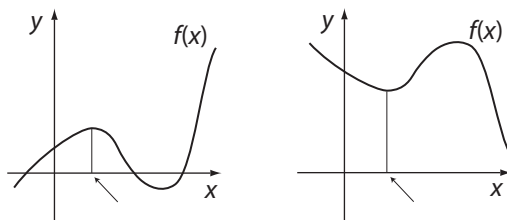
- kommentar Definitionen innebär att konvexa funktioner definieras i termer av konvexa mängder, vilket är enklare än att göra tvärtom.
- exempel Funktionerna  $x \mapsto x^2$ ,  $x \mapsto x^4$ ,  $x \mapsto e^x$  är alla konvexa.  
 Den mängd vattenånga som luft kan innehålla (den absoluta fuktigheten när den relativa fuktigheten är 100%) är en konvex och växande funktion av temperaturen.
- jämför *konkav funktion* s. 146, *konvex mängd* s. 230

## linjär<sub>2</sub> interpolation

- definition interpolation som ger funktionsvärdet mellan två kända observationsvärden medelst den räta linjens ekvation

## lokal maximipunkt

- definition (till en reellvärd funktion) argument sådant att funktionen har ett lokalt maximum där



En lokal maximipunkt och en lokal minimipunkt.

**kommentar** En lokal maximipunkt är ett element i definitionsmängden och kan vara en punkt på en linje, i planet eller rymden; speciellt en tidpunkt, d.v.s. en punkt på tidsaxeln.

**exempel** En varm sommardag, 1947-06-29, uppmättes temperaturen i Målilla till  $38,0^\circ\text{C}$ . Vid någon tidpunkt  $t_0$  den dagen hade temperaturen på denna plats en lokal maximipunkt. Denna tidpunkt var nog också en global maximumpunkt för temperaturerna i Målilla under 1900-talet, men inte en global maximipunkt för temperaturen där under alla tider – vi känner ännu inte temperaturen i Målilla vid tidpunkten 11947-06-29 13:55.

**jämför** *maximipunkt* s. 148

## lokalt minimipunkt

**definition** (till en reellvärd funktion) argument sådant att funktionen har ett lokalt minimum där

**kommentar** En lokal minimipunkt är ett element i funktionens definitionsmängd.

**exempel** Den lägsta uppmätta augustitemperaturen i Sverige,  $-8,5^\circ\text{C}$ , rapporterades från Nikkaluokta 1959-08-31. Nikkaluokta är alltså en minimipunkt för de uppmätta temperaturerna i Sverige vid den angivna tidpunkten. Punkten kan anges med två koordinater, till exempel latitud och longitud. Där har vi alltså en (global) minimipunkt för de uppmätta temperaturerna i Sverige den natten.

Om man tar med tiden, får vi en punkt i ett tredimensionellt rum, där koordinaterna kan vara latitud, longitud och tid. Men då är det inte längre en (global) minimipunkt, eftersom det har varit kallare i Nikkaluokta liksom på andra orter i Sverige vid andra tidpunkter.

**jämför** *lokalt maximipunkt* s. 146 (figur finns där), *minimipunkt* s. 149

## lokalt maximum

**definition** (till en reellvärd funktion) värde hos funktionen sådant att den inte antar något större värde i närheten

**kommentar** Ett lokalt maximum är ett element i funktionens bildmängd.

**exempel** Funktionen som ges av  $f(x) = x^3 - 3x$  har ett lokalt maximum i punkten  $x = -1$ . Det lokala maximumet är 2. Det finns punkter där

funktionen antar större värden, men de ligger på ett avstånd som är större än 3 från denna lokala maximipunkt.

jämför *maximum* s. 148

## lokalt minimum

definition  $\langle$ till en reellvärd funktion $\rangle$  värde hos funktionen sådant att den inte antar något mindre värde i närheten

kommentar Ett lokalt minimum är ett element i funktionens bildmängd.

exempel Funktionen som ges av  $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^3 - 3x_1 + x_2^2$ ,  $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ , har ett lokalt minimum i punkten  $x = (x_1, x_2) = (1, 0)$ . Det lokala minimumet är  $-2$ . Funktionen antar mindre värden än så i andra punkter.

jämför *minimum* s. 149

## maximipunkt

definition  $\langle$ till en reellvärd funktion $\rangle$  argument där funktionen antar sitt maximum

kommentar En maximipunkt är således ett element i funktionens definitionsmängd, medan funktionens maximum är ett element i dess värdemängd: om en funktion  $f: X \rightarrow \mathbf{R}$  har en maximipunkt  $a \in X$ , så är dess maximum lika med  $f(a) \in \mathbf{R}$ .

Om man särskilt vill betona att det inte bara handlar om en lokal maximipunkt, så kan man säga *global maximipunkt*.

Ibland används termen *maximipunkt* i stället för en punkt i funktionens graf, alltså t. ex.  $(a, f(a)) \in X \times \mathbf{R}$ . Som framgår av exemplen i denna termpost, liksom i dem för *lokal maximipunkt*, *lokal minimipunkt* och *minimipunkt* stämmer detta mindre väl med vardagligt språkbruk.

exempel En värmekamera mäter den infraröda strålningen från en kropp och åskådliggör kroppens temperatur till exempel så att en hög temperatur återges ljusare på skärmen än en låg temperatur. Man kan använda den i en byggnad för att hitta onormalt varma elektriska ledningar liksom värmeläckage på grund av bristande isolering. De ljusaste punkterna på skärmen identifierar de varmaste punkterna på väggen, som alltså är temperaturens maximipunkter. Bakom dessa kan någon elektrisk ledning vara överhettad.

Cosinusfunktionen har maximipunkterna  $2\pi k$  där  $k$  är ett godtyckligt heltal.

jämför *lokal maximipunkt* s. 146

**maximum** bestämd form *maximumet*, *maximet* eller *maximum*; plural *maxima* eller *maximium*

definition  $\langle$ till en reellvärd funktion $\rangle$  värde hos funktionen sådant att den inte antar något större värde

kommentar Ett maximum är ett element i funktionens bildmängd.

exempel	Cosinusfunktionen har maximum 1. Exponentialfunktionen $\exp: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ har inget maximum och följaktligen inte heller någon maximipunkt. Den är obegränsad uppåt, så dess supremum är $+\infty$ , ett objekt som inte är ett tal och alltså inte heller ett funktionsvärde.
historia	Pierre de Fermat (1601? – 1665) bestämde på 1630-talet maxima och minima på kurvor med hjälp av tangenter.
etymologi	<i>Maximum</i> betyder 'det största' på latin.
jämför	<i>minimum</i> s. 149

## meromorf funktion

definition	funktion av komplexa variabler som nära varje punkt är en kvot <sub>1</sub> av två holomorfa funktioner
exempel	Varje rationell funktion är meromorf. En meromorf funktion får alltså ha singulariteter, men inte vilka som helst. Funktionen $z \mapsto e^{1/z}$ är inte meromorf i hela komplexa planet, ty singulariteten i origo är alltför allvarlig.
etymologi	<i>Meromorf</i> kommer av grekiska <i>méros</i> 'del' och <i>morphé</i> 'form'.
jämför	<i>holomorf funktion</i> s. 145, <i>rationellt tal</i> s. 51

## minimipunkt

definition	(till en reellvärd funktion) argument där funktionen antar sitt minimum
kommentar	En minimipunkt är ett element i funktionens definitionsmängd. Om man särskilt vill betona att det inte bara handlar om en lokal minimipunkt, så kan man säga <i>global minimipunkt</i> . Se vidare kommentaren under <i>maximipunkt</i> .
exempel	En kall februarinatt, 1966-02-02, uppmättes den lägsta temperaturen i Sverige, $-52,6^\circ\text{C}$ , i Vuoggatjålme. Vuoggatjålmes väderstation var alltså en minimipunkt för de uppmätta temperaturerna i Sverige den natten. Det är troligt att det bland alla temperaturer fanns en minimipunkt i närheten. Denna punkt kan ha varit en global minimipunkt för temperaturen i Sverige denna natt. Men den var inte en (global) minimipunkt för temperaturerna på hela jordytan eftersom till exempel forskningsstationen North Ice på Grönland eller någon plats i Sibirien nog hade en ännu lägre temperatur. Kanske låg den globala minimipunkten denna natt på Grönlandsisen eller i Sibirien. Sinusfunktionen har minimipunkterna $2\pi k - \pi/2$ där $k$ är ett godtyckligt heltal.
jämför	<i>lokal minimipunkt</i> s. 147

**minimum** bestämd form *minimumet*, *minimet* eller *minimum*; plural *minima* eller *minimura*

definition	(till en reellvärd funktion) värde hos funktionen sådant att den inte antar något mindre värde
kommentar	Ett minimum är ett element i funktionens bildmängd.

**exempel** Funktionen  $f(x) = x^4 - 8x^2$  har minimum lika med  $-16$ . Minimipunkterna är  $-2$  och  $2$ . Punkten på  $x$ -axeln med koordinaten  $x = 0$  är en lokal maximipunkt.

Exponentialfunktionen  $\exp: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  har inget minimum och följaktligen inte heller någon minimipunkt. Dess infimum är  $0$ , men detta tal ligger inte i bildmängden.

**etymologi** *Minimum* betyder 'det minsta' på latin.

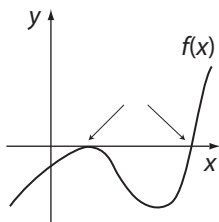
**jämför** *maximum* s. 148

## monoton

**definition** ⟨om en funktion⟩ växande eller avtagande

## nollställe

**definition** ⟨till en avbildning med värden i ett vektorrum⟩ punkt i definitions-mängden där avbildningen antar värdet noll



Ett dubbelt nollställe (till vänster) och ett enkelt nollställe.

## period

**definition** ⟨till en given funktion på reella axeln⟩ tal sådant att funktionsvärdet inte ändras om man lägger till talet till ett godtyckligt argument

**kommentar** Om  $p_1$  och  $p_2$  är perioder, så är även  $p_1 + p_2$  och  $-p_1$  perioder.

**exempel** Funktionerna  $x \mapsto \sin x$  och  $x \mapsto \cos x$  har perioden  $2\pi \neq 0$ . De har också perioderna  $-4\pi$  och  $12\pi$ .

**etymologi** *Period* kommer av grekiskans *períodos* 'omväg', av *perí* 'omkring' och *hodós* 'väg'; ordet betecknade ursprungligen en fullbordad tidscykel.

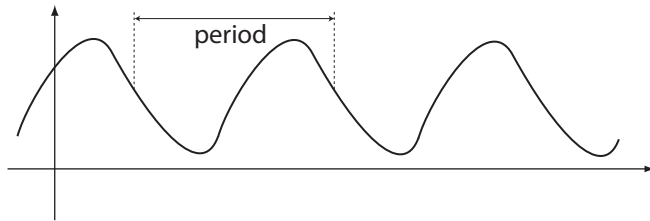
## periodisk funktion

**definition** funktion som har en period skild från noll

**exempel** Funktionerna  $x \mapsto \cos x$ ,  $x \mapsto \tan x$  är periodiska. Deras minsta positiva perioder är  $2\pi$  respektive  $\pi$ . Funktionen  $x \mapsto 2x$  är inte periodisk; dess enda period är talet  $0$ . Se figur på sidan 151.

## polynomfunktion

**definition** funktion som anges av ett polynom



Periodisk funktion.

### potensfunktion

definition funktion av typen  $f(x) = x^a$ , där  $a$  är en konstant

kommentar Om  $a = 0$ , så är  $f(x) = 1$  för alla  $x \neq 0$  ( $0^0$  är inte definierat).

### potensserie

definition funktionsserie vars termer är monom i en eller flera variabler

exempel Potensserien  $\sum_0^\infty jx^j$ , som har summan  $x/(1-x)^2$  om  $|x| < 1$ .

Potensserien  $\sum_{(j,k) \in \mathbb{N}^2} x^j y^k$ , som har summan  $(1-x)^{-1}(1-y)^{-1}$  om  $|x| < 1$  och  $|y| < 1$ .

### rationell funktion

definition funktion som definieras av kvoten<sub>1</sub> mellan två polynomfunktioner varav den andra inte är identiskt noll

### reellvärd funktion

definition funktion med reella värden

**rifunktion** av *ri*, bestämd form *riet*, plural *flera rin*, *rina*

definition funktion av en reell variabel som är styckvis polynomiell med maximalt glatta skarvar

kommentar Rifunktionerna är en klass av funktioner som är nästan lika lätta att räkna med som med polynom, men de är mer flexibla.

Man säger att en rifunktion har grad högst  $m$  om de ingående polynomen alla är av grad högst  $m$ . Kravet att skarvarna skall vara så glatta som möjligt innebär att derivatorna av ordning  $0, 1, 2, \dots, m-1$  från vänster och höger skall överensstämma i skarvpunkterna, d.v.s. att funktionen skall vara av klass  $C^{m-1}$  (inget krav om  $m = 0$ ). I allmänhet kan man inte kräva att vänster- och högerderivatorna av ordning  $m$  skall överensstämma.

En rifunktion av grad högst  $0$  är därför detsamma som en trappfunktion.

En rifunktion av grad högst  $1$  är styckvis affin och kravet på att skarven skall vara så glatt som möjligt betyder att den skall vara kontinuerlig.

En rifunktion  $f$  av grad högst 3 består av polynom av grad högst 3 och kravet på att den skall vara så glatt som möjligt innebär att  $f$ ,  $f'$  och  $f''$  skall vara kontinuerliga.

En funktion  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  är en rifunktion av grad högst  $m \geq 1$  om och endast om den är en primitiv funktion till en rifunktion av grad  $m - 1$  med samma skarvpunkter. Varje rifunktion är därför en itererad primitiv funktion av en trappfunktion.

- exempel Den funktion  $f$  som definieras av att  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1$  då  $|x| \leq 1$ ,  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2|x| + 2$  då  $1 \leq |x| \leq 2$  och  $f(x) = 0$  då  $|x| \geq 2$  är en rifunktion av grad högst 2. I de fyra skarvpunkterna  $\pm 1$  och  $\pm 2$  överensstämmer funktionsvärdena och förstaderivatorna av de ingående polynomen.
- historia Rin har använts i skeppsbyggnad under flera sekel. Rifunktionerna infördes av Isaac Jacob Schoenberg (1903–1990) i en uppsats som publicerades 1946.
- etymologi *Rifunktion* är en översättning av den engelska termen *spline function*, av *spline*, som i detta sammanhang har betydelsen 'ri', en böjlig ribba som används vid ritning av kurvor. Ordet *spline* är belagt i engelskan år 1756, och ordet *ri* i svenskan år 1775.

## språngfunktion

- definition funktion på reella axeln som är en uppräknelig summa av translaterade Heavisidefunktioner multiplicerade med konstanter
- kommentar Definitionen innebär att en begränsad språngfunktion ges av en formel

$$f(x) = c + \sum_{\substack{j \in \mathbf{N} \\ a_j \leq x}} c_j, \quad x \in \mathbf{R},$$

där  $c$  är en konstant,  $(a_j)_{j \in \mathbf{N}}$  en följd av reella tal och där  $(c_j)_{j \in \mathbf{N}}$  är en följd av reella eller komplexa tal med  $\sum |c_j| < +\infty$ .

Följden  $(a_j)$  kan till exempel vara en uppräkning av alla rationella tal; om då  $c_j \neq 0$  för alla  $j$ , så ligger sprången tätt och funktionen är inte en trappfunktion.

- jämför *Heavisidefunktionen* s. 145, *trappfunktion* s. 153

## symmetrisk funktion

- definition funktion av två eller flera variabler där funktionsvärdena förblir oförändrade då variablerna byter plats
- kommentar Med formler kan definitionen för en funktion av två variabler skrivas:  $f(x, y) = f(y, x)$  för alla  $x$  och  $y$ .

## teckenschema

- definition uppställning som visar var en funktion är positiv, negativ eller noll inom vissa intervall



**kommentar** Speciellt används termen för ett schema där en funktions derivatas tecken markeras. Man ser av ett sådant teckenschema var funktionen är växande respektive avtagande, samt var funktionen har sina extrempunkter.

$x$	-3			0	2		
$x^2$	+	+	+	0	+	+	+
$x - 2$	-	-	-	-	-	0	+
$x + 3$	-	0	+	+	+	+	+
$f'(x)$	+	0	-	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↘		↗

Teckenschema för en polynomfunktion  $f$  av femte graden med derivatan  $f'(x) = x^2(x - 2)(x + 3)$ . Man ser att  $-3$  är en lokal maximipunkt,  $0$  en stationär punkt (till och med en terrasspunkt), och  $2$  en lokal minimipunkt.

**jämför** *värdetabell* s. 153

## trappfunktion

**definition** (om en funktion av en reell variabel) språngfunktion där språngpunkterna bildar en diskret<sub>1</sub> mängd;  
(om en funktion av två reella variabler) funktion som är konstant i komplementet till en diskret<sub>1</sub> mängd av räta linjer parallella med koordinataxlarna

**kommentar** För en funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  innebär kravet att språngpunkterna skall bilda en diskret<sub>1</sub> mängd att det finns ändligt många punkter  $a_j \in [a, b]$  med  $a_j < a_{j+1}$  sådana att  $f$  är konstant i varje intervall  $]a_j, a_{j+1}[$ . Man säger också att funktionen är **styckvis konstant**.

Varje trappfunktion är en språngfunktion, men inte omvänt.

Integralen av en trappfunktion över ett begränsat intervall är lätt att definiera; därför utgår man från trappfunktionerna när man definierar Riemannintegralen.

**jämför** *Heavisidefunktionen* s. 145, *språngfunktion* s. 152

## udda funktion

**definition** funktion sådan att den i motsatta punkter antar motsatta värden

**exempel** Funktionerna  $x \mapsto \sin x$  och  $p(x) = 4x^5 + 8x^3 + 2x$  är udda:  $f(-x) = -f(x)$  för alla  $x$ .

**jämför** *jämn funktion* s. 145

## värdetabell

**definition** (för en funktion) tabell över (en del av) funktionens definitionsmängd och motsvarande värden

$x$	$y$
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1024
11	2048

$x$	$y$	$z$
0	0	-
0	1	1
0	2	1
0	3	1
1	0	0
1	1	1
1	2	2
1	3	3
2	0	0
2	1	1
2	2	4
2	3	9

Värdetabeller för funktionerna som ges av  $y = 2^x$  och  $z = y^x$ .

## växande funktion

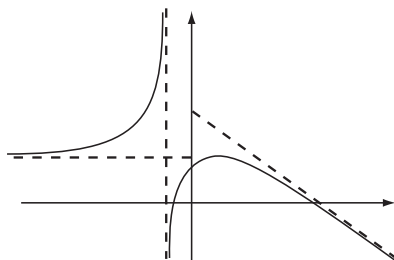
definition funktion sådan att värdet blir större (i icke-strikt mening) när argumentet växer

kommentar Om funktionen  $f$  är definierad för reella tal och tar reella värden innebär definitionen att  $f(x_1) \leq f(x_2)$  om  $x_1 \leq x_2$ . Om  $x_1 < x_2$  medför att  $f(x_1) < f(x_2)$ , så kallas funktionen **strängt växande** eller **strikt växande**.

## 8.3. Kurvor

### asymptot

definition (till en kurva) rät linje sådan att avståndet från en punkt på linjen till kurvan går mot noll då punktens avstånd från origo går mot oändligheten åt minst ett håll



En horisontell, en vertikal och en sned asymptot.

**exempel** En hyperbel har två asymptoter. Avståndet mellan en punkt på en av asymptoterna och kurvan går mot noll i båda riktningarna.

Exponentialfunktionens graf har en asymptot. Här går avståndet mellan en punkt på asymptoten till kurvan mot noll i endast en riktning.

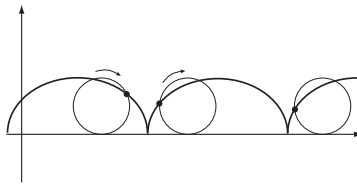
En parabel har ingen asymptot.

**etymologi** *Asymptot* kommer från grekiskans *asýmptōtos* 'som ej sammanfaller'; jämför *ptōsis* 'fall'.

**jämför** *avstånd från en punkt till en mängd* s. 174

## cykloid

**definition** plan kurva som beskrivs av en punkt på en cirkel då denna rullar på en rät linje



Cykloid.

**historia** Kurvan fick namnet *cykloid* av Galileo Galilei (1564—1642). Studier under 1600-talet rörande den (t.ex. av dess längd och arean under en båge alstrad då cirkeln rullat ett varv) av bl. a. Gilles Personne de Roberval (1602—1675), Pascal och Huygens bidrog till upptäckten av infinitesimalkalkylen.

**etymologi** *Cykloid* är bildat av grekiskans *kýklos* 'cirkel' och suffixet *-oid* 'till formen liknande'.

**jämför** *epicykloid* s. 156, *hypocykloid* s. 158, *trokoid* s. 162

## enkel kurva

**definition** kurva som inte skär sig själv

**exempel** En cirkel är enkel. En åttaformad kurva är inte enkel.

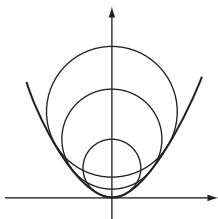
## envelopp

**definition** (till en familj av kurvor i planet) kurva som tangerar samtliga kurvor i familjen;

(till en familj av ytor i rummet) yta som tangerar varje yta i familjen

**exempel** Cirkelarna  $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + (y - a)^2 = 2a - 1\}$ ,  $a > \frac{1}{2}$ , som har medelpunkt i  $(0, a)$  och radie  $\sqrt{2a - 1}$ , tangerar alla parabeln  $y = \frac{1}{2}x^2$ , som är cirkelfamiljens envelopp.

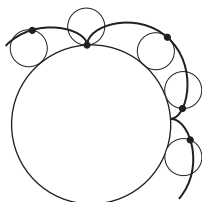
**etymologi** Ordet *enveloppe* kommer från det franska *enveloppe* 'hölje'.



Enveloppen till cirklarna är en parabel.

## epicykloid

definition plan kurva som genereras av en punkt på en cirkel när denna rullar längs utsidan av en given cirkel

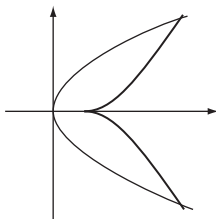


Epicykloid.

etymologi Prefixet i ordet *epicykloid* är den grekiska prepositionen *epí* 'på'; se vidare *cykloid*.

## evoluta

definition ⟨till en given plan kurva⟩ plan kurva som består av medelpunkterna till de osculerande cirklarna för den givna kurvan

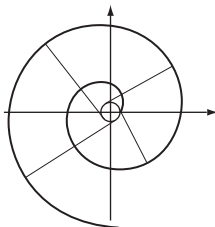


Evolutan till en parabel.

- exempel Evolutan till parabeln med ekvationen  $x = \frac{1}{2}y^2$  har ekvationen  $y^2 = (\frac{2}{3}(x-1))^3$ . Den har en spets i punkten  $(1, 0)$ .
- etymologi Ordet *evoluta* kommer av latinets *linea evoluta* 'utrullad linje', perfekt particip av verbet *evolvere* 'att rulla ut'.
- jämför *evolvent* s. 157

## evolvent

- definition (till en given plan kurva) plan kurva vars evoluta är den givna kurvan



Evoluten till en cirkel.

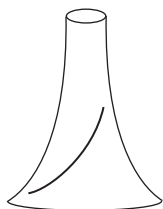
- exempel Evoluten till cirkeln med ekvationen  $x^2 + y^2 = 1$  har ekvationen  $\varphi = \sqrt{r^2 - 1} - \arccos(1/r)$ ,  $r \geq 1$ , i polära koordinater  $(r, \varphi)$ . Tänk på en tråd som rullas av en trådrulle.
- etymologi Ordet *evolvent* kommer av latinets *evolvens*, presens particip av verbet *evolvere* 'att rulla ut'.
- jämför *evoluta* s. 156

## funktionskurva

- definition plan kurva som definieras av en funktion av en av koordinaterna
- exempel Kurvan som ges av  $y^2 = x$  är funktionskurvan till funktionen  $f(y) = y^2$ . En cirkel är däremot inte en funktionskurva eftersom den inte kan beskrivas som grafen av en funktion.

## geodetisk linje

- definition (på en yta) kurva i ytan som alltid ger den kortaste vägen mellan två godtyckliga punkter på kurvan
- historia Studiet av geodetiska linjer på en sfär var av stor betydelse för sjöfarten. Under sin lärlingstid i Basel (1728–1729) bestämde Samuel Klingenskierna (1698–1765) i samarbete med Johann Bernoulli (1667–1748) differentialekvationerna för de geodetiska linjerna på rotationsytor.
- etymologi *Geodetisk* kommer av grekiskans *geōdaítes* 'lantmätare', bildat av *gē* 'jord' och *daíein* 'att dela upp'.



En geodetisk linje på en rotationsyta.

## hypocykloid

- definition** plan kurva som genereras av en fix punkt på en cirkel när denna rullar längs insidan av en fast cirkel
- etymologi** Prefixet i ordet *hypocykloid* är den grekiska prepositionen *hypó* 'under'; se vidare *cykloid*.

## intercept

- definition** ⟨för en kurva i ett koordinatsystem⟩ avståndet med tecken från origo till kurvans skärningspunkter med  $x$ -axeln eller  $y$ -axeln
- exempel** En rät linje med ekvationen  $ax + by + c = 0$  har intercepten  $p = -c/a$  och  $q = -c/b$  förutsatt att varken  $a$  eller  $b$  är noll. Om  $c \neq 0$  kan ekvationen skrivas  $x/p + y/q = 1$  med lämplig tolkning av  $1/p$  och  $1/q$ , vilket kallas ***räta linjens ekvation på interceptform***.
- etymologi** Latinets *intercipere* 'att rycka bort, att avbryta' har perfektstammen *intercept-*.

## kedjelinje

- synonym** **kedjekurva, catenaria**
- definition** plan kurva som intas av en kedja som under inverkan av enbart tyngdkraften hänger mellan två punkter
- kommentar** Man förutsätter att tyngdkraften verkar åt samma håll och är lika stark över hela kurvan. I ett lämpligt koordinatsystem får en kedjelinje ekvationen  $y = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ .

## kurvanpassning

- definition** konstruktion av en matematisk funktion som beskriver en kurva utgående från diskreta<sub>1</sub> värden
- kommentar** Kurvanpassning görs ofta med hjälp av en vald kurvanpassningsalgoritm och minsta kvadratmetoden.

## Lamékurva

- definition** plan kurva med ekvationen  $|x/a|^p + |y/b|^p = 1$  för några tal  $a, b, p > 0$

**kommentar** När  $p = 2/3$  och  $a = b$  kallas kurvan för en **asteroid**. När  $p = 1$  är kurvan en romb med koordinataxlarna som diagonaler. När  $p = 2$  är Lamékurvan en ellips. När  $p = 2,5$  kallas kurvan en **superellips**. När  $p$  växer mot oändligheten närmar sig kurvan en rektangel med sidorna parallella med koordinataxlarna.

Man definierar ofta en norm i  $\mathbf{R}^2$  genom att för  $p \geq 1$  sätta

$$\|(x, y)\|_p = (|x/a|^p + |y/b|^p)^{1/p}, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

För  $p = +\infty$  definierar man  $\|(x, y)\|_\infty = \max(|x/a|, |y/b|)$ , lika med gränsvärdet då  $p \rightarrow +\infty$ . Formlerna kan lätt generaliseras till  $\mathbf{R}^n$ .

**historia** Baldakintaket över en av de två vagnar gjutna i brons som återfanns i Qin Shi Huangdis gravkammare nära Xi'an har en form som är mycket nära en Lamékurva med  $a/b = 1,33$  och  $p = 2,8$ . Shi Huangdi var född 259, krönt sig till kejsare 221 och dog 210 f. Kr. Vagnarna göts troligen under hans livstid.

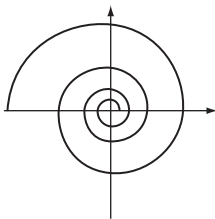
Piet Hein, mest känd för sina *Grukar*, gav Sergels torg i Stockholm formen av en superellips med  $a/b = 1,2$ . Genom att rotera en superellips kring en axel fick han fram ett superägg. Tillsammans med Bruno Mathsson (1907–1988) formgav han ett superelliptiskt bord med  $a/b = 1,5$ . Eftersom vagnarna i Xi'an hittades först 1978, har de inte kunnat påverka Lamé, Hein eller Mathsson.

**etymologi** Lamékurvorna är uppkallade efter Gabriel Lamé (1795–1870), som studerade dem i ett arbete 1818.

Piet Hein (1905–1996) införde termen *superellips* för en Lamékurva med  $p = 2,5$ .

## logaritmisk spiral

**definition** plan kurva där avståndet till en fix punkt växer exponentiellt med den polära vinkeln

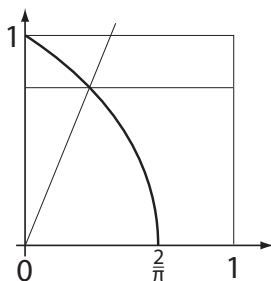


Logaritmisk spiral med ekvationen  $r = e^{a\varphi}$ ,  $a = \frac{1}{2\pi} \ln 2 \approx 0,11032$ .

**kommentar** Avståndet  $r$  till en fix punkt ges av formeln  $r = Ae^{a\varphi}$ , där  $\varphi$  är den polära vinkeln och  $A$  och  $a$  två konstanter. (Den borde kanske snarare kallas *exponentiell spiral*, men vinkeln växer logaritmiskt med radien, vilket förklarar namnet.)

## quadratrixen

definition plan kurva med ekvationen  $x = y / \tan(\frac{1}{2}\pi y)$ ,  $0 < y \leq 1$



Quadratrixen, en av de s.k. mekaniska kurvorna.

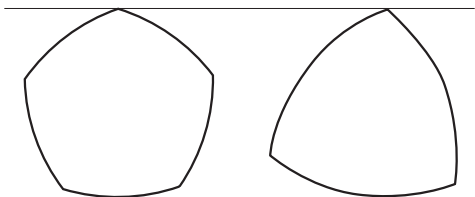
kommentar Kurvan kan beskrivas som skärningspunkten mellan en horisontell rät linje med avståndet  $y$  till  $x$ -axeln och en rät linje genom origo med vinkeln  $\frac{1}{2}\pi y$  mot  $x$ -axeln. Då  $y$  minskar från 1 till 0 rör sig båda med konstant hastighet så att de når  $x$ -axeln samtidigt. Då  $y = 0$  finns inte en unik skärningspunkt, men  $(2/\pi, 0)$  är gränsvärdet av skärningspunkterna då  $y \rightarrow 0$  genom positiva värden.

Kurvan kan användas för att dela en vinkel i tre lika delar: tredelningen av vinkeln överförs till tredelning av en sträcka. Den kan likaså användas för att konstruera en kvadrat med samma area som en given cirkelskiva. Men den löser inte de ursprungliga problemen, eftersom den inte är ett tillåtet hjälpmedel för dessa.

historia Införandet av quadratrixen tillskrivs ibland Hippias (400-talet f. Kr.), men det är troligare att det skedde några hundra år senare.

## Reuleauxkurva

definition plan kurva med konstant bredd



Två Reuleauxkurvor, en med fem och en med tre bågar.



**kommentar** Definitionen innebär att det minsta avståndet mellan två parallella räta linjer på var sin sida om kurvan (kurvans bredd) är oberoende av deras riktning. Denna egenskap har bl. a. en cirkel.

Den enklaste Reuleauxkurvan efter cirkeln består av tre cirkelbågar som bildar en triangelliknande figur. Varje cirkelbåge har sin medelpunkt i skärningen mellan de två andra. Samma idé kan användas för ett godtyckligt udda antal cirkelbågar större än tre.

Wankelmotorn använder en Reuleauxkurva med tre bågar.

**etymologi** Reuleauxkurvorna är uppkallade efter Franz Reuleaux (1829—1905).

## sluten kurva

**definition** kurva där intervallets ändpunkter avbildas på samma punkt

**exempel** En cirkel är sluten. En halvcirkel är inte sluten.

## spiral

**definition** plan kurva som rör sig bort från en fix punkt under det att den går runt denna

**kommentar** Ibland kallas en helix för *spiral*.

En **arkimedisk spiral** kännetecknas av att avståndet till origo är en affin funktion av vinkeln.

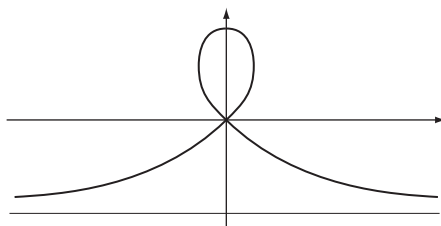
**historia** Arkimedes (Arkhimédēs, 287—212 f. Kr.) visar i *Om spiraler* hur spiralen kan användas för att lösa problemet om cirkelns kvadratur. Spiralen återför frågan om vinkelns tredelning på det enkla problemet att dela en sträcka i tre lika delar. Förklaringen är att kurvan framställs genom en samtidig rotationsrörelse och translationsrörelse.

**etymologi** *Spiral* kommer från medeltidslatinets *spirale*, avlett av *spira* 'spiral, slinga, kringla'.

**jämför** *helix* s. 228, *logaritmisk spiral* s. 159 (figur finns där)

## strofoid

**definition** plan kurva med ekvationen  $x^2(1+y) = y^2(1-y)$  i lämpliga koordinater



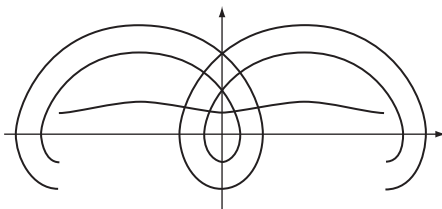
Strofoiden, en tredjegradskurva med ögla och asymptot.

**kommentar** Kurvan har en horisontell asymptot  $y = -1$  och korsar sig själv i origo. Ovanför origo har den en ögla.

etymologi Ordet *strofoïd* är bildat av grekiskans *strophé* 'vändning' och suffixet *-oid* 'till formen liknande'. Namnet infördes 1837 av Enrico Montucci (1808—1877).

## trokoid

definition plan kurva som genereras av en fix punkt på en radie i en cirkel eller på radiens förlängning, när cirkeln rullar på en rät linje



Tre trokoider.

kommentar Om punkten ligger på cirkeln, så får man en cykloid, som alltså är ett specialfall.

etymologi *Trokoid* är bildat av grekiskans *trókhos* 'hjul' och suffixet *-oid* 'till formen liknande'.

jämför *cykloid* s. 155, *epicykloid* s. 156

## 8.4. Differentialkalkyl

### andraderivata

definition derivatan av derivatan av en funktion

kommentar Andraderivatan betecknas  $f''$ , som utläses "f bis", eller  $d^2f/dx^2$ , som utläses "d två f d x två". Om en kropps<sub>1</sub> läge vid tiden  $t$  är  $f(t) \in \mathbf{R}^3$ , så är andraderivatan  $f''(t)$  accelerationen (som vektor) vid tiden  $t$ .

På motsvarande sätt definieras **tredjederivatan**  $f'''$  som derivatan av  $f''$  och allmänt  $n$ :te derivatan  $f^{(n)}$  som derivatan av  $f^{(n-1)}$ .

### begynnelsevärde

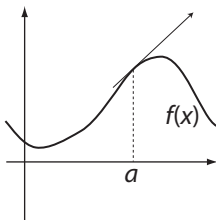
synonym **startvärde**

definition ⟨för en differentialekvation⟩ det värde som en lösning skall anta vid en given tidpunkt

### derivata

synonym **förstaderivata**

definition ⟨av en funktion  $f$  av en variabel i en punkt  $a$ ⟩ gränsvärdet som differenskvoten  $(f(x) - f(a))/(x - a)$  närmar sig då  $x$  går mot  $a$



Derivatans av  $f$  i punkten  $a$  bestämmer tillsammans med  $a$  och  $f(a)$  en rät linje, som tangerar funktionskurvan i punkten  $(a, f(a))$ .

**kommentar** Derivatans betecknas  $f'$ , som utläses ” $f$  prim”, eller  $df/dx$ , som utläses ” $d f d x$ ”. En annan beteckning är  $Df$ , där  $D = d/dx$  är **derivationsoperatorn** eller **derivationsoperatorn**. (Fysiker brukar skriva  $d/dx$ .)

Derivatans representerar riktningskoefficienten för tangenten i punkten  $a$ . Om derivatan i punkten är positiv, så stiger kurvan; om den är negativ, så pekar kurvan nedåt. Om en kropps<sub>1</sub> läge vid tiden  $t$  beskrivs är  $f(t)$ , så är derivatan  $f'(t)$  dess hastighet (som vektor) vid tiden  $t$ .

**historia** Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646—1716) och Isaac Newton (1642—1727) utvecklade oberoende av varandra begreppet derivata från omkring år 1670. Leibniz arbetade dock främst med differentier  $dx$  och  $dy$ .

**etymologi** *Derivata* betyder ’avledd’ och är perfekt particip av det latinska verbet *derivare* ’avleda’, ursprungligen om avledning från ett vattendrag till en kanal; jämför det latinska ordet *rivus* ’å’.

Beteckningarna  $dy/dx$  och  $\dot{x}$  har sina ursprung hos Leibniz respektive Newton. Den senare använde termer *fluxioner* för derivator  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ .

Joseph Louis Lagrange (1736—1813) införde termen *derivata* i slutet av 1700-talet, liksom prim-symbolen för förstaderivatans. Symbolen  $D$  för *derivationsoperatorn*  $f \mapsto f'$  infördes av Louis François Antoine Arbogast (1759—1803) år 1800.

## deriverbar

**definition** (om en funktion och en punkt) sådan att funktionens förstaderivator existerar i punkten;

(om en funktion och ett område) sådan att funktionens förstaderivator existerar i varje punkt i området

**exempel** Funktionen som definieras av att  $f(x) = 0$  då  $x < 0$  och  $f(x) = x$  då  $x \geq 0$  är deriverbar i varje punkt utom i origo. Där existerar vänsterderivatan och högerderivatan, men de är inte lika.

## differentialekvation

definition	ekvation med en obekant som är en funktion, och i vilken ingår denna funktions derivator av första ordningen eller av högre ordning
kommentar	En differentialekvation är av <b>första ordningen</b> om den innehåller förstaderivator men inga högre derivator och av <b>andra ordningen</b> om den innehåller andraderivator men inga högre derivator.
exempel	Ekvationen $u' = u$ , som löses av $u(x) = Ce^x$ . Laplaceekvationen, som i två variabler lyder $\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = 0$ .
historia	Sedan differentialkalkylen utvecklats i slutet av 1600-talet sökte matematiker finna differentialekvationerna för vissa (främst mekaniska) kurvor. Huvudsaken var inte att lösa differentialekvationen, eftersom kurvan ändå ansågs helt bestämd av denna.
jämför	<i>derivata</i> s. 162, <i>funktion</i> s. 14

## Eulers stegmetod

synonym	<b>tangentmetoden</b>
definition	metoden att approximativt lösa en ordinär differentialekvation av första ordningen genom att stega sig fram längs det vektorfält som definieras av ekvationen
kommentar	Ekvationen har formen $u'(t) = f(t, u(t))$ . Om begynnelsevärdet är $v_0$ , så definierar man $v_{j+1} = v_j + hf(jh, v_j)$ , $j \in \mathbf{N}$ , där $h > 0$ är en vald steglängd. (Den räta linjen $L_j(t) = v_j + (t - jh)f(jh, v_j)$ går genom punkten $(jh, v_j)$ och har riktningskoefficienten lika med värdet av $f$ i den punkten. Det är alltså bra att välja $v_{j+1} = L_j((j+1)h)$ .)

## glatt

definition	(om en funktion) kontinuerligt deriverbar ett tillräckligt antal gånger
kommentar	En funktion kallas alltså glatt om den har ett tillräckligt antal kontinuerliga derivator; hur många får bero på sammanhanget. Oftast kräver man att det skall finnas kontinuerliga derivator av alla ordningar. En kurva eller yta kallas glatt om den lokalt kan definieras som grafen till en glatt funktion.
exempel	Funktionen som ges av $f(x) = e^{-1/x}$ då $x > 0$ och $f(x) = 0$ annars är glatt; den har kontinuerliga derivator av alla ordningar.

## homogen differentialekvation

definition	linjär differentialekvation där varje term har som faktor den obekanta funktionen eller någon av dess derivator
kommentar	En linjär differentialekvation som inte uppfyller detta krav kallas <b>inhomogen</b> .
exempel	Differentialekvationen $u'' + 3u' + 4u = 0$ är homogen; ekvationen $u'' + 3u' + 4u = 1$ är inhomogen.

## högerderivata

definition (av en funktion  $f$  av en reell variabel, i en punkt  $a$ ) det gränsvärde som differenskvoten  $(f(x) - f(a))/(x - a)$  närmar sig då  $x$  går mot  $a$  genom värden som är större än  $a$

jämför gränsvärde s. 113, vänsterderivata s. 169

## implicit derivering

definition metod för beräkning av derivatan till en funktion som är given implicit av en ekvation

exempel Keplers ekvation, uppkallad efter Johannes Kepler (1571–1630), har formen  $M = E - \varepsilon \sin E$ , där  $M$  är en planets medelanomali,  $E$  dess excentriska anomali och  $\varepsilon$  dess banas excentricitet (de två förstnämnda är klassiska astronomiska termer, vilkas betydelse inte spelar någon roll för detta exempel). Den ger  $M$  som funktion av  $E$ , men man kan inte lösa ut  $E$  explicit som funktion av  $M$ . Ändå kan man beräkna derivatan  $dE/dM$  genom implicit derivering:

$$1 = \frac{dM}{dM} = \frac{dE}{dM} - \varepsilon \cos E \frac{dE}{dM},$$

så att  $dE/dM = 1/(1 - \varepsilon \cos E)$  och till exempel  $dE/dM = 1/(1 - \varepsilon)$  då  $M = E = 0$ .

## karaktéristisk ekvation

definition (till en differentialekvation  $u'' + Au' + Bu = 0$ ) ekvationen  $m^2 + Am + B = 0$

kommentar Man ersätter alltså deriveringsoperatören  $D$  med en variabel, till exempel  $m$ .

Den karakteristiska ekvationens betydelse framgår av att om  $\alpha$  och  $\beta$  är dess rötter, så är  $Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t}$  för alla konstanter  $A$  och  $B$  en lösning till differentialekvationen ( $t$  betecknar här den oberoende variabeln). Den karakteristiska ekvationen kan definieras på motsvarande sätt för differentialekvationer av andra ordningar än två.

## kedjeregeln

definition den regel som ger derivatan av en sammansatt funktion

kommentar Om  $h = g \circ f$  är sammansättningen av funktionerna  $f$  och  $g$ , så är dess derivata  $h'(x) = g'(f(x))f'(x)$

## kvotregeln

definition den regel som ger derivatan av en kvot av två funktioner

kommentar Om  $f$  och  $g$  är två funktioner och  $h = f/g$  deras kvot, så säger regeln att  $h' = (f/g)' = (gf' - fg')/g^2$ .

## Laplaceekvationen

definition den partiella differentialekvationen  $\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = 0$  och dess motsvarigheter i högre dimensioner

- kommentar Ekvationens lösningar kallas *harmoniska funktioner*.  
 etymologi Laplaceekvationen är uppkallad efter Pierre Simon de Laplace (1749–1827).

## linjär differentialekvation

- definition differentialekvation där leden är polynom av högst första graden i den obekanta funktionen och dess derivator  
 kommentar Leden behöver däremot inte nödvändigtvis vara av första graden i den oberoende variabeln.  
 exempel Ekvationerna  $u'' + x^2u' + 4x^3u = \sin x$  och  $u' + (\cos x)u = 0$  är lineära, medan ekvationerna  $u' = u^2$  och  $u' = e^u$  inte är det.  
 jämför *derivata* s. 162, *differentialekvation* s. 164

## logistiska tillväxtekvationen

- definition den enklaste differentialekvationen av första ordningen som beskriver tillväxt med dämpning  
 kommentar Ekvationen har formen  $u' = ku - mu^2$ , där  $u$  är antalet i en population, och där den kvadratiske termen  $-mu^2$  hämmar dess tillväxt. En population som startar från ett lågt värde kan aldrig komma över gränsen  $k/m$ .  
 Tillväxt utan dämpning fås om man tar  $m = 0$ ; då är ekvationen linjär, annars icke-linjär. Ekvationen för tillväxt utan dämpning kallas *Malthus' lag* efter beräkningar av Thomas Malthus (1766–1834), som varnade för befolkningstillväxten 1798. Ekvationen för tillväxt med dämpning framställdes 1836 av Pierre François Verhulst (1804–1849).  
 etymologi *Logistik* kommer från grekiska *logistiké* 'aritmetik'.

## Maclaurinserie

- definition det specialfall av en Taylorserie som fås när den givna punkten är origo

## Maclaurins formel

- definition det specialfall av Taylors formel som fås när den givna punkten är origo  
 exempel Funktionen  $x \mapsto \cos x$  beskrivs som

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cos x_1 \frac{x^6}{6!},$$

där  $x_1$  är någon punkt mellan origo och  $x$ .

- etymologi Formeln är uppkallad efter Colin Maclaurin (1698–1746).

## medelvärdessatsen

- definition den sats som säger att differenskvoten hos en funktion med avseende på två punkter är lika med derivatan i någon punkt i intervallet mellan dessa

**kommentar** Om en funktion  $f$  är deriverbar i ett intervall  $[a, b]$  så säger satsen att det finns minst en punkt  $c \in ]a, b[$  sådan att  $(f(b) - f(a))/(b - a) = f'(c)$ .

## Newton–Raphsons iterationsmetod

**definition** metoden att hitta lösningar till en ekvation genom att dra tangenter till en funktionskurva

**kommentar** Om vi har en ekvation  $f(x) = 0$  och en punkt  $x_0$  på  $x$ -axeln, så kan det hända att  $x_1$ , definierad som skärningspunkten mellan  $x$ -axeln och tangenten till funktionskurvan i punkten  $(x_0, f(x_0))$ , ligger närmare ett nollställe än  $x_0$ . Allmänt sätter man

$$x_{j+1} = x_j - f(x_j)/f'(x_j), \quad j \in \mathbf{N},$$

förutsatt att derivatan i  $x_j$  existerar och inte är noll. Under vissa förutsättningar konvergerar då följderna  $(x_j)_{j \in \mathbf{N}}$  mot ett nollställe.

**historia** Metoden är uppkallad efter Isaac Newton (1642–1727) och Joseph Raphson (omkring 1648 – omkring 1715), men i sin moderna form med användande av derivatan infördes den av Simpson 1740.

**etymologi** *Iteration* kommer från latinets *iteratio* 'upprepning' (*iterum* 'ånyo, om igen').

## numerisk derivering

**definition** beräkning av en differenskvot i stället för en derivata

**kommentar** I stället för derivatan  $f'(x)$  använder man en av differenskvoterna  $(f(x+h) - f(x))/h$ ,  $(f(x) - f(x-h))/h$  eller  $(f(x+h) - f(x-h))/(2h)$ .

## partiell derivata

**definition** derivata av en funktion av två eller flera variabler med avseende på en utvald variabel när övriga variabler hålles konstanta

**kommentar** Om  $f$  är en funktion av två variabler  $x$  och  $y$ , så skrivs de två förstaderivatorna

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Högre derivator skrivs

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \quad \dots$$

Att övriga variabler hålles konstanta uttrycks ibland, speciellt inom ekonomiska vetenskaper, med uttrycket *ceteris paribus*.

**etymologi** Adjektivet *partiell* syftar på att man kan definiera en total derivata varav de partiella är delar. Uttrycket *ceteris paribus* kommer från latinets (kasus ablativ) och betyder 'med övriga (storheter) lika'.

## produktregeln

**synonym** **Leibniz' regel**

definition	den regel som ger derivatan av en produkt av två funktioner
kommentar	Om $f$ och $g$ är två funktioner och $h = fg$ deras produkt, så säger regeln att $h' = (fg)' = fg' + f'g$ .
historia	Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716) presenterade regeln 1684 (för differentier) och har givit upphov till namnet.

### stationär punkt

definition	(till en deriverbar reellvärd funktion) punkt i definitionsmängden där derivatan, eller om det gäller en funktion av flera variabler, de partiella derivatorna, är noll
kommentar	En lokal maximi- eller minimipunkt till en deriverbar funktion är en stationär punkt, men inte säkert omvänt.

### Taylorserie

definition	oändlig serie vars termer är de polynomiella termerna i Taylors formel av alla grader
kommentar	Serien har utseendet

$$\sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!},$$

där  $f$  är den givna funktionen, som antas vara kontinuerligt deriverbar hur många gånger som helst. Serien behöver inte konvergera, och även om den gör det, behöver dess summa inte vara lika med  $f$ . Detta gäller dock under vissa villkor.

exempel	Exponentialfunktionen $\exp$ har i punkten $a$ Taylorserien
---------	---

$$\sum_0^{\infty} e^a \frac{(x-a)^k}{k!};$$

serien konvergerar för alla  $x$  och dess summa är just  $e^x$ .

Funktionen definierad av  $f(x) = e^{-1/x^2}$ ,  $x \neq 0$ ,  $f(0) = 0$ , har alla derivator lika med noll i origo, så dess Taylorserie där är noll och representerar således inte funktionen.

### Taylors formel

definition	den formel som beskriver en funktion med hjälp av ett polynom konstruerat från dess derivator i en given punkt och en restterm
kommentar	Om $f$ är funktionen, som antas vara $m$ gånger kontinuerligt deriverbar, och $a$ den givna punkten, så har formeln utseendet

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} + R_m(a, x),$$

där

$$R_m(a, x) = f^{(m)}(x_1) \frac{(x-a)^m}{m!}$$

är resttermen och  $x_1$  någon punkt mellan  $a$  och  $x$ . Motsvarande formel finns också för funktioner av flera variabler.



etymologi Formeln är uppkallad efter Brook Taylor (1685—1731).  
 jämför *Maclaurins formel* s. 166

### terrasspunkt

definition (för en deriverbar funktion av en reell variabel) punkt i definitionsmängden där funktionens derivata är noll och funktionen antar både större och mindre värden nära punkten  
 kommentar Varje terrasspunkt är en stationär punkt men inte omvänt.  
 historia Ordet *terrasspunkt* förekommer inte i läroböcker förrän på 1960-talet. Troligen används termen endast i Sverige.  
 jämför *inflexionspunkt* s. 180, *stationär punkt* s. 168

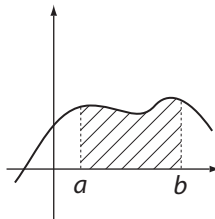
### vänsterderivata

definition (av en funktion  $f$  av en reell variabel, i en punkt  $a$ ) det gränsvärde som differenskvoten  $(f(x) - f(a))/(x - a)$  närmar sig då  $x$  går mot  $a$  genom värden som är mindre än  $a$   
 jämför *gränsvärde* s. 113, *högerderivata* s. 165

## 8.5. Integralkalkyl

### integral

synonym **bestämd integral**  
 definition (till en reell funktion över ett intervall) arean räknad med tecken av den yta som begränsas av grafen till funktionen,  $x$ -axeln och de båda vertikala linjerna genom intervallets ändpunkter



Integralen ges av arean under funktionskurvan.

kommentar Om funktionen är  $f$  och intervallet är  $[a, b]$  skrivs integralen över intervallet som

$$\int_a^b f(x) dx \text{ eller } \int_a^b f(x) dx.$$

De två viktigaste integralbegreppen är **Riemannintegralen** och **Lebesgueintegralen**, uppkallade efter Bernhard Riemann (1826—1866) respektive Henri Lebesgue (1875—1941).

- historia** Symbolen  $\int$  infördes av Leibniz som symbol för integral och är en dåtida bokstav som vi finner i ordet *Summa*, där *s*-et skrevs utdraget. I början av 1700-talet användes även *s* eller *S*. Beteckningen för bestämd integral med integrationsgränser infördes av Jean Baptiste Joseph Fourier (1768—1830).
- etymologi** *Integral* kommer från det medeltidslatinska adjektivet *integralis* 'som bildar en helhet', avlett av *integer* 'hel'. Detta ord består i sin tur av det nekande *in*- och en form av stammen i *tangere* 'att vidröra, att beröra', alltså 'örörd'. Samma beståndsdelar finns i *intakt*.

## integration

- definition** operation som till en funktion ordnar dess integral eller primitiva funktion
- kommentar** En historisk term i sammanhanget är ***kvadratur***, som innebär beräkning av det kvadrat område som har samma area som en given figur.
- jämför** *cirkelns kvadratur* s. 132

## mätbar

- definition** ⟨om en punktmängd på en rät linje, i ett plan eller i rymden⟩ att ha egenskapen att kunna tilldelas längd, area respektive volym
- kommentar** Om mängden ligger i planet kan man även säga ***kvadrerbar***. Om man accepterar urvalsaxiomet, så kan man definiera en mängd på tallinjen som är så oregelbunden att den inte kan tilldelas någon längd; motsvarande gäller i planet och rummet.

## numerisk integration

- definition** numerisk (approximativ) beräkning av integraler

## obestämd integral

- definition** ⟨till en given funktion⟩ mängden av alla primitiva funktioner till den givna funktionen
- jämför** *primitiv funktion* s. 171

## partiell integration

- definition** formel för integrering av en produkt av funktioner
- kommentar** Formeln lyder

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx,$$

där  $F$  är en primitiv funktion till  $f$ , och  $g'$  är derivatan av  $g$ . Den följer av produktregeln:  $(Fg)' = fg + Fg'$ .

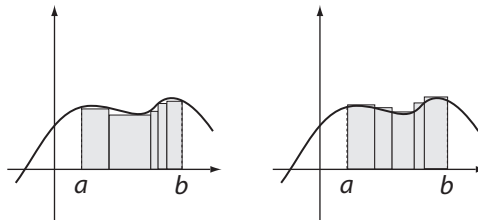
- historia** Innan integralkalkylen hade utvecklats visade Leibniz på den likvärdiga så kallade transmutationsmetoden, som överför en beräkning av arean av ett visst område till ett annat, mer lättberäknat område. Denna metod presenterades också av Anders Gabriel Duhre 1721.

## primitiv funktion

synonym	<b>antiderivata</b>
definition	(till en given funktion av en reell variabel) funktion vars derivata är den givna funktionen
exempel	Andragradspolynomet $F(x) = 3x^2 + 4x + 7$ är en primitiv funktion till förstagradspolynomet $f(x) = 6x + 4$ . Sinusfunktionen är en primitiv funktion till cosinusfunktionen eftersom derivatan av $\sin x$ är $\cos x$ . Men även $2 + \sin x$ har samma derivata, så det finns flera primitiva funktioner.
jämför	<i>obestämd integral</i> s. 170

## rektangelmetoden

definition	metoden att uppskatta arean av geometriska figurer genom att konstruera rektanglar
------------	--



Rektangelmetoden. Ytan under kurvan ersätts här med fem rektanglar.

kommentar	Om en mängd omfattar en union av disjunkta rektanglar, så är dess area minst lika med summan av rektanglarnas areor (som till vänster i figuren); om mängden ingår i en union av rektanglar, så är dess area högst lika stor som summan av rektanglarnas areor (som till höger).
-----------	--

Integralen  $\int_a^b f(x)dx$  kan också approximeras med

$$\sum_0^m c_j f(x_j),$$

där  $m$  är ett positivt heltal,  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$  och vikterna  $c_j = x_{j+1} - x_j$ ,  $j = 0, \dots, m-1$ ,  $c_m = 0$  eller  $c_j = x_j - x_{j-1}$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,  $c_0 = 0$ . Om restriktionen av  $f$  till varje intervall  $[x_j, x_{j+1}[$ ,  $j = 0, \dots, m-1$ , är konstant, så är formeln exakt i det första fallet; om restriktionen till varje intervall  $]x_j, x_{j+1}]$  är konstant, så är formeln exakt i det andra fallet. Man kan också ersätta funktionsvärdena  $f(x_j)$  med andra tal, till exempel supremum eller infimum över intervallet  $[x_j, x_{j+1}]$  i det första fallet.

jämför	<i>trapetsmetoden</i> s. 172, <i>Simpsons formel</i> s. 172, <i>undersumma</i> s. 173, <i>översumma</i> s. 173
--------	--

## Riemannsumma

definition summa som används för att approximera en Riemannintegral

kommentar En funktion  $f$  definierad i ett intervall  $[a, b]$  har Riemannsummorna

$$\sum_{j=0}^{m-1} f(y_j)(x_{j+1} - x_j),$$

där  $x_0 = a$ ,  $x_m = b$ ,  $x_j \leq y_j \leq x_{j+1}$  för  $j = 0, \dots, m-1$ . Under lämpliga villkor konvergerar summan mot integralen  $\int_a^b f(x)dx$ .

## Simpsons formel

definition formel som ger en uppskattning av arean hos en mängd i planet genom att ersätta dess kontur med parabelbågar

kommentar Formeln innebär att integralen  $\int_a^b f(x)dx$  approximeras med

$$\sum_0^m c_j f(x_j),$$

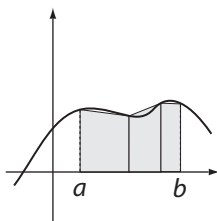
där  $m$  är ett jämnt positivt heltal,  $h = (b - a)/m$ ,  $x_j = a + jh$  för  $j = 0, \dots, m$  och vikterna  $c_j$  är  $c_0 = c_m = h/3$ ,  $c_1 = c_3 = \dots = c_{m-1} = 4h/3$ ,  $c_2 = c_4 = \dots = c_{m-2} = 2h/3$ . Om  $f$  är kontinuerlig och dess restriktion till varje intervall  $[x_{2k}, x_{2k+2}]$ ,  $k = 0, \dots, m/2-1$ , är en andragradsfunktion (speciellt om  $f$  är en rifunktion av grad högst 2), så är formeln exakt.

etymologi Formeln är uppkallad efter Thomas Simpson (1710—1761), men den beskrevs redan av Newton, vilket Simpson själv erkände.

jämför *rektangelmetoden* s. 171, *trapetsmetoden* s. 172

## trapetsmetoden

definition metoden att uppskatta arean av geometriska figurer genom att konstruera parallelltrapetser



Trapetsmetoden. Ytan under kurvan ersätts här med tre parallelltrapetser.

**kommentar** Integralen av en funktion  $f: [a, b] \rightarrow [0, +\infty[$  approximeras med summan av areorna av parallelltrapetserna med hörnen i punkterna  $(x_j, 0)$ ,  $(x_{j+1}, 0)$ ,  $(x_{j+1}, f(x_{j+1}))$ ,  $(x_j, f(x_j))$ ,  $j = 0, \dots, m-1$ , där  $a = x_0 < x_j < x_{j+1} < x_m = b$  för  $j = 1, \dots, m-2$ .

Detta innebär att integralen  $\int_a^b f(x)dx$  approximeras med

$$\sum_0^m c_j f(x_j),$$

där  $m$  är ett positivt heltal,  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = b$  och vikterna  $c_j$  är  $c_0 = \frac{1}{2}(x_1 - x_0)$ ,  $c_j = x_{j+1} - x_{j-1}$  för  $j = 1, \dots, m-1$ , och  $c_m = \frac{1}{2}(x_m - x_{m-1})$ . Om restriktionen av  $f$  till varje intervall  $[x_j, x_{j+1}]$ ,  $j = 0, \dots, m-1$ , är en affin funktion, så är formeln exakt.

**jämför** *rektangelmetoden* s. 171, *Simpsons formel* s. 172

## undersumma

**definition** (vid definitionen av en Riemannintegral) Riemannsumma som är bildad genom att man ersätter  $f(y_j)$  med tal som minorerar funktionen i varje intervall

**jämför** *rektangelmetoden* s. 171, *översumma* s. 173

## variabelbyte

**definition** byte av integrationsvariabeln i en integral

**kommentar** Om  $g: [c, d] \rightarrow [a, b]$  är en kontinuerligt deriverbar funktion med  $g' > 0$  och  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  är en kontinuerlig funktion, så gäller

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = \int_c^d f(g(t))g'(t)dt.$$

**exempel** Integralen

$$\int_a^b \frac{dx}{e^x + e^{-x} + 1}$$

kan beräknas genom variabelbytet  $t = e^x$ , vilket leder till integralen av en rationell funktion,

$$\int_{e^a}^{e^b} \frac{dt}{t^2 + t + 1}.$$

## översumma

**definition** (vid definitionen av en Riemannintegral) Riemannsumma som är bildad genom att man ersätter  $f(y_j)$  med tal som majorerar funktionen i varje intervall

**jämför** *rektangelmetoden* s. 171, *undersumma* s. 173

## 9. Geometri

### 9.1. Allmänt

#### absolut geometri

definition geometri utan parallellaxiomet

kommentar Satser i den absoluta geometrin gäller i såväl den euklidiska som den hyperboliska geometrin.

#### affin geometri

definition studiet av de egenskaper som är invarianta under affina avbildningar

kommentar Dessa egenskaper är bl. a. egenskapen att vara en rät linje, egenskapen hos ett par av linjer att vara parallella, delningsförhållandet på en linje. Vidare egenskapen att vara ellips (men inte egenskapen att vara en cirkel), att vara en parabel, att vara en hyperbel. Medianerna i en triangel är affint invarianta, men inte bisektriserna, höjderna eller mittpunktsnormalerna – de definieras med hjälp av vinklar, som inte är affint invarianta.

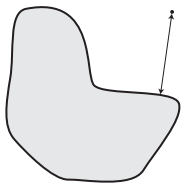
etymologi *Affin* kommer av latinets *affinis* 'närliggande, besläktad'

#### analytisk geometri

definition gren av matematiken där geometri studeras med hjälp av koordinat-system och algebraiska metoder

#### avstånd från en punkt till en mängd

definition infimum av alla avstånd från den givna punkten till en punkt i mängden



Avstånd från en punkt till en mängd.

kommentar Om mängden är sluten (som en rät linje, ett plan eller en cirkel), så är avståndet till mängden lika med avståndet till en närmaste punkt i mängden.

exempel Avståndet från en punkt utanför en cirkel till cirkeln är lika med avståndet från punkten till medelpunkten minus radien (det finns en enda närmaste punkt). Avståndet från medelpunkten i en cirkel

till cirkeln är lika med radien (det finns oändligt många närmaste punkter.)

jämför *avstånd mellan två punkter* s. 175

### avstånd mellan parallella linjer

definition avståndet från en godtycklig punkt på den ena linjen till den andra linjen

jämför *avstånd från en punkt till en mängd* s. 174

### avstånd mellan parallella plan

definition avstånd från en godtycklig punkt i det ena planet till det andra planet

jämför *avstånd från en punkt till en mängd* s. 174

### avstånd mellan två punkter

definition längden av den kortaste vägen mellan punkterna

kommentar Den kortaste vägen syftar på den kortaste tillåtna vägen. I euklidisk geometri är det sträckan mellan punkterna.

Om punkterna är  $x$  och  $y$  i planet med koordinaterna  $(x_1, x_2)$  och  $(y_1, y_2)$  så är (det euklidiska) avståndet lika med

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \geq 0.$$

Formeln kallas *avståndsformeln*. Det euklidiska avståndet mellan två punkter i rummen med koordinaterna  $(x_1, x_2, x_3)$  och  $(y_1, y_2, y_3)$  är

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2} \geq 0.$$

exempel Det finns flera olika avståndsbegrepp. Ett enkelt exempel är avståndet mellan två punkter på jordytan när man inte får gräva tunnlar. Avståndet mellan nordpolen och sydpolen är då  $\pi$  gånger jordens radie, medan avståndet genom jorden är 2 gånger jordens radie (om vi antar att jorden är ett klot).

### båge

definition sammanhängande del av en kurva

### differentialgeometri

definition gren av matematiken där man studerar kurvor och ytor med hjälp av differential- och integralkalkyl

historia Christiaan Huygens' (1629—1695) geometriska studium av kurvor motiverade både Leibniz och Newton till vidare undersökningar med differentier (Leibniz) eller fluxioner (Newton).

etymologi Termen *differentialgeometri* infördes av Luigi Bianchi (1856—1928) i slutet av 1800-talet.

**diskret<sub>1</sub>**

**definition** (om en mängd där ett avstånd har definierats) sådan att det för varje element finns ett minsta positivt avstånd till varje annat element

**exempel** Heltalen bildar en diskret<sub>1</sub> mängd: varje heltal har minst avståndet 1 till varje annat heltal.

De rationella talen bildar inte en diskret<sub>1</sub> mängd: mellan två olika rationella tal finns oändligt många rationella tal.

**etymologi** *Diskret* kommer från latinets *discretus* 'åtskild, skild från varandra'.

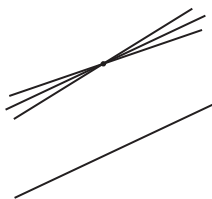
**jämför** *diskret<sub>2</sub> sannolikhetsfördelning* s. 269

**enhetssträcka**

**definition** sträcka med längden 1 längdenhet

**Euklides' parallellpostulat**

**definition** det axiom hos Euklides som säger att om en sträcka skär två andra sträckor och summan av de inre vinklarna på den ena sidan om den första sträckan är mindre än två rätta, så skär de rätta linjer som definieras av de två andra sträckorna varandra på denna sida om den första sträckan



Euklides' parallellpostulat: en av linjerna är parallell med den givna; de två andra inte.

**kommentar** Axiomet implicerar att det finns högst en rät linje parallell med en given rät linje och som går genom en given punkt. Det garanterar inte att det finns någon sådan parallell linje.

Axiomet är uppfyllt i den euklidiska geometrin, men också i den elliptiska geometrin, en av de icke-euklidiska geometrierna, där det inte finns några parallella linjer alls. Postulatet utesluter nämligen inte att linjerna möts även om summan av de inre vinklarna är lika med två rätta. Det är alltså för svagt för att ensamt avgränsa det som nu kallas euklidisk geometri.

Dock betyder preciseringen att linjerna möts ”på denna sida om den första sträckan” att Euklides förutsätter att planet är orienterbart. Därmed utesluts ändå implicit den elliptiska geometrin.

Man kan utesluta den elliptiska geometrin också på ett annat sätt, nämligen genom att till det ursprungliga parallellpostulatet lägga några axiom som handlar om ordning på en linje. Sådana infördes 1882 av Moritz Pasch (1843–1930).



historia Axiomet finns i Euklides' verk *Stoikheía* (i latinsk översättning *Elementa*) 'Grundbegreppen' under rubriken *Aitémata* 'Begärda (egen-skaper), Postulat' som det femte och sista axiomat.

Parallellpostulatets omvändning säger:

*Om en transversal skär två räta linjer så att alternatvinklarna är lika, så är linjerna parallella.*

Denna sats, som senare fått nummer 27, är inte ett axiom utan en sats hos Euklides. Den bygger på en tidigare sats (med nummer 16), som säger att en yttervinkel i en triangel är större än var och en av de motstående inre vinklarna. Denna sats är med den närmast till hands liggande tolkningen inte sann, vilket man ser om man ritar en någorlunda stor triangel på en sfär. Dess bevis bygger på någon outtalad förutsättning; en sådan kan vara orienterbarhet.

För att eliminera den elliptiska geometrin från de modeller som uppfyller axiomen har man därför senare lagt till sats 27 eller något ekvivalent påstående som ett axiom: parallellpostulatet har därmed ersatts med ett starkare krav, kallat *parallellaxiomat*, som är ekvivalent med parallellpostulatet kombinerat med dess omvändning sats 27.

## euklidisk geometri

definition gren av matematiken som fortsätter den geometri som framställdes av Euklides och som rör punkter, linjer och plan samt vinklar och avstånd i planet, det tredimensionella rummet och även i rum av högre dimension

kommentar I den euklidiska geometrin gäller parallellaxiomat.

historia Euklides [ɛu'kli:dəs] (på grekiska *Eukleidēs*), som var verksam omkring 300 f.Kr., är världens mest framgångsrika läroboksförfattare. Hans verk *Stoikheía* 'Grundbegreppen', senare känd under den till latin översatta titeln *Elementa*, har kommit ut i över tusen utgåvor sedan den första tryckningen år 1482.

Konstruktioner i klassisk euklidisk geometri motsvarar konstruktioner som kan utföras med passare och linjal.

## euklidiskt rum

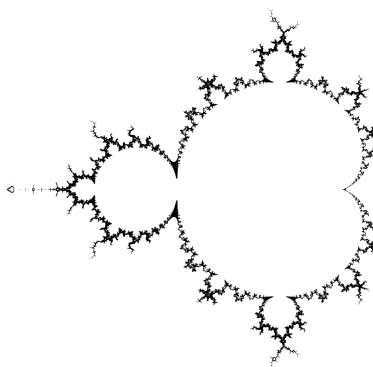
definition ändligdimensionellt reellt vektorrum försett med en inre produkt som uppfyller vissa villkor

kommentar Varje euklidiskt rum kan koordinatiseras medelst ett av rummen  $\mathbf{R}^n$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , försett med den inre produkten  $x \cdot y = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ .

## fraktal

definition geometrisk figur med rik detaljerad struktur i varje skala, ofta alltför oregelbunden för att kunna beskrivas med den klassiska geometrins metoder, och med icke nödvändigtvis heltalig dimension<sub>1</sub>

exempel Cantormängden, en delmängd av en rät linje med dimensionen  $\log 2 / \log 3 \approx 0,631$ .



En känd fraktal är Mandelbrotmängden, som definieras som mängden av alla komplexa tal  $c$  sådana att  $p^{\circ k}(0)$  inte går mot oändligheten då  $k \rightarrow +\infty$ , där  $p$  är polynomet  $p(z) = z^2 + c$ ,  $z \in \mathbf{C}$ , och  $p^{\circ k}$  är sammansättningen av  $k$  polynom  $p$ :  $p^{\circ k} = p \circ p \circ \dots \circ p$ . Det svarta i figuren är dess rand; Mandelbrotmängden består av alla punkter som omslutes av de svarta punkterna.

Helge von Kochs snöflingekurva, en kurva i planet med dimensionen  $\log 4 / \log 3 \approx 1,262$ . Den omsluter en plan mängd med ändlig area men är så skrynklig att den har oändlig längd. Däremot är dess mått i dimensionen  $\log 4 / \log 3$  ändligt. Den saknar tangent i varje punkt.

Mandelbrotmängden, en delmängd av komplexa talplanet.

Mängderna är uppkallade efter Georg Cantor (1845–1918), Helge von Koch (1870–1924) och Benoit Mandelbrot.

etymologi Ordet *fraktal* är baserat på latinets *fractus* 'sönderbruten'; jämför *fraktill*.

## gyllene snittet

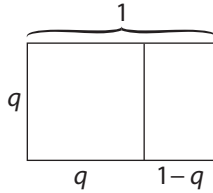
definition delning av en sträcka i två delar så att den mindre delen  $a$  förhåller sig till den större  $b$  som den större  $b$  till hela sträckan  $a + b$

kommentar Förhållandet blir  $a/b = q$ , som uppfyller  $q = 1/(1 + q)$ , varav fås

$$q = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \approx 0,618\,034 \text{ och } 1/q = 1 + q = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) \approx 1,618\,034.$$

En rektangel med sidlängder i förhållandet  $q:1$  anses vara speciellt behaglig att se på, och många rektangulära figurer har dessa proportioner. Om man skär bort en kvadrat från en sådan rektangel, så får den rektangel som är kvar samma proportioner. I figuren har rektangeln sidorna 1 och  $q$  och när man skär bort kvadraten med sidan  $q$  återstår en liten rektangel med sidorna  $q$  och  $1 - q = q^2$ .

Det finns ett samband mellan gyllene snittet och Fibonaccis talföljd  $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$ : kvoten mellan ett tal och det närmast följande går mot  $q = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ . Närmare bestämt växer  $F_{2k}/F_{2k+1}$  mot  $q$  medan  $F_{2k-1}/F_{2k}$  avtar mot samma gränsvärde.



Gyllene snittet. En rektangel med sidorna 1 och  $q = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \approx 0,618034$  delas i en kvadrat med sidan  $q$  och en rektangel med sidorna  $q$  och  $1 - q = q^2$ , alltså likformig med den första.

exempel      Många flaggor har en av proportionerna  $F_n:F_{n+1}$ , som approximerar det gyllene snittet:

$F_2/F_3 = 1/2 = 0,5$  (Förenade konungariket Storbritannien och Nordirland, Kanada, Lettland, Litauen, Sudan);

$F_3/F_4 = 2/3 \approx 0,667$  (Europeiska unionen, Frankrike, Portugal, Surinam, Tunisien);

$F_4/F_5 = 3/5 = 0,6$  (Bulgarien, Tyskland, Wales);

$F_5/F_6 = 5/8 = 0,625$  (Polen, Sverige).

Andra approximationer av det gyllene snittet än  $F_n/F_{n+1}$  förekommer också, till exempel från följderna 1, 3, 4, 7, 11, 18, ..., som har samma rekursionsformel som Fibonaccis följd:

$4/7 \approx 0,571$  (Djibouti, Iran, Mexiko);

$7/11 \approx 0,636$  (Estland);

$11/18 \approx 0,611$  (Finland, Vanuati).

jämför      *Fibonaccis talföljd* s. 110

## halvplan

definition    delmängd av ett plan som begränsas av en rät linje i samma plan

kommentar    Ett halvplan i planet kan definieras av en olikhet  $ax + by + c \leq 0$  eller  $ax + by + c < 0$ , där inte både  $a$  och  $b$  är noll. I det första fallet talar man om ett *slutet halvplan*, i det andra om ett *öppet halvplan*. Ett halvplan i rummet definieras av en ekvation och en olikhet:  $Ax + By + Cz + D = 0$  och  $ax + by + cz + d \leq 0$  eller  $ax + by + cz + d < 0$ .

## icke-euklidisk geometri

definition    geometri som delvis bygger på andra antaganden än den euklidiska, framförallt genom att parallellaxiomet ersatts med något annat axiom

kommentar    I den *hyperboliska geometrin* finns det mer än en rät linje genom en given punkt och parallell med en given rät linje; i den *elliptiska* finns det ingen sådan linje.

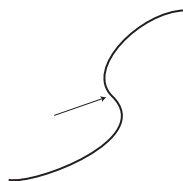
Ett sätt att åskådliggöra den tvådimensionella elliptiska (projektiva) geometrin är att använda den euklidiska i tre dimensioner. Om vi tolkar *planet* som 'det tredimensionella rummet', *linje* som 'plan

genom origo' (man väljer en viss punkt i rummet som origo) och *punkt* som 'linje genom origo', så gäller alla axiom i plan euklidisk geometri utom parallellaxiomet och axiomet att två skilda punkter entydigt definierar en sträcka (en dubbelsektor i planet i vår modell). Däremot definierar två skilda punkter entydigt en rät linje (ett plan i vår modell). Men det finns inga parallella linjer: alla linjer skär varandra i en punkt (alla plan genom origo skär varandra i en linje i modellen).

- exempel** Longituderna på jorden bildar räta vinklar mot ekvatorn men skär ändå varandra i nord- och sydpolen. Detta illustrerar den elliptiska geometrins egenskaper.
- historia** Försök att bevisa parallellpostulatet gjordes av bl. a. 'Umar Khayyām (1077), Wallis (1663) och Saccheri (1697). Carl Friedrich Gauss (1777—1855), Nikolaj Ivanovič Lobačevskij (1792—1856) och János Bolyai (1802—1860) var förmodligen de första som utvecklade en icke-euklidisk geometri. Lobačevskij var dock den förste som presenterade sin teori (1829).
- jämför** *Euklides' parallellpostulat* s. 176, *parallellaxiom* s. 184

## inflexionspunkt

- definition** punkt på en kurva sådan att kurvan kröker åt olika håll före och efter punkten



Inflexionspunkt.

- kommentar** Kurvans krökning är noll i en inflexionspunkt och kurvan kröker åt olika håll före och efter denna.
- Om kurvan är given som grafen till en funktion  $f$  som är kontinuerligt deriverbar två gånger, så är punkten  $(x_0, y_0)$  en inflexionspunkt om och endast om vi för något positivt tal  $\varepsilon$  har  $f'' > 0$  i  $]x_0 - \varepsilon, x_0[$  och  $f'' < 0$  i  $]x_0, x_0 + \varepsilon[$  eller tvärtom.
- exempel** De kurvor som ges av  $y = x^3$  och  $y = x^5$  har en inflexionspunkt i origo. Kurvan som ges av  $y = x^4$  har krökningen noll i origo, men ingen inflexionspunkt, eftersom krökningen till vänster och höger om origo går åt samma håll.
- etymologi** Första ledet i *inflexionspunkt* kommer av latinets *inflexio* 'böjning, krökning', bildat av prefixet *in-* 'in' (här troligen nekande eftersom

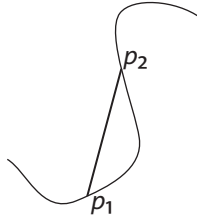
krökningen i inflexionspunkten är noll) och verbet *flektere* 'att böja, kröka'.

### inre punkt

definition (i en mängd) punkt sådan att mängden är en omgivning till punkten  
jämför *omgivning* s. 183

### korda

definition sträcka mellan två punkter på en kurva

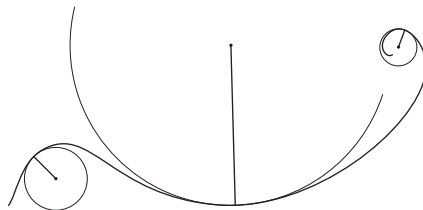


Korda.

kommentar Ofta syftar man på en korda i en cirkel.  
etymologi *Korda* kommer från det grekiska ordet *khordé* 'sträng', som användes både om en sträng på ett musikinstrument och en sträng på en pilbåge (från början en tarmsträng).  
jämför *sekant* s. 187

### krökning

definition mått på hur mycket en kurva kröker  
kommentar Krökningen för en cirkel med radien  $r$  definieras som  $1/r$ . Krökningen för en kurva i en punkt  $a$  på kurvan definieras som  $1/r$ , där  $r$  är radien i den osculerande cirkeln genom  $a$ .



Krökning hos en kurva i olika punkter definieras med hjälp av dess osculerande cirklar.

historia Metoden att bestämma en kurvas krökning med hjälp av en cirkel infördes i slutet av 1600-talet av Christiaan Huygens (1629–1695).

## lemniskata

- definition** plan kurva som består av alla punkter vilkas avstånd till två givna punkter har konstant produkt
- kommentar** Speciellt avses det specialfall då produkten av avstånden är lika med en fjärdedel av kvadraten på avståndet mellan de givna punkterna. Då är lemniskatan formad som en åtta och har en dubbelpunkt. Om produkten av de två avstånden är stor, så liknar lemniskatan en ellips; om produkten är liten, består den av två slutna kurvor som nästan är cirkelformade.
- historia** Lemniskatan fick sitt namn av Jakob Bernoulli 1694.
- etymologi** *Lemniskata* kommer av latinets particip *lemniscata* 'prydd med band' (i femininum), med ursprung i grekiskans *lēmnískos* 'band (på kransar)'

## linjal

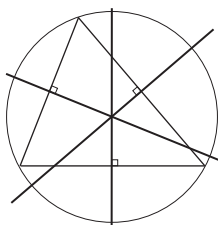
- definition** instrument för att rita räta linjer på ett plan
- kommentar** En linjal kan vara graderad, d.v.s. försedd med markeringar som möjliggör att man kan avsätta avstånd, eller ograderad.

## linjeknippe

- definition** mängd som består av alla räta linjer i planet eller rummet som går genom en punkt eller är parallella med en given rät linje

## mittpunktsnormal

- definition** normal till en sträcka som skär denna i dess mittpunkt

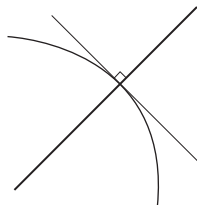


Mittpunktsnormalerna i en triangel skär varandra i en punkt, den omskrivna cirkelns medelpunkt.

- kommentar** I en triangel kan man dra mittpunktsnormalerna till var och en av de tre sidorna. De möts i en punkt, som är den omskrivna cirkelns medelpunkt.

## normal

- definition** rät linje som är vinkelrät mot en annan linje, en sträcka eller ett plan



Normalen till en kurva i en punkt är vinkelrät mot tangenten i punkten.

**kommentar** Att linjen är vinkelrät mot ett plan betyder att den är vinkelrät mot alla linjer i planet. Skärningspunkten mellan ett plan och en normal till detta kallas normalens **fotpunkt**.

Man kan också tala om normalen till en kurva eller yta. Det är en linje som är normal mot kurvans tangent respektive ytans tangentplan i en viss punkt.

## omgivning

**definition** (till en punkt på en rät linje, i ett plan eller i rymden) mängd sådan att den innehåller ett intervall med positiv längd, en cirkelskiva med positiv radie respektive ett klot med positiv radie med den givna punkten som medelpunkt

**jämför** *öppen mängd* s. 191

## omkrets

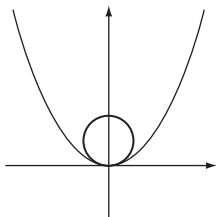
**synonym** **perimeter**

**definition** (hos en sluten kurva) kurvans längd

**etymologi** *Perimeter* kommer av grekiskans *perímetron* 'omkrets'.

## oskulerande cirkel

**definition** (till en kurva i en punkt på kurvan) den cirkel genom punkten som bäst approximerar kurvan nära punkten



Den oskulerande cirkeln till en parabel i dess vertex.

**kommentar** Man kan jämföra med tangenten till en kurva, som är den räta linje som bäst approximerar kurvan nära den givna punkten.

**exempel** Tangenten i origo till parabeln  $y = cx^2$ ,  $c \neq 0$ , är lika med  $x$ -axeln. Därför bör den osculerande cirkeln ha ekvationen  $x^2 + (y - r)^2 = r^2$ , med medelpunkt på  $y$ -axeln och samma tangent i origo (alla dessa cirkelrangerar parabeln i origo). Men vilket  $r$  ger bäst kontakt mellan de två kurvorna? Cirkelns ekvation kan skrivas

$$y = \frac{x^2 + y^2}{2r} \approx \frac{x^2}{2r},$$

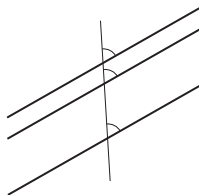
där vi kastar bort den lilla termen  $y^2$  nära origo. Därför är det klart att  $r = 1/(2c)$  ger den bästa approximationen: den osculerande cirkeln till parabeln  $y = cx^2$  i origo har ekvationen  $y = cx^2 + cy^2$ .

Samma överläggningar kan göras för kurvor i rummet.

**etymologi** *Oskulerande* kommer från latinets *osculari* 'kyssa'. Grundordet är *os* 'mun'.

## parallella räta linjer

**definition** (om två räta linjer) räta linjer som antingen sammanfaller eller ligger i ett plan och inte skär varandra;  
(om fler än två räta linjer) räta linjer som är parvis parallella



Parallella räta linjer.

**kommentar** Om två räta linjer ligger i samma plan gäller ett av följande fall.  
(1) Det finns exakt en punkt som ligger på båda linjerna; linjerna sägs *skära* varandra i punkten, som kallas **skärningspunkt**.  
(2) Linjerna har alla punkter gemensamma och sägs vara **sammanfallande**.  
(3) Det finns inte någon punkt som ligger på båda linjerna; linjerna sägs vara *parallella*.

Även sammanfallande linjer sägs vara parallella.

**etymologi** Ordet *parallell* kommer från det grekiska *parállēlos* med samma betydelse, bildat av *pará* 'bredvid' och *állēloi* 'varandra'.

## parallellaxiom

**definition** ett av flera axiom som används inom geometrin och som yttrar sig om existens eller icke-existens av parallella linjer



**kommentar** Det första parallellaxiomet var Euklides' parallellpostulat. Senare formulerades varianter av och kompletteringar till detta, och den nu vanligaste formen är:

*Genom en punkt som inte ligger på en given rät linje finns en och endast en rät linje parallell med den givna.*

Euklides' ursprungliga parallellpostulat garanterar att det finns högst en parallell rät linje; dess omvändning, som är ekvivalent med hans sats 27 i första volymen av hans *Stoikheía* (i latinsk översättning *Elementa*) 'Grundbegreppen', garanterar att det finns minst en parallell rät linje till den givna linjen och genom den givna punkten. I det citerade axiomet har dessa två påståenden kombinerats.

**historia** Ända fram till 1800-talet försökte man bevisa Euklides' parallellpostulat eller varianter av detta ur de övriga axiomen. Detta visade sig inte vara möjligt. Arbetet ledde emellertid fram till den icke-euklidiska geometrin.

**jämför** *Euklides' parallellpostulat* s. 176, *icke-euklidisk geometri* s. 179

## passare

**definition** instrument för att rita cirklar i ett plan

**kommentar** En passare kan klappa ihop när man lyfter en spets från underlaget eller vara fast, så att den tillåter att man tar ut ett avstånd och flyttar det.

## plan

**definition** tvådimensionell mängd som innehåller den räta linjen genom två godtyckliga av sina punkter

## plan geometri

**definition** studiet av geometriska figurer i planet

**kommentar** Den del av den plana geometrin som handlar om längder och areor kallas *planimetri*.

## plant område

**definition** område som ligger i ett plan

## punkt

**definition** (inom geometrin) objekt med läge men utan utsträckning

**kommentar** En punkt kan ligga på en linje, i ett plan eller i rymden. I det första fallet bestäms dess läge av en koordinat  $x \in \mathbf{R}$ , i det andra av två koordinater  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ , och i det tredje fallet av tre koordinater  $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ . Man säger då ibland – fast strängt taget oegentligt – att punkten "är"  $x$ ,  $(x, y)$  respektive  $(x, y, z)$ . Men det är alltså punktens koordinat eller koordinater man då talar om.

**historia** Euklides' *Stoikheía* (i latinsk översättning *Elementa*) 'Grundbegreppen' inleds med definition 1: *En punkt är det som saknar delar.*

etymologi *Punkt* kommer från latinets *punctum* 'punkt', av verbet *pungere* 'att sticka'. Ordet *punctus* förekommer i den första tryckta utgåvan av Euklides' verk. Det betyder 'stucken' eller 'stickande, prickande'.

### rand, plural *ränder*

definition mängd bestående av alla randpunkter till en given mängd

kommentar Om mängden är tillräckligt reguljär, så kallar man ibland randen för *periferi*.

### randpunkt

definition ⟨till en given mängd⟩ punkt sådan att varje omgivning innehåller såväl en punkt som tillhör mängden som en som inte gör det

### riktningskoefficient

definition tal som anger hur en rät linje i planet lutar

kommentar Om linjens ekvation är  $y = kx + m$ , så är talet  $k$  riktningskoefficienten.

Om linjens ekvation är  $ax + by + c = 0$ , så är riktningskoefficienten lika med  $-a/b$ .

Om ekvationen är på interceptform,  $x/p + y/q = 1$ , så är riktningskoefficienten lika med  $-q/p$ .

Figur: se *räta linjens ekvation* på sidan 99.

### riktningsvinkeln för en stråle

definition vinkeln mellan strålen och en viss fixerad stråle i planet

### rymdgeometri

definition studiet av geometriska figurer i den tredimensionella rymden

kommentar Den del av rymdgeometrin som handlar om längder, areor och volymer kallas *stereometri*.

etymologi Ordet *stereometri* kommer av det grekiska substantiverade adjektivet *stereón* 'fast kropp' av adjektivet *stereós* 'hård, fast, massiv, solid' (i plural hos Platon: *stereá* 'fasta kroppar') och verbet *metreín* 'att mäta'

### rymdområde

definition område som ligger i rummet

### rät linje

definition kurva som är rak och obegränsad åt båda hållen

kommentar Om det av sammanhanget är klart att man avser en rät linje, kan man förstås kalla den *linje*.

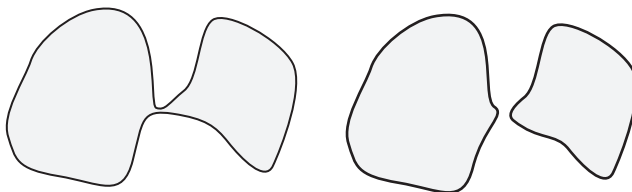
historia Euklides definierade i den fjärde definitionen i den första volymen av sitt verk *Stoikheía* (i latinsk översättning *Elementa*) 'Grundbegreppen' en sträcka eller en rät linje (*eutheía*) som en kurva som

ligger jämnt mellan sina punkter. (Termen *eutheía* betydde troligen 'sträcka'; numera skulle vi kanske säga en familj av sträckor som innehåller en given sträcka.)

jämför *räta linjens ekvation* s. 98, *sträcka* s. 188

## sammanhängande mängd

definition mängd  $A$  sådan att om  $U$  och  $V$  är öppna och  $U \cup V \supset A$ ,  $U \cap V \subset \mathbb{C}A$  så gäller  $U \supset A$  eller  $V \supset A$



Till vänster en sammanhängande mängd, till höger en som inte är sammanhängande.

kommentar En mängd kallas *bågvis sammanhängande* om två punkter i mängden alltid kan förbindas medelst en kurva som går inne i mängden. En sådan mängd är sammanhängande, men omvändningen gäller inte.

exempel Unionen av en öppen och en sluten cirkelskiva är sammanhängande om och endast om avståndet mellan deras medelpunkter är högst lika med summan av deras radier.

Unionen av två öppna cirkelskivor är sammanhängande om och endast om avståndet mellan deras medelpunkter är mindre än summan av deras radier.

Mängden

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x \neq 0, y = \sin(1/x)\} \cup \{(0, y); |y| \leq 1\}.$$

är sammanhängande men inte bågvis sammanhängande.

## sekant

definition rät linje genom två olika punkter på en kurva

etymologi *Sekant* kommer från latinets *linea secans* 'skärande linje'.

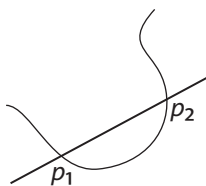
jämför *korda* s. 181. Se figur på sidan 188.

## sluten mängd

definition mängd på en linje, i ett plan eller rummet sådan att alla randpunkter tillhör mängden

kommentar En mängd är sluten om och endast om dess komplement är öppet.

Gränsvärdet till en konvergent följd av punkter som ligger i en sluten mängd måste också ligga i mängden.



Sekant.

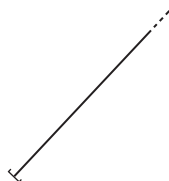
exempel Ett slutet intervall. En sluten cirkelskiva. Komplementet till ett öppet klot.

etymologi Man kan inte komma ut ur mängden med en konvergerande punktföljd; därav namnet *sluten*.

jämför *öppen mängd* s. 191

### stråle

definition kurva som är rak och begränsad åt ett håll



Stråle.

jämför *rät linje* s. 186, *sträcka* s. 188

### sträcka

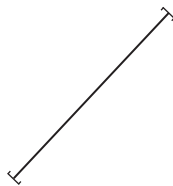
definition kurva som är rak och begränsad åt båda hållen

kommentar I allmänspråket används ordet *sträcka* även om sträckans längd.

Om  $a$  och  $b$  är två punkter på linjen, i planet eller rymden, så är sträckan mellan  $a$  och  $b$  mängden  $[a, b] = \{(1-t)a + tb; 0 \leq t \leq 1\}$ . Punkterna  $a$  och  $b$  är sträckans ändpunkter. Vi har alltid  $[a, b] = [b, a]$ : sträckan har ingen riktning.

historia Euklides definierade i den fjärde definitionen i den första volymen av sitt verk *Stoikheía* (i latinsk översättning *Elementa*) 'Grundbegreppen' en sträcka eller en rät linje (*eutheía*) som en kurva som ligger jämnt mellan sina punkter.

jämför *riktad sträcka* s. 257, *rät linje* s. 186, *stråle* s. 188



Sträcka.

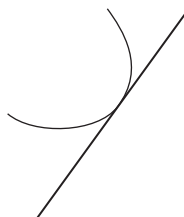
### sträckas förlängning

definition den rätta linje som innehåller sträckan

kommentar Det förutsättes här att sträckan har positiv längd.

### tangent

definition (till en kurva och i en given punkt på kurvan) rät linje som går genom punkten och vars riktning är gränsvärdet av sekanternas riktning när man tar sekanter genom punkten och en annan godtycklig punkt som närmar sig den givna



Tangent.

kommentar Den givna punkten kallas *tangeringspunkt*. Man säger att den rätta linjen *tangerar* kurvan.

En klassisk grekisk definition är att tangenten är en rät linje som vidrör kurvan utan att skära den. Denna förutsätter dock en definition av termen *skära* som inte är enkel.

Om en plan kurva är given av  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  så har tangenten i punkten  $(a, f(a))$  ekvationen

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

förutsatt att derivatan existerar. Funktionen derivata  $f'(a)$  är tangentens riktningskoefficient. (Även om derivatan inte existerar, så kan kurvan ha en tangent, nämligen en vertikal tangent.)

Motsvarande gäller för en kurva i rummet som ges av en funktion  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ .

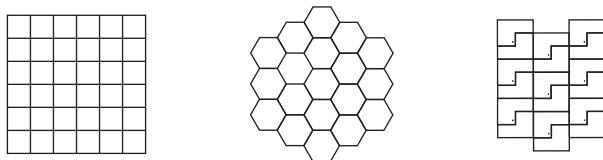
- historia** Euklides visade hur en tangent till en cirkel kan konstrueras. Apollónios och Arkimedes (slutet av 200-talet f. Kr.) gjorde motsvarande tangentkonstruktioner för parabeln, hyperbeln och ellipsen respektive spiralen. Under 1600-talet framställdes många nya kurvor. Descartes och Fermat bestämde tangenter för flera av dessa. Deras metoder förebådade Leibniz' och Newtons differential- respektive fluxionskalkyl.
- etymologi** Orden *tangent* och *tangera* kommer av latinets *tangere* 'att vidröra, att beröra'; *tangent* 'som vidrör'.

## tangerande kurvor

- definition** två kurvor med en gemensam punkt där de har samma tangent

## tessellera

- definition** dela in planet eller rummet i bitar som täcker hela planet eller rymden och överlappar blott med sina ränder och som alla är kongruenta med några få figurer



Tre tessellationer av planet.

- kommentar** När planet är tesselerat säger man att man har en *tessellation*. Maurits C. Escher (1898—1972) har i sin konst framställt många tessellationer av planet.
- etymologi** Verbet *tessellera* är bildat efter det latinska substantivet *tessella* 'liten fyrkantig sten avsedd för mosaiker'.

## topologi<sub>1</sub>

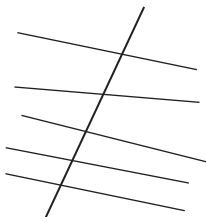
- definition** gren av matematiken där man studerar kontinuitet, konvergens, dimensionsbegreppet och dessas algebraiska egenskaper
- etymologi** *Topologi* kommer från grekiskans *tópos* 'rum, plats, ställe' och *lógos* 'lära'.

## topologi<sub>2</sub>

- definition** struktur som definierar ett topologiskt rum till exempel genom att dess öppna mängder anges

## transversal

definition rät linje som skär två eller flera linjer



Transversal.

kommentar Transversalen till två linjer bildar i vardera skärningspunkten fyra vinklar. Ett par av dessa åtta vinklar som har motsvarande läge vid de båda skärningspunkterna kallas *likabelägna vinklar*. Ett par av vinklarna vid olika skärningspunkter som är belägna på ömse sidor om transversalen och i området mellan linjerna som transversalen skär kallas *inre alternativvinklar*.

etymologi *Transversal* kommer från latinets *transversus* 'tvärvänd, gående på tvären'.

## vertex, plural *vertex*

definition punkt på en kurva där krökningen har ett lokalt maximum eller ett lokalt minimum

kommentar Det förutsätts att kurvan är tillräckligt glatt för att krökningen skall kunna definieras.

exempel En parabel har ett vertex; en ellips fyra. Varje sluten plan kurva har minst fyra vertex.

etymologi Ordet *vertex* är latin med betydelsen 'topp-punkt, vändpunkt'. En kastparabels topp-punkt är också den punkt där dess krökning är störst, vilket förklarar den nu aktuella betydelsen.

## öppen mängd

definition mängd i planet eller rummet som är en omgivning till var och en av sina punkter

kommentar Komplementet till en öppen mängd är slutet.

En icke-tom sammanhängande öppen mängd kallas ibland för *område*.

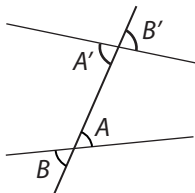
exempel Komplementet till en punkt. Ett öppet intervall. En öppen cirkelskiva. En union av flera öppna klot.

etymologi I en öppen mängd kan man röra sig fritt i närheten av varje punkt, därav benämningen *öppen*.

## 9.2. Vinklar

### alternatvinklar

**definition**    ⟨när en transversal skär två räta linjer⟩ två vinklar med spetsarna i varsin skärningspunkt, belägna på motsatta sidor om transversalen och båda i området mellan linjerna eller båda utanför detta område



Alternatvinklar:  $A$  och  $A'$  är inre alternatvinklar;  $B$  och  $B'$  yttre alternatvinklar.

**kommentar**    I euklidisk geometri är alternatvinklarna lika om och endast om de två givna räta linjerna är parallella. Man säger att de är **inre alternatvinklar** när de ligger mellan linjerna, annars **yttre alternatvinklar**.

Enligt en äldre definition avsågs med termen *alternatvinklar* endast de inre. Definitionen är här vidgad.

**historia**        Med alternatvinklar avsåg Euklides de inre. De omnämnes i Euklides' sats 27 och 29 i hans första volym. Den första säger att om alternatvinklarna är lika, så är linjerna parallella. Den andra ger, med stöd av parallellpostulatet, omvändningen: om linjerna är parallella, så är alternatvinklarna lika.

Mårten Strömer (1707–1770) skriver 1744 ett förtydligande just innan sats 27: ”Om en rät linea  $EF$ , råkar tvänne andra räta lineer  $AB$ ,  $CD$ , så kallas de tvänne vinklarna, som stå emot hvarandra innan til på hvar sin sida om henne, alternat vinklar.”

**etymologi**     Orddelen *alternat* kommer av latinets *alternatus*, perfekt particip av *alternare* 'att växla om, att ömsevis utföra något'; grundordet är *alter* 'den andre av två'.

**jämför**         *likabelägna vinklar* s. 193

### argument<sub>2</sub>

**definition**    ⟨för ett komplext tal  $z$ ⟩ tal  $t$  sådant att  $z = |z|e^{it} = |z|(\cos t + i \sin t)$

**kommentar**    Om  $t$  är ett argument för  $z$ , så är även  $t + 2\pi k$  det för varje heltal  $k$ . För att få argumentet entydigt bestämt då  $z \neq 0$  kan man föreskriva att  $0 \leq t < 2\pi$ .

Produkten av två komplexa tal har ett argument som är lika med summan av talens argument. Om man avser argumentet i intervallet  $[0, 2\pi[$ , så får man ibland subtrahera  $2\pi$ , d.v.s. räkna modulo  $2\pi$ . Med vanliga beteckningar skriver man  $\arg(zw) \equiv \arg z + \arg w \pmod{2\pi}$ .



## gradskiva

definition platt skiva avsedd att mäta vinklar med

## hornvinkel

synonym **kontaktvinkel**

definition område mellan två kurvor som möts i punkt där de har en gemensam tangent

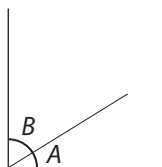
kommentar En hornvinkel är alltså inte en vinkel enligt definitionen av begreppet vinkel

exempel Tangenten till en kurva bildar en hornvinkel med kurvan.

historia Euklides nämner i sats 16, bok III i *Stoikheía* (i latinsk översättning *Elementa*) 'Grundbegreppen' att hornvinkeln mellan tangenten till en cirkel och cirkeln är mindre än varje rätlinjig vinkel. Under främst femton- och sextonhundredatalen vållade detta påstående en häftig debatt om huruvida hornvinkeln skulle betraktas som en vinkel eller inte. Den vedertagna lösningen blev att hornvinkeln kan betraktas som en synlig infinitesimal, vars storlek beror på kurvans krökning.

## komplementvinkel

definition (till en given vinkel) vinkel som tillsammans med den givna har summan  $90^\circ$



Vinklarna  $A$  och  $B$  är komplementvinklar till varandra.

jämför *supplementvinkel* s. 196

## likabelägna vinklar

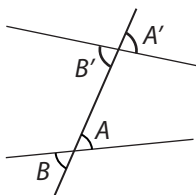
definition (när en transversal skär två räta linjer) två vinklar med spetsarna i varsin skärningspunkt, en i området mellan de räta linjerna och den andra utanför de räta linjerna, och på samma sida om transversalen

kommentar I euklidisk geometri är likabelägna vinklar lika om och endast om de två givna räta linjerna är parallella. Se figur på sidan 194.

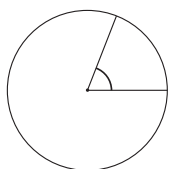
jämför *alternatvinklar* s. 192

## medelpunktsvinkel

definition (i en cirkel) vinkel mellan två radier och med spetsen i cirkelns medelpunkt



Likabelägna vinklar:  $A$  och  $A'$  är likabelägna, liksom  $B$  och  $B'$ .



Medelpunktsvinkel.

## rak vinkel

definition vinkel som är  $180^\circ$



En rak vinkel.

jämför *rät vinkel* s. 195

## randvinkel

synonym **bågvinkel, periferivinkel**

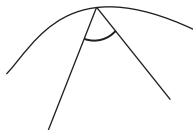
definition vinkel med spetsen på en given kurva

kommentar Kurvan är ofta randen till ett område; därav namnet. Se figur på sidan 195.

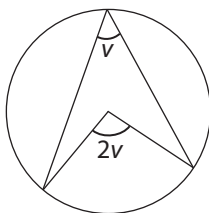
## randvinkelsatsen

synonym **bågvinkelsatsen, periferivinkelsatsen**

definition den sats som säger att alla randvinklar i en cirkel på en given båge är lika och hälften så stora som medelpunktsvinkeln på denna båge



Randvinkel.



Randvinkelsatsen.

kommentar Detta gäller även om randvinkelns spets ligger på cirkelbågen – med lämplig tolkning.

## rät vinkel

definition vinkel som är  $90^\circ$

kommentar Till begreppet hör fyra adjektiv, *vinkelrät*, *normal*, *rätvinklig*, och *ortogonal*. Man säger att en rät linje är ***vinkelrät mot***, ***normal mot*** eller ***ortogonal mot*** en annan rät linje eller ett plan. Man säger att en triangel där en av vinklarna är rät är *rätvinklig*. Adjektivet används också för ett koordinatsystem om axlarna bildar rätta vinklar mot varandra. En rätvinklig parallelepiped kallas *rätblock*.

etymologi *Ortogonal* är sammansatt av grekiskans *orthós* 'rät, rätt' och *gōnía* 'vinkel, hörn'.

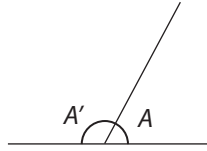
jämför *rak vinkel* s. 194

## sidovinkel

definition (till en given vinkel) vinkel som har ett vinkelben gemensamt med den givna och vars andra vinkelben är förlängningen av den givna vinkels andra ben

kommentar Det följer av definitionen att sidovinklar är supplementvinklar.

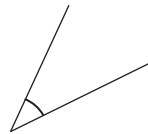
jämför *vertikalvinklar* s. 197



Vinkeln  $A'$  är sidovinkel till  $A$ .

### spetsig vinkel

definition vinkel som är större än  $0^\circ$  men mindre än  $90^\circ$

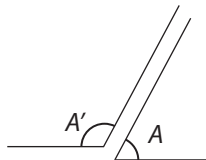


Spetsig vinkel.

jämför *trubbig vinkel* s. 197

### supplementvinkel

definition ⟨till en given vinkel⟩ vinkel som tillsammans med den givna har summan  $180^\circ$



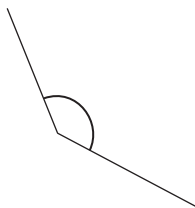
Vinklarna  $A$  och  $A'$  är supplementvinklar till varandra.

etymologi *Supplement* kommer från latinets *supplementum* 'utfyllnad', av *plenus* 'full'.

jämför *komplementvinkel* s. 193, *sidovinkel* s. 195

## trubbig vinkel

definition vinkel som är större än  $90^\circ$  men mindre än  $180^\circ$

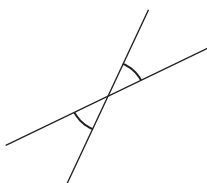


Trubbig vinkel.

jämför *spetsig vinkel* s. 196

## vertikalvinklar

definition vinklar som har samma spets och vilkas vinkelben är förlängningar av varandra



Vertikalvinklar.

kommentar Vertikalvinklar är lika stora.

jämför *sidovinkel* s. 195

## vinkel

definition område mellan två strålar eller sträckor som möts i en gemensam ändpunkt

kommentar Strålarna eller sträckorna kallas *vinkelben* och den gemensamma ändpunkten kallas *vinkelspets*. Termen används också om vinkelns storlek, som är den rotation som fordras för att överföra det ena vinkelbenet på det andra och kan mätas i grader eller radianer (vinkelbenens längd har ingen betydelse).

historia Euklides' definition av vinkel förutsätter inte att vinkelbenen är räta linjer. Hans definition 8 lyder: *En plan vinkel är böjningen mot varandra hos två linjer [alltså kurvor] i ett plan, som möter varandra och inte ligger i en rät linje.*

Om vinkelbenen är räta linjer så sägs vinkeln vara *rätlinjig* (definition 9).

etymologi Ordet *vinkel* kommer från det tyska ordet *winkel*, vars ursprungliga betydelse var 'hörn, böjning'.

### vinkeln mellan två räta linjer i planet

definition noll om linjerna är parallella, annars storleken hos den vinkel som de bildar

## 9.3. Trianglar

### areasatsen

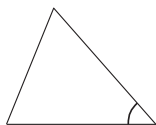
definition den sats som säger att arean av en triangel är halva produkten av två sidors längder multiplicerad med sinus för mellanliggande vinkel

### bas<sub>1</sub>

definition ⟨i en triangel, rektangel eller annan månghörning⟩ sida som valts ut vid areaberäkning

### basvinkel

definition ⟨i en triangel⟩ endera av de två vinklar vilkas ena vinkelben utgörs av basen



Basvinkel.

### bisektris

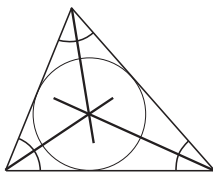
definition stråle som utgår från en vinkels spets och delar vinkeln i två lika delar

kommentar I en triangel finns bisektriser till var och en av de tre vinklarna. De skär varandra i en punkt, som är medelpunkten för den inskrivna cirkeln. Se figur på sidan 199.

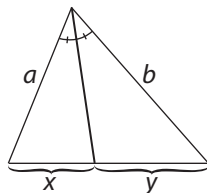
etymologi *Bisektris* kommer av de latinska orden *bi-* 'två-, itu' och *secare* 'att skära'.

### bisektrissatsen

definition den sats som säger att en bisektris i en triangel delar den motstående sidan i det förhållande som ges av de närliggande sidornas längder



De tre bisektriserna i en triangel skär varandra i en punkt.



Bisektrissatsen:  $x/y = a/b$ .

## cosinussatsen

definition den sats om en triangel som säger att  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ , där  $a$ ,  $b$ ,  $c$  är sidornas längder och  $C$  är den vinkel som står mot sidan  $c$

jämför *sinussatsen* s. 203, *tangenssatsen* s. 204

## egyptisk triangel

definition triangel där förhållandet mellan sidorna är 3:4:5

kommentar En triangel med dessa egenskaper är rätvinklig.

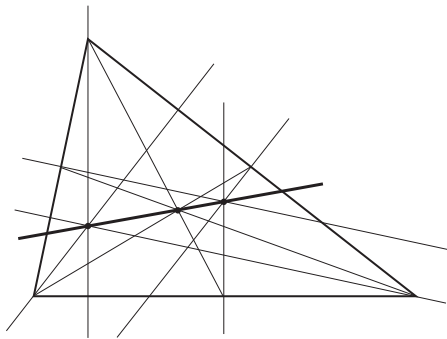
etymologi Triangeln har kallats *egyptisk* därför att man länge trodde att den användes i det gamla Egypten när en rät vinkel skulle bestämmas.

## Eulers linje

definition (i en triangel som inte är liksidig) den räta linje som innehåller mittpunktsnormalernas skärningspunkt, medianernas skärningspunkt och höjdernas skärningspunkt

kommentar Anledningen till att liksidiga trianglar undantagits är att de tre punkterna sammanfaller i sådana trianglar. Det finns därmed oändligt många räta linjer genom de tre sammanfallande punkterna. Se figur på sidan 200.

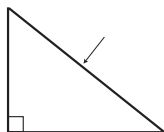
etymologi Eulers linje är uppkallad efter Leonard Euler (1707–1783).



Eulers linje.

## hypotenusa

definition den sida i en rätvinklig triangel som står mitt emot den räta vinkeln



Hypotenusa.

kommentar Hypotenusan är den längsta sidan i en rätvinklig triangel. Ordet *hypotenusa* används även för att beteckna denna sidas längd.

etymologi *Hypotenusa* kommer från grekiskans presensparticip *hypoteínousa* 'som sträcker sig under'.

jämför *katet* s. 201

## höjd i en triangel

definition sträcka som går från ett hörn i triangeln till motstående sida eller dess förlängning och är vinkelrät mot denna

kommentar Det finns alltså tre höjder i en triangel. De möts i en punkt.  
Ordet används även för att beteckna denna sträckas längd.  
Se figur på sidan 201.

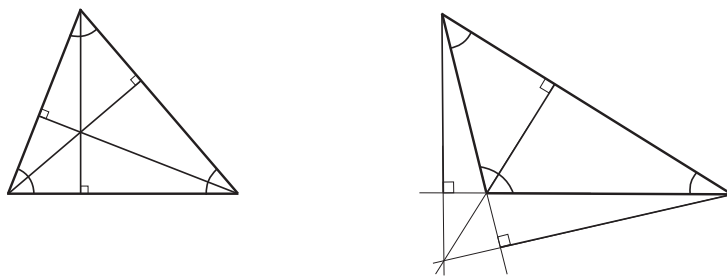
jämför *bas*<sub>1</sub> s. 198

## hörn<sub>1</sub>

definition (i en triangel) en av de tre vinkelspetsarna

kommentar Ett hörn sägs vara *motstående hörn* till sidan mellan de båda övriga hörnen. Vinkeln vid detta hörn kallas *motstående vinkel* till sidan.

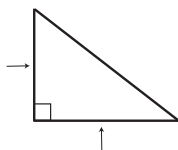




De tre höjderna i en spetsvinklig och en trubbvinklig triangel.

**katet** [ka'tet], bestämd form *kateten*, plural *kateter*

definition endera av de två sidor i en rätvinklig triangel som har den räta vinkeln mellan sig



Kateter.

kommentar Kateterna är kortare än hypotenusan.

etymologi *Katet* kommer av grekiskans *káthetos* 'lodlinje'.

jämför *hypotenusan* s. 200

**likbent triangel**

definition triangel där minst två av sidorna är lika långa



Två likbenta trianglar och en liksidig triangel.

**kommentar** Varje liksidig triangel är likbent, men inte omvänt. Se figur på sidan 201.

**jämför** *liksidig triangel* s. 202

## liksidig triangel

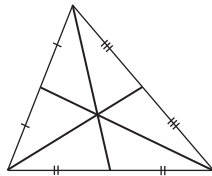
**definition** likbent triangel där alla tre sidorna är lika långa

**kommentar** I en liksidig triangel är alla vinklar  $60^\circ$ . Se figur på sidan 201.

**jämför** *likbent triangel* s. 201

## median<sub>1</sub>

**definition** ⟨i en triangel⟩ sträcka mellan ett hörn i triangeln och motstående sidas mittpunkt



Medianerna i en triangel skär varandra i en punkt.

**kommentar** En triangel har alltså tre medianer. De skär varandra i en punkt, triangelns tyngdpunkt. Denna punkt är såväl de tre triangelhörnens tyngdpunkt som hela triangelområdet tyngdpunkt om området ges en konstant densitet (massa per areaenhet).

## motstående hörn i en triangel

**definition** ⟨till en sida⟩ det hörn som inte tillhör sidan

## motstående sida i en triangel

**definition** ⟨till ett hörn⟩ den sida som förenar de två andra hörnen

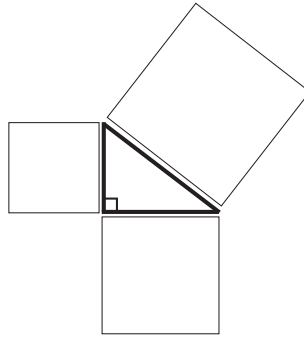
## motstående vinkel i en triangel

**definition** ⟨till en sida⟩ den vinkel i triangeln som har sin spets i det motstående hörnet till sidan

## Pythagoras' sats [py'ta'gɔ:ras] (latinbaserat uttal [pɥ'ta:gɔ:ras])

**definition** den sats som säger att i en rätvinklig triangel är kvadraten på hypotenusan lika med summan av kvadraterna på kateterna

**kommentar** Om kateterna är  $a$  och  $b$  så blir hypotenusan således den positiva kvadratroten ur  $a^2 + b^2$ .



Pythagoras' sats: arean av den största kvadraten är lika med summan av areorna av de två mindre.

**historia** Satsen är uppkallad efter Pythagoras (omkring 570 — omkring 490 f. Kr.) och förknippades med hans namn av Proklos på 400-talet e. Kr. Satsen var känd i babylonisk matematik långt före Pythagoras. I indisk matematik formulerades satsen omkring år 800 f. Kr.

### pythagoreisk summa

**definition** (av två reella tal  $a$  och  $b$ ) den positiva roten ur  $a^2 + b^2$

**jämför** *Pythagoras' sats* s. 202

### rätvinklig triangel

**definition** triangel där en av vinklarna är rät, d.v.s.  $90^\circ$

**kommentar** Den längsta sidan, som står mitt emot den räta vinkeln, kallas *hypotenusa*. De två kortare sidorna kallas för *kateter*.

### sida<sub>1</sub>

**definition** (i en triangel) en av de tre sträckorna mellan hörnen

**kommentar** En sida sägs vara *motstående sida* till hörnet mellan de två övriga sidorna.

### sinussatsen

**definition** den sats som säger att i en triangel är kvoten mellan en sidas längd och sinus för den motstående vinkeln lika i alla tre fallen

**kommentar** Kvoten är lika med den omskrivna cirkelns diameter. Om vinklarna är  $A$ ,  $B$  och  $C$  och sidorna  $a$ ,  $b$  och  $c$ , så är  $a/\sin A = b/\sin B = c/\sin C = 2R$ , där  $R$  är den omskrivna cirkelns radie.

**jämför** *cosinussatsen* s. 199, *tangenssatsen* s. 204

### spetsvinklig triangel

**definition** triangel där alla vinklar är spetsiga, d.v.s. mindre än  $90^\circ$

**jämför** *trubbvinklig triangel* s. 205

## tangenssatsen

definition den sats som säger att

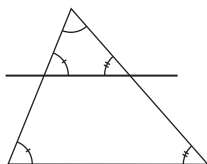
$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan \frac{1}{2}(A-B)}{\tan \frac{1}{2}(A+B)}$$

om  $A$  och  $B$  är två vinklar i en triangel och  $a$  och  $b$  motstående sidor

jämför *cosinussatsen* s. 199, *sinussatsen* s. 203

## topptriangelsatsen

definition den sats som säger att en rät linje som är parallell med en sida i en triangel avskär en topptriangel som är likformig med den ursprungliga triangeln



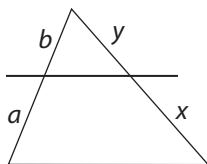
Topptriangelsatsen.

kommentar En sådan rät linje kallas *parallelltransversal*.

jämför *transversalsatsen* s. 204

## transversalsatsen

definition den sats som säger att en parallelltransversal delar två sidor i en triangel i samma förhållande



Transversalsatsen:  $b/a = y/x$ .

historia Transversalsatsen finns formulerad i Euklides' *Stoikheía* (i latinsk översättning *Elementa*) 'Grundbegreppen' som en del av sats 2, bok VI: "Om en rät linje dras parallellt med en sida i en triangel så är de sträckor i vilka linjen delar de två andra sidorna proportionella."

jämför *topptriangelsatsen* s. 204

## triangel

synonym **trehörning**

definition månghörning med tre hörn

kommentar Vinkelsumman i en triangel är alltid  $180^\circ$ .

etymologi *Triangel* kommer från latinets *triangulum* 'trehörning'.

## triangelområde

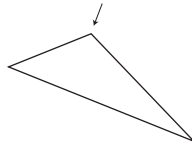
definition område som omsluts av en triangel

kommentar Ett triangelområdes area är halva basen gånger höjden, d.v.s.  $\frac{1}{2}bh$ , eller, eftersom höjden mot sidan med längden  $b$  är lika med  $a \sin C$ , även lika med  $\frac{1}{2}ab \sin C$ .

För att undvika missförstånd kan det vara bra att inte använda termen *triangel* när ett triangelområde avses, men ofta förstår man ändå vad som avses. Se vidare kapitel 14, *Språkens rikedomar och terminologins problem*, sidan 287.

## trubbvinklig triangel

definition triangel där en av vinklarna är trubbig, d.v.s. större än  $90^\circ$



Trubbvinklig triangel.

jämför *spetsvinklig triangel* s. 203

## vinkel i en triangel

definition vinkel mindre än  $180^\circ$  som bildas av två sidor i triangeln

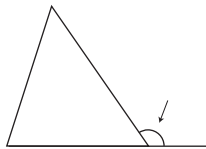
## yttervinkel<sub>1</sub>

definition (för triangel) sidovinkel till en av triangelns vinklar

kommentar Se figur på sidan 206.

## yttervinkelsatsen

definition den sats i euklidisk geometri som säger att en yttervinkel till en triangel är lika med summan av båda motstående inre vinklarna

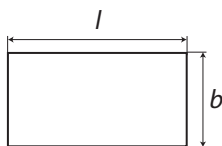


Yttervinkel till en triangel.

## 9.4. Andra månghörningar

### bredd i en rektangel

definition avståndet mellan de två längre sidorna i en rektangel



Bredden  $b$  och längden  $l$  i en rektangel.

kommentar Avståndet mellan de två kortare sidorna kallas då vanligen *längd*. I stället för längd och bredd säger man ofta *bas* och *höjd*.

### diagonal

definition sträcka som förbinder två ej närliggande hörn

kommentar Antalet diagonaler i en  $m$ -hörning är  $m(m-3)/2$ ,  $m \geq 3$ .

etymologi *Diagonal* kommer av grekiskans *diá* 'genom' och *gōnía* 'hörn, vinkel'.

### enhetskvadrat

definition kvadrat vars sida har längden 1 längdenhet

### femhörning

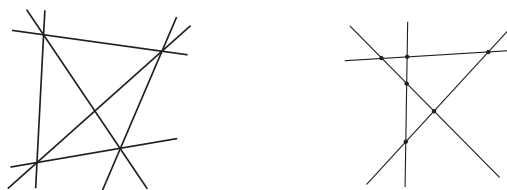
synonym **pentagon**

definition månghörning med fem hörn

etymologi *Pentagon* kommer av grekiska *penta-* 'fem-' och *gōnía* 'hörn, vinkel'.

## fullständig fyrhörning

definition plan geometrisk figur som består av fyra punkter varav tre aldrig ligger på en rät linje och de sex rätta linjer som kan dras mellan dessa



En fullständig fyrhörning (till vänster) och en fullständig firsiding.

kommentar En fullständig fyrhörning är alltså inte en fyrhörning.

jämför *fullständig firsiding* s. 207

## fullständig firsiding

definition plan geometrisk figur som består av fyra rätta linjer som parvis skär varandra men varav tre aldrig skär varandra och deras sex skärningspunkter

kommentar En sådan figur har tre diagonalerna.

jämför *fullständig fyrhörning* s. 207

## fyrhörning

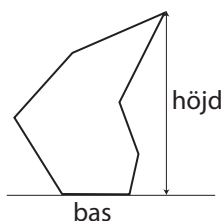
synonym **firsiding**

definition månghörning med fyra hörn

exempel Kvadrat, parallelogram, parallelltrapets, rektangel och romb.

## höjd i en månghörning

definition sträcka som är vinkelrät mot en utvald sida och har sin ena ändpunkt på denna sida eller dess förlängning och den andra i en punkt på månghörningen som har maximalt avstånd till denna linje



Höjd i en månghörning.

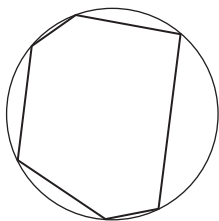
**kommentar** Den utvalda sidan kallas  $bas_1$ . Om månghörningen är en parallelogram (speciellt om den är en rektangel eller en kvadrat) så är arean för det område den omsluter lika med basens längd gånger höjden. Om den är en triangel, så har det område som den omsluter arean lika med halva basens längd gånger höjden.

## hörn<sub>2</sub>

**definition** punkt där två sidor möts i en månghörning

## inskriven månghörning

**definition** (i en cirkel) månghörning med alla sina hörn på cirkeln



En inskriven månghörning.

## kvadrat<sub>1</sub>

**definition** rektangel med två närliggande sidor av samma längd

**kommentar** Det följer av definitionen att alla sidorna är lika långa.

En kvadrat kan även definieras som en romb som har en rät vinkel.

**etymologi** *Kvadrat* kommer från latinets *quadratum* 'fyrhörning', av verbet *quadrare* 'göra fyrkantig'.

## kvadrat område

**definition** område som en kvadrat omsluter

## längd i en rektangel

**definition** avståndet mellan de två kortare sidorna

**kommentar** Avståndet mellan de två längre sidorna kallas då *bredd*.

**jämför** *bredd i en rektangel* s. 206 (figur finns där)

## månghörning

**definition** sluten polygon som inte skär sig själv och som ligger i ett plan

**kommentar** Månghörningar ges namn efter antalet hörn, t.ex. *trehörning*, *fyrehörning*. Det vanligaste namnet för en trehörning är *triangel*. När alla sidor och alla vinklar i en månghörning är lika stora säger man att den är *regelbunden*. En regelbunden triangel kallas *liksidig*, och en regelbunden fyrehörning *kvadrat*. En regelbunden sexhörning kan



ritas upp med passare och linjal genom att skriva in den i en cirkel och utnyttja att cirkelns radie och sexhörningens sidor är lika långa.

exempel Trehörning (= triangel), kvadrat, parallelogram, parallelltrapets, rektangel och romb.

Med månghörning avses ibland det område som månghörningen begränsar och man talar således om en femhörnings area i meningen områdets area.

historia Gauss visade år 1801 att regelbundna  $n$ -hörningar kan konstrueras med passare och linjal då  $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, \dots$

## månghörningsområde

definition område som omsluts av en månghörning

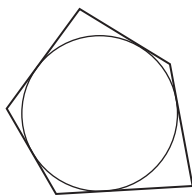
jämför *triangelområde* s. 205

## omkrets hos månghörning

definition summan av sidornas längder

## omskrivna månghörning till en cirkel

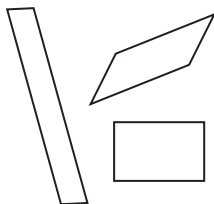
definition månghörning vars alla sidor tangerar cirkeln



En omskriven månghörning till en cirkel.

**parallelogram**, bestämd form *parallelogrammen*, plural *parallelogrammer*

definition parallelltrapets vars sidor är parvis parallella



Tre parallelogrammer.

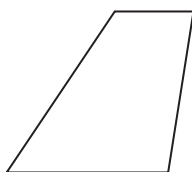
- kommentar Det är ekvivalent att definiera en parallelogram som en fyrhörning med parvis parallella sidor – att den är en parallelltrapets följer.
- exempel Alla rektanglar och romber är parallelogrammer, men inte omvänt.
- etymologi *Parallelogram* kommer av det grekiska *parallēlógrammon* sammansatt av *parállēlos* 'parallell' och *grammḗ* 'linje'.

## parallelogramområde

- definition område som omsluts av en parallelogram

## parallelltrapets, bestämd form *parallelltrapetsen*, plural *parallelltrapetser*

- definition fyrhörning med minst två parallella sidor



Parallelltrapets.

- etymologi *Trapets* kommer av grekiska *trápeza* 'bord', ursprungligen med betydelsen 'fyrfoting'.

## parallelltrapetsområde

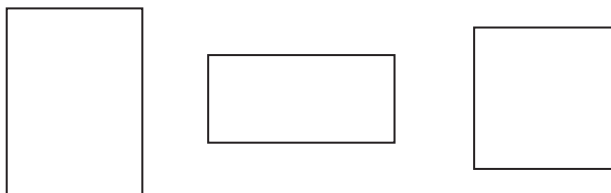
- definition område som omsluts av en parallelltrapets
- kommentar Områdets area är lika med höjden gånger medelvärdet av de två parallella sidornas längder.

## polygon

- synonym **bruten linje**
- definition figur som består av ett antal sträckor som hänger ihop i sina ändpunkter
- kommentar Om polygonen är en sluten kurva sägs den vara **sluten**. En sluten polygon som inte skär sig själv kallas *månghörning*. Sträckorna kallas då *sidor* och deras ändpunkter *hörn*.
- etymologi Ordet *polygon* kommer av grekiskans *poly-* 'mång-' och *gōnía* 'hörn, vinkel'.

## rektangel

- definition parallelogram vars alla vinklar är räta



Tre rektanglar.

**kommentar** Det är ekvivalent att definiera en rektangel som en parallelogram med en rät vinkel.

Likaså kan en rektangel definieras som en fyrhörning med fyra räta vinklar – att sidorna är parvis parallella följer.

**exempel** Varje kvadrat är en rektangel.

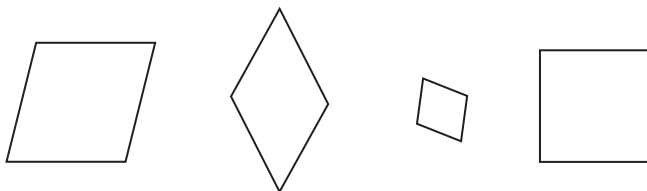
**etymologi** *Rektangel* kommer av medeltidslatinets *rectangulum* 'något som har räta vinklar'; i klassiskt latin hade ordet formen *rectiangulum*.

## rektangelområde

**definition** område som omsluts av en rektangel

## romb

**definition** parallelogram där två närliggande sidor är lika långa



Fyra romber.

**kommentar** Det följer av definitionen att alla fyra sidorna är lika långa.

Man kan definiera en romb som en parallelogram som är symmetrisk kring en av sina diagonaler.

Man kan även definiera en romb som en fyrhörning där alla sidor är lika långa – parallelliteten följer.

**exempel** Varje kvadrat är en romb.

**etymologi** Ordet *romb* kommer via latinets *rhombus* från grekiskans *rhómbos*, båda med betydelsen 'romb'. Ursprungsbetydelsen anses vara 'träbit som slungas runt, fäst i ett snöre (för att avge ljud)' eller allmännare

en leksak som kan snurra. Substantivet kommer av verbet *rhémbein* 'att vända, att snurra, att vrida', som också givit upphov till latinets *vertere* 'att vända', de svenska orden *orm*, *transversal*, *universum*, *varp*, *varpa*, *vertikal*, *vurm* och *värpa*, de engelska *worm* 'mask' och *warp* 'att förvrida', och det tyska *werfen* 'att kasta'.

## rombområde

definition område som omsluts av en romb

## sida<sub>2</sub>

definition en av de sträckor som bygger upp en månghörning

## vinkel i en månghörning

definition vinkel mellan två sidor som bildar hörn i en månghörning om den vid spetsen ligger innanför månghörningen

## vinkelsumma

definition summan av alla vinklar i en månghörning

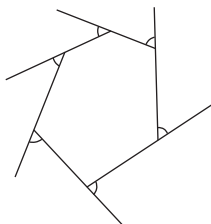
kommentar Vinkelsumman i en triangel är lika med  $180^\circ = \pi$  radianer. Allmännare är summan av de  $m$  vinklarna  $v_j$  i en  $m$ -hörning  $\pi(m - 2)$  radianer. Detta följer av att de  $m$  yttervinklarna  $w_j$  har summan  $2\pi$  (man går runt ett varv), så att  $\sum v_j = \sum(\pi - w_j) = m\pi - \sum w_j = m\pi - 2\pi$ .

jämför *yttervinkel<sub>2</sub>*

## yttervinkel<sub>2</sub>

definition sidovinkel till en vinkel i en månghörning

kommentar Summan av alla yttervinklar är  $2\pi$ , ett varv. Detta är lätt att inse, ty när man går runt månghörningen har man vridit sig ett varv.



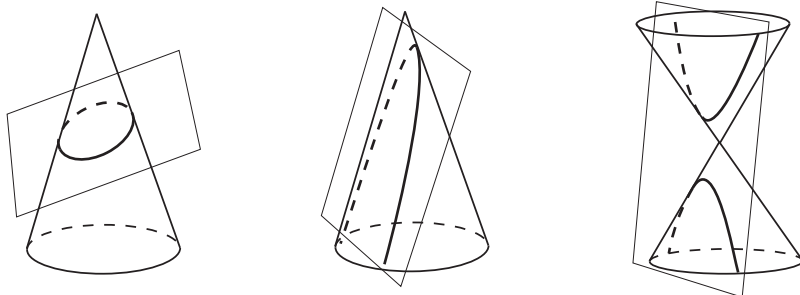
Yttervinklar i en månghörning. Man går runt ett varv,  $360^\circ = 2\pi$ , här i positiv led.

## 9.5. Andragradskurvor

### andragradskurva

synonym **kägelsnitt**

definition plan kurva som kan definieras av ett andragradspolynom i två variabler



Andragradskurvor: en ellips, en parabel och en hyperbel.

kommentar En andragradskurva är antingen en ellips, en parabel eller en hyperbel.

Varje andragradskurva uppstår som snittet mellan ett plan och en cirkulär konisk yta i rymden. Närmare bestämt ser man att om konen ges av ekvationen  $x^2 + y^2 = z^2$  och planet har ekvationen  $ax + by + cz + d = 0$  med inte alla  $a, b, c$  noll och med  $d \neq 0$ , så blir snittet en ellips om  $a^2 + b^2 < c^2$ , en parabel om  $a^2 + b^2 = c^2$  och en hyperbel om  $a^2 + b^2 > c^2$ .

Utom för specialfallet cirkeln kan en andragradskurva även definieras som mängden av alla punkter där avståndet till en given punkt är proportionellt mot avståndet till en given rät linje. Proportionalitetskonstanten kallas *excentriciteten*.

historia Den grekiske matematikern Apollónios' teori om kägelsnitten (senare hälften av 200-talet) hade stor betydelse för utvecklandet av den analytiska geometrin i början av 1600-talet. Kägelsnitten är förknippade med problemet om kubens fördubbling: Ménaikmos (300-talet f. Kr.) utnyttjade hyperbeln och parabeln för att lösa detta problem. 'Umar Khayyām (på arabiska 'Umar al-Khayyām; 1048–1131) använde sig av kägelsnitt för att konstruera lösningarna till en allmän tredjegrads ekvation.

Galileo Galilei visade 1638 att en partikel som har en vågrät utgångshastighet vid fritt fall beskriver en parabel.

Keplers första lag (1609) säger att planeterna rör sig i ellipser.

etymologi

Konen kan också kallas *kägla*; därav namnet *kägelsnitt*.

jämför

*cirkel* s. 214, *ellips* s. 215, *parabel* s. 219, *hyperbel* s. 216, *excentricitet* s. 216

**cirkel**

- definition kurva i planet som består av alla punkter som har ett givet avstånd (*radien*) till en fix punkt (*medelpunkten*)
- kommentar En cirkel har ekvationen  $(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 = r^2$ , där  $(c_1, c_2)$  är koordinaterna för medelpunkten och  $r$  är radien. Varje cirkel är en ellips.
- etymologi Ordet *cirkel* kommer från latinets *circulus* 'cirkel, ring'.

**cirkelbåge**

- definition båge på en cirkel

**cirkels omkrets**

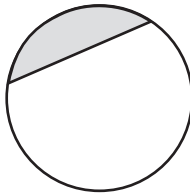
- definition längden av cirkeln
- kommentar Omkretsen är  $2\pi r$ , där  $r$  är radien.

**cirkelring**

- definition plant område som begränsas av två koncentriska cirklar

**cirkelsegment**

- definition område i planet begränsat av en cirkelbåge och den korda som förbinder dennas ändpunkter



Cirkelsegment.

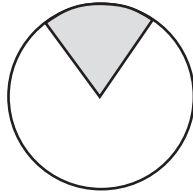
- etymologi Ordet *segment* kommer av latinska *segmentum* 'avskuret stycke', en avledning av verbet *secare* 'att skära'.

**cirkelsektor**

- definition plant område som begränsas av en cirkelbåge och de två radierna till dess ändpunkter
- kommentar Se figur på sidan 215.
- etymologi Det latinska ordet *sector* betyder 'avskärare'. Det är en avledning av verbet *secare* 'att skära'.

**cirkelskiva**

- synonym **cirkelområde**

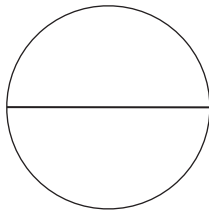


Cirkelsektor.

- definition område som innesluts av en cirkel
- kommentar Cirkelskivan med medelpunkt i en punkt  $c$  med koordinaterna  $(c_1, c_2)$  och radie  $r$  definieras i ett rätvinkligt koordinatsystem av olikheten  $(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 \leq r^2$ . Den kallas *sluten*. Om man i stället tar strikt olikhet får man den *öppna cirkelskivan*. Båda har arean  $\pi r^2$ .

**diameter** [di'a'me:tər]

- definition (i en cirkel) korda som går genom medelpunkten
- kommentar Ofta låter man termen beteckna längden på denna sträcka.

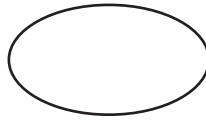


Diameter.

- etymologi Ordet *diameter* kommer av grekiska *diámetros*, sammansatt av *diá* 'genom' och *métron* 'mått'.

**ellips**

- definition plan kurva som består av alla punkter vilkas avstånd till två givna punkter har konstant summa
- kommentar De två givna punkterna får sammanfalla; då är ellipsen en cirkel. En ellips med medelpunkt i origo har i lämpliga koordinater ekvationen  $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ , där  $a \geq b > 0$ . Ellipsens **axlar** är de två sträckor som har ändpunkterna  $(a, 0)$  och  $(-a, 0)$  respektive  $(0, b)$  och  $(0, -b)$ . **Halvaxlarnas längder** är talen  $a$  och  $b$ . Talet  $\varepsilon = \sqrt{1 - (b/a)^2} \geq 0$  kallas *excentriciteten*. Den är mindre än 1. Punkterna  $(c, 0)$  och  $(-c, 0)$ , där  $c = \sqrt{a^2 - b^2} \geq 0$ , kallas för ellipsens **brännpunkter** eller



Ellips.

**fokus**, och excentriciteten  $\varepsilon = c/a$  anger hur långt brännpunkterna ligger från varandra.

Cirkeln är ett specialfall av ellipsen, nämligen när  $a = b$ ; då är excentriciteten 0.

etymologi Ordet *ellips* kommer av grekiska *élleipsis* 'utelämning', förmodligen syftande på att en ellips består av alla punkter vilkas avstånd till en given punkt är en viss multipel mindre än 1 av avståndet till en given rät linje – något fattas alltså.

jämför *parabel* s. 219, *hyperbel* s. 216, *lemniskata* s. 182

### enhetscirkeln

definition den cirkel i ett rätvinkligt koordinatsystem som har medelpunkten i origo och radien 1 längdenhet

### excentricitet

definition icke-negativt tal som beskriver en andragradskurvas form

kommentar Excentriciteten är 0 för cirklar, mindre än 1 för ellipser, lika med 1 för parabler och större än 1 för hyperbler.

jämför *andragradskurva* s. 213, *ellips* s. 215, *parabel* s. 219, *hyperbel* s. 216

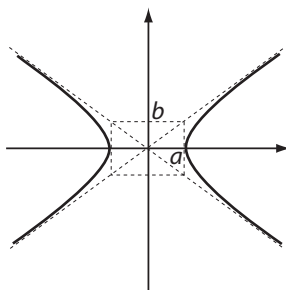
### hyperbel

definition plan kurva som består av alla punkter vilkas avstånd till två givna punkter har konstant differens<sub>1</sub>

kommentar En hyperbel är obegränsad och har två asymptoter. I ett lämpligt rätvinkligt koordinatsystem har den ekvationen  $(x/a)^2 - (y/b)^2 = 1$ , där  $a$  och  $b$  är **halvaxlarnas längder**. I detta läge kallas  $x$ -axeln för **transversalaxeln** och  $y$ -axeln för **konjugataxeln**. Asymptoterna får ekvationerna  $x/a = \pm y/b$ . Excentriciteten är  $\sqrt{1 + (b/a)^2} > 1$ .

etymologi *Hyperbel* kommer av grekiskans *hyperbolé* 'överskridande', syftande på att en hyperbel består av alla punkter vilkas avstånd till en viss punkt är en multipel större än 1 av avståndet till en viss rät linje.

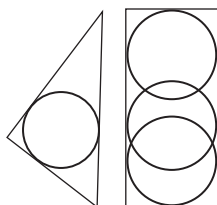




Hyperbel.

**inskriven cirkel**

definition cirkel som är innesluten i en viss figur och som är så stor som möjligt



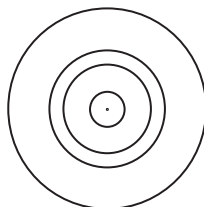
Inskrivna cirklar.

kommentar En triangel har endast en inskriven cirkel. Vissa andra figurer kan ha flera.

jämför *omskrivna cirkel* s. 219

**koncentriska**

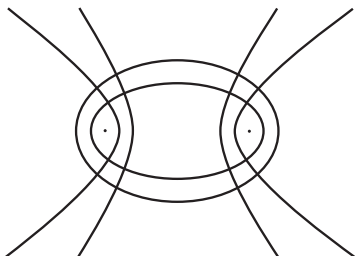
definition (om cirklar eller sfärer) med samma medelpunkt



Koncentriska cirklar.

## konfokala

definition    ⟨om cirklar⟩ koncentriskas;  
 ⟨om ellipser och hyperblar⟩ med gemensamma brännpunkter;  
 ⟨om parabler⟩ med gemensam brännpunkt och gemensam axel



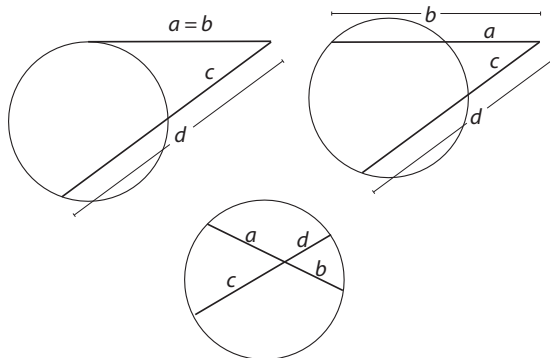
Konfokala ellipser och hyperbler.

kommentar    Eftersom en parabel bara har en brännpunkt, vore det för svagt att endast kräva att två parabler har gemensam brännpunkt. Man lägger därför till kravet att även axlarna skall sammanfalla – man kan säga att den andra brännpunkten ligger i oändligheten i axelns riktning.

jämför        *andragradskurva* s. 213

## kordasatsen

definition    den sats som säger att varje korda genom en given punkt inne i en cirkel delas i två sträckor vilkas produkt är konstant



Tre fall av kordasatsen:  $ab = cd$ .

kommentar    Denna konstant är lika med  $r^2 - s^2$ , där  $r$  är cirkelns radie och  $s$  avståndet från cirkelns medelpunkt till den givna punkten.

Satsen gäller även för sekanterna genom en given punkt utanför cirkeln. Då är produkten av sträckorna lika med  $s^2 - r^2$ , där  $r$  och  $s$

har samma betydelse som förut. Eftersom en tangent är ett gränsfall av en sekant, så gäller satsen även för en tangent: avståndet från den givna punkten till tangeringspunkten i kvadrat är lika med produkten av avstånden längs en sekant från den givna punkten till sekantens två skärningspunkter med cirkeln.

## lillaxel

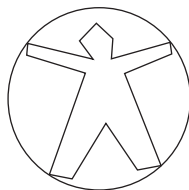
- definition (i en ellips) den minsta av de två axlarna  
 kommentar Om axlarna är lika, så är ellipsen en cirkel och varje diameter en lillaxel och en storaxel.  
 jämför *storaxel* s. 220

## medelpunkt

- synonym **centrum**  
 definition (till en cirkel eller en sfär) den punkt som ligger lika långt från alla punkter på cirkeln respektive sfären  
 kommentar Man kan likaså tala om medelpunkten i en cirkelskiva eller ett klot; det är medelpunkten i den cirkel (sfär) som är cirkelskivans (klotets) rand.  
 Man kan även definiera en medelpunkt i en rektangel, ellips och andra figurer med tillräcklig symmetri.

## omskrivnen cirkel

- definition cirkel vars motsvarande slutna cirkelskiva innehåller en viss plan figur och som är så liten som möjligt

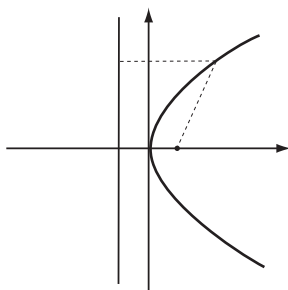


Omskrivnen cirkel.

- kommentar En figur kan ha högst en omskrivnen cirkel: om mängden är innehållen i två cirkelskivor med radierna  $r_1$  och  $r_2$  och olika medelpunkter, så är den också innehållen i deras snitt, som i sin tur är innehållen i en cirkelskiva med radie mindre än  $r_1$  och  $r_2$ .  
 jämför *inskrivnen cirkel* s. 217

## parabel

- definition plan kurva som består av alla punkter vilkas avstånd till en given punkt och en given linje är lika

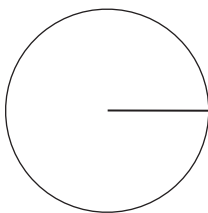


Parabel.

- kommentar** En parabel är en obegränsad andragradskurva utan asymptoter. Den kan ges av ekvationen  $y = x^2$  om man väljer koordinaterna lämpligt. Den har oändlig längd. Dess excentricitet är 1.
- etymologi** *Parabel* kommer av grekiskans *parabolé*, en geometrisk term redan i antiken med ursprunglig betydelse 'bredvidställning, jämförelse' och därifrån 'likhet'. Den andra ordleden kommer av verbet *bállein* 'att kasta, att ställa, att placera'. Likheten kommer av att en parabel består av alla punkter som har samma avstånd till en given punkt som till en given rät linje.

## radie i en cirkel

- definition** sträcka från cirkelns medelpunkt till en punkt på cirkeln



Radie i en cirkel.

- kommentar** Termen används även om denna sträckas längd.
- etymologi** Ordet *radie* kommer, liksom ordet *radian*, av det latinska ordet *radius* 'liten stav, eker, stråle, radie'.
- jämför** *radie i ett klot* s. 231, *radie i en sfär* s. 231

## storaxel

- definition** ⟨i en ellips⟩ den längsta av de två axlarna
- jämför** *lillaxel* s. 219

## 9.6. Polyedrar

### arkimedisk kropp<sub>1</sub>

definition polyeder vars sidoytor är regelbundna månghörningsområden av två eller tre olika slag och där konfigurationen i varje hörn kan avbildas på den i varje annat hörn medelst en kongruensavbildning av polyedern

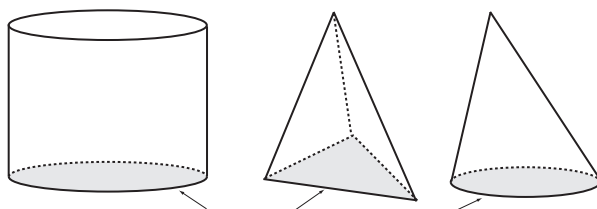
jämför *regelbunden polyeder* s. 224

### baskant i prisma

definition snittet mellan en basyta och en sidoyta

### basyta

definition yta som avgränsar en geometrisk kropp och som man valt ut vid volymsberäkning



Basytor i en cylinder<sub>2</sub>, en tetraeder och en kon.

kommentar Termen används om cylindrar, koner, prismor, pyramider och rätblock. Begränsningsytorna i ett rätblock är parvis parallella och ett par av sådana kan väljas till basytor. Övriga begränsningsytor kallas därvid *sidoytor*. Om ingen begränsningsyta valts till basyta, kallas varje plan begränsningsyta för sidoyta.

### dodekaeder

definition polyeder med tolv sidor

etymologi Se *polyeder* och *regelbunden polyeder*.

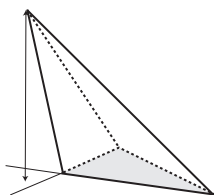
### hexaeder

definition polyeder med sex sidoytor

etymologi Se *polyeder* och *regelbunden polyeder*.

### höjd i en polyeder

definition sträcka som är vinkelrät mot en utvald sidoyta och har sin ena ändpunkt i det plan som sidoytan ligger i och den andra i en punkt i polyedern som har maximalt avstånd till detta plan



Höjd i en polyeder, i detta fall en tetraeder.

kommentar Den utvalda sidoytan kallas *basyta*. Om polyedern är en cylinder eller en pyramid, så används termen *höjd* endast om den utvalda sidoytan är cylinderns eller pyramidens basyta.

Om polyedern är en cylinder (speciellt om den är en parallelepiped eller ett prisma), så är dess volym lika med basytans area gånger höjden. Om polyedern är en pyramid, så är dess volym lika med en tredjedel av basytans area gånger höjden.

### hörn<sub>3</sub>

definition (i en polyeder) punkt som tillhör två kanter i polyedern

### ikosaeder

definition polyeder med tjugo sidoytor

etymologi Se *polyeder* och *regelbunden polyeder*.

### kant

definition (i en polyeder) icke-tomt snitt av två sidor i polyedern

### kub<sub>1</sub>

synonym **regelbunden hexaeder**

definition polyeder som begränsas av sex kvadratombåden

kommentar En kub kan också definieras som en parallelepiped vars alla sidor är kvadrater, alternativt som ett rätblock vars alla kanter är lika långa.

Kubens volym är  $a^3$ , om  $a$  är längden hos en godtycklig kant. Sidoytornas sammanlagda area är  $6a^2$ .

etymologi Ordet *kub* kommer av grekiska *kýbos* 'tärning'. För *hexaeder* se *polyeder* och *regelbunden polyeder*.

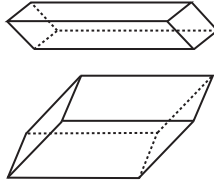
### oktaeder

definition polyeder med åtta sidoytor

etymologi Se *polyeder* och *regelbunden polyeder*.

### parallelepiped

definition prisma där alla begränsningsytorna är parvis parallella



Parallelepiped.

- kommentar Det är ekvivalent att säga att en parallelepiped är ett prisma där alla begränsningsytor är parallelogramområden.
- exempel Rätblock och kuber är parallelepiped.
- etymologi Ordet *epiped* kommer av grekiska *epípedon* 'plan, slätt'.

## polyeder

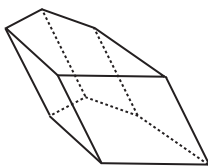
- definition kropp<sub>1</sub> som begränsas av ändligt många plana områden
- kommentar Det följer att de begränsande plana områdena är månghörningsområden. De kallas *sidoytor* (eller bara *sidor*); dessas (en-dimensionella) sidor kallas polyederns *kanter*; kanternas ändpunkter kallas polyederns *hörn*.
- För konvexa polyedrar gäller att antalet hörn minus antalet kanter plus antalet sidoytor är lika med 2 (**Eulers polyederformel**, uppkallad efter Leonard Euler, 1707–1783). För en tetraeder har vi till exempel  $4 - 6 + 4 = 2$ ; för en kub  $8 - 12 + 6 = 2$ . Ett liknande samband, som är ekvivalent med Eulers polyederformel, upptäcktes redan av Descartes, men hans arbete blev inte känt förrän långt efter hans död.
- etymologi *Polyeder* kommer av grekiska *poly-* 'mång-' och *hédra* 'sida'.

## prisma, bestämd form *prismat*, plural *prisman* (eller *en prisma*, *flera prismor*)

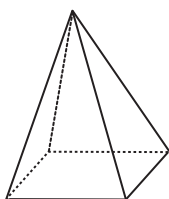
- definition polyeder där minst två av begränsningsytorna är parallella och alla andra begränsningsytor är parallelogramområden
- kommentar De två parallella begränsningsytorna kallas *baser*. Prismats volym är lika med en av basernas area gånger höjden, som är avståndet mellan de två parallella plan i vilka baserna ligger.
- Om de andra begränsningsytorna är vinkelräta mot basytorna så kallas prismat **rakt**. Se figur på sidan 224.
- etymologi Ordet *prisma* kommer från grekiska *prísma* 'något sågat', substantiv till verbet *príein* 'att såga'.

## pyramid

- definition polyeder som samtidigt är en kon<sub>2</sub>



Prisma.



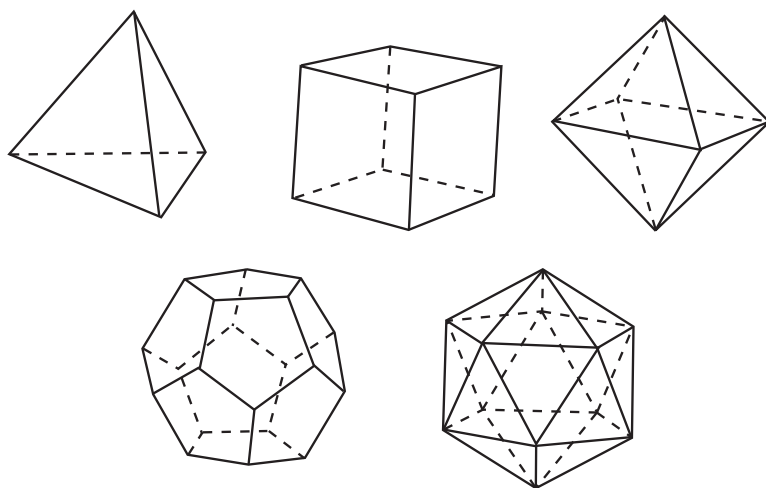
Pyramid.

- kommentar** Alla sidoytor utom en, basen, måste vara triangelområden.  
 Pyramidens volym är lika med en tredjedel av basens area gånger höjden, som är avståndet mellan konens spets och basens plan.
- etymologi** *Pyramid* kommer av grekiska *pyramís* 'pyramid' (syftar både på de egyptiska pyramiderna och ett slags kaka).

### regelbunden polyeder

- synonym** **platonsk kropp<sub>1</sub>**
- definition** polyeder där sidoytorna är sinsemellan kongruenta regelbundna månghörningsområden och där konfigurationen i varje hörn är kongruent med den vid varje annat hörn
- kommentar** Det finns fem regelbundna polyedrar: den regelbundna tetraedern (begränsas av fyra liksidiga triangelområden), kuben eller den regelbundna hexaedern (begränsas av sex kvadratområden), den regelbundna oktaedern (begränsas av åtta liksidiga triangelområden), den regelbundna dodekaedern (begränsas av tolv regelbundna femhörningsområden) och slutligen den regelbundna ikosaedern (begränsas av tjugo liksidiga triangelområden).  
 Ordet *regelbunden* utelämnas ibland och man avser i så fall med t. ex. *tetraeder* en regelbunden tetraeder.  
 Att det inte kan finnas fler än dessa fem kan inses om man studerar hur ett hörn kan se ut. Där kan inte mötas mer än fem trianglar, tre kvadrater eller tre femhörningar. Å andra sidan måste där mötas minst tre av dessa månghörningar. Vi kan alltså i varje hörn ha tre,





De fem regelbundna polyedrarna eller de platonska kropparna: en regelbunden tetraeder, hexaeder (kub), oktaeder, dodekaeder och ikosaeder.

fyra eller fem trianglar, tre kvadrater eller tre femhörningar. Det är de fem fallen.

**historia** I *Timaios* sammanför Platon fyra av de regelbundna polyedrarna med de fyra elementen: jord, eld, luft och vatten motsvarade kuben, tetraedern, oktaedern respektive ikosaedern. Dodekaedern använde Skaparen för världen som helhet; den kom senare att förknippas med ett femte element: etern.

**etymologi** De platonska kropparna är uppkallade efter filosofen Platon (427—347 f. Kr). De var emellertid kända redan av pythagoreerna.

De grekiska räkneprefixen är *tri-* 'tre-' av *treis* 'tre', *tetra-* 'fyra-' av *téttares* 'fyra'; *penta-* 'fem-' av *pénte* 'fem'; *hexa-* 'sex-' av *hex* 'sex'; *okta-* 'åtta-' av *októ* 'åtta'; *dodeka-* 'tolv-' av *dódeka* 'tolv'; och *ikosa-* 'tjugo-' av *ekosi* 'tjugo'.

**jämför** *arkimedisk kropp*<sub>1</sub> s. 221

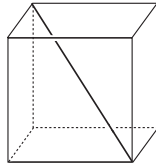
### regelbunden pyramid

**definition** pyramid där basytans kanter bildar en regelbunden månghörning och höjdens fotpunkt är medelpunkt i den kring basytan omskrivna cirkeln

### rymddiagonal

**definition** (i polyeder) sträcka som har sina ändpunkter i två hörn som inte ligger i samma sidoyta

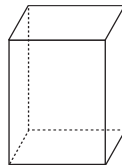
**kommentar** I en kub med sidan  $a$  har de fyra rymddiagonalerna längden  $\sqrt{3}a$ .



Rymddiagonal i en kub.

**rätblock**

definition rätvinklig parallelepiped



Rätblock.

kommentar Ett rätblock begränsas av sex rektangelområden. När alla dessa är kvadrater, har vi en kub.

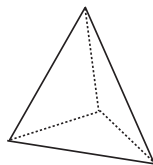
**sidoyta**

synonym  $\text{sida}_3$

definition  $\langle$ i polyeder $\rangle$  plan yta som begränsar polyedern

**tetraeder**

definition polyeder med fyra sidoytor



Tetraeder.

etymologi Se *polyeder* och *regelbunden polyeder*.

## 9.7. Annan rymdgeometri

### andragradsyta

definition yta som definieras av lösningarna till en andradgradsekvation i tre variabler

exempel Ellipsoid, paraboloid, hyperboloid.

### begränsningsyta

definition yta som begränsar en kropp<sub>1</sub>

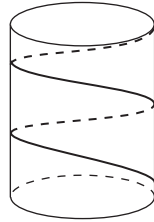
exempel Ett klot har en sfär som begränsningsyta, klotets rand. Ett rätblock har sex plana begränsningsytor, som är rektangelområden.

### cirkulär cylinder

definition cylinder<sub>2</sub> vars bas är en cirkel eller cirkelskiva

### cirkulär helix

definition helix som ligger på en cirkulär cylinder



Cirkulär helix.

kommentar I lämpliga koordinater får kurvan ekvationen på parameterform  $x = r \cos t$ ,  $y = r \sin t$ ,  $z = ct$ ,  $t \in \mathbf{R}$ , där  $r$  och  $c$  är konstanter.

### cirkulär kon

definition kon<sub>2</sub> vars bas är en cirkel eller cirkelskiva

### cylinder<sub>1</sub>

definition mängd i rummet som består av räta linjer parallella med en given rät linje

kommentar Linjerna kallas *generatriser*.

etymologi *Cylinder* kommer av grekiskans *kylindros* 'rulle'.

### cylinder<sub>2</sub>

definition del av en cylinder<sub>1</sub> som ligger mellan två parallella plan

kommentar Definitionen innebär att till exempel en kub är en cylinder.

Om planen är vinkelräta mot generatriserna, så kallas cylindern *rät* eller *rak*.

## cylindrisk yta

- definition cylinder<sub>1</sub> eller cylinder<sub>2</sub> som är en yta
- kommentar En cylindrisk yta uppstår när en rät linje eller en sträcka rör sig parallellt med en fix rät linje och hela tiden skär en given kurva, *direktrisen*.

## ellipsoid

- definition begränsad andragsyta
- kommentar I ett lämpligt rätvinkligt koordinatsystem har en ellipsoid ekvationen  $(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = 1$ . Ellipsoidens tre *axlar* är de sträckor som har ändpunkterna  $(a, 0, 0)$  och  $(-a, 0, 0)$ ;  $(0, b, 0)$  och  $(0, -b, 0)$  respektive  $(0, 0, c)$  och  $(0, 0, -c)$ . Storheterna  $a, b, c$  kallas *halvaxlarnas längder*.
- jämför *hyperboloid* s. 228, *paraboloid* s. 231

## enhetssfären

- definition den sfär i ett tredimensionellt rätvinkligt koordinatsystem som har medelpunkten i origo och radien 1 längdenhet

## helix

- definition kurva i en cylindrisk yta som skär generatriserna under en konstant vinkel
- etymologi *Helix* är det grekiska ordet för spiral, vindling.
- jämför *spiral* s. 161, *cirkulär helix* s. 227 (figur finns där), *konisk helix* s. 229 (figur finns där)

## hyperbolisk cylinder

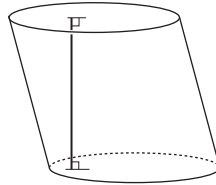
- definition cylindrisk yta sådan att skärningen mellan cylindern och ett plan vinkelrätt mot generatriserna är (den ena grenen av) en hyperbel

## hyperboloid

- definition obegränsad andragsyta som har asymptoter
- kommentar Asymptoterna bildar en kon. Det finns enmantlade och tvåmantlade hyperboloider. De enmantlade är sammanhängande och närmar sig den asymptotiska konen utifrån. De tvåmantlade består av två åtskilda delar som närmar sig den asymptotiska konen inifrån. I ett lämpligt koordinatsystem har en hyperboloid en av ekvationerna  $(x/a)^2 + (y/b)^2 - (z/c)^2 = \pm 1$ . Väljes plustecknet fås en enmantlad, väljes minustecknet fås en tvåmantlad hyperboloid. Deras gemensamma asymptotiska kon får ekvationen  $z/c = \pm \sqrt{(x/a)^2 + (y/b)^2}$ .
- etymologi Ordet *hyperboloid* är bildat av *hyperbel* och suffixet *-oid* 'till formen liknande'.

## höjd i en cylinder

- definition sträcka som har sina ändpunkter i basytornas plan eller deras förlängning och är normal till dessa



Höjd i en cylinder.

## höjd i en kon

definition sträcka som har ena ändpunkten i spetsen och den andra i basytans plan och som är normal till detta plan

## klot

definition kropp<sub>1</sub> i rummet som består av alla punkter som har avstånd från en given punkt högst lika med ett givet tal

kommentar Den givna punkten kallas klotets *medelpunkt* eller *centrum* och det givna talet klotets *radie*. Ett klot kan definieras av en olikhet

$$(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 + (x_3 - c_3)^2 \leq r^2,$$

där  $(c_1, c_2, c_3)$  är koordinaterna för medelpunkten och  $r$  är radien. Närmare bestämt är detta klot *slutet*; om man i stället tar strikt olikhet får man ett *öppet klot*. Volymen är i båda fallen  $\frac{4}{3}\pi r^3$ .

jämför *sfär* s. 233

## kon<sub>1</sub>

definition mängd som består av strålar utgående från en given punkt

kommentar Punkten kallas konens *spets*.

etymologi *Kon* kommer av grekiska *kónos* 'kägla'.

## kon<sub>2</sub>

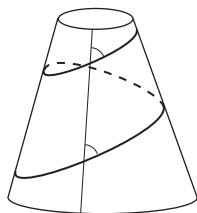
definition del av en kon<sub>1</sub> som ligger på samma sida av ett givet plan som spetsen

kommentar Den del som ligger i det givna planet kallas *basyta*. Konens volym är en tredjedel av basytans area gånger höjden, som är avståndet från planet till spetsen.

Om basen är en cirkelskiva och höjdens fotpunkt är lika med dennas medelpunkt, så kallas konen för en *rak cirkulär kon*.

## konisk helix

definition kurva som ligger på en kon och skär konens generatriser under konstant vinkel



En konisk helix.

## konisk yta

- definition** kon som är en yta
- kommentar** En konisk yta består av de strålar eller sträckor som utgår från en fix punkt och skär en given sluten kurva, **direktrisen**. Varje sådan stråle i ytan kallas en **generatris**.

## konvex mängd

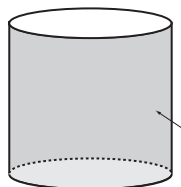
- definition** mängd sådan att varje rät linje skär den i ett intervall
- kommentar** Om vi med  $[a, b]$  betecknar sträckan mellan  $a$  och  $b$  så innebär definitionen att en mängd  $A$  är konvex om och endast om  $\{a, b\} \subset A$  medför  $[a, b] \subset A$ .
- exempel** En cirkelskiva i planet är konvex.  
En cirkel med positiv radie är inte konvex, eftersom dess snitt med en rät linje kan bestå av två punkter.  
Ett klot i rymden är konvext, medan en sfär med positiv radie inte är det.
- etymologi** Adjektivet *konvex* kommer av latinets *convexus* 'välvd, buktig', bildat av prefixet *con-* (här med förstärkande betydelse) och ett efterled, som är omstritt.
- jämför** *konvex funktion* s. 146

## korsande linjer

- synonym** **skeva linjer**
- definition** linjer som inte ligger i ett plan
- kommentar** Korsande linjer skär inte varandra, men är ändå inte parallella.

## mantelyta

- definition** ytan med undantag för basytorna för en  $\text{kon}_2$  eller  $\text{cylinder}_2$
- kommentar** Se figur på sidan 231.
- etymologi** Ordet *mantel* kommer av latinets *mantellum*, diminutiv av *mantum* '[ett slags] kappa'.



Mantelyta.

### motsatta strålar

definition strålar som utgår från samma punkt och tillsammans bildar en rät linje

### parabolisk cylinder

definition cylinder sådan att dess snitt med ett plan som inte innehåller en generatris är en parabel

jämför *paraboloid* s. 231

### paraboloid

definition obegränsad andragsyta som saknar asymptoter

kommentar Det finns *elliptiska paraboloider* (utan sadelpunkter) och *hyperboliska paraboloider* (med sadelpunkter). De förstnämnda har i lämpliga koordinater ekvationen  $2z = (x/a)^2 + (y/b)^2$ ; de sistnämnda  $2z = (x/a)^2 - (y/b)^2$ . Dessutom finns det paraboliska cylindrar, med ekvationen  $2z = (x/a)^2$ .

etymologi Ordet *paraboloid* är bildat av *parabel* och suffixet *-oid* 'till formen liknande'.

### parallella plan

definition (om två plan i rummet) plan som sammanfaller eller inte skär varandra;  
(om fler än två plan) plan sådana att två godtyckliga av dem är parallella

### radie i en sfär

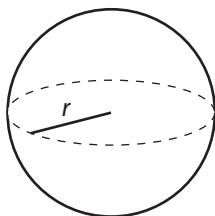
definition sträcka med ena ändpunkten i medelpunkten och den andra på sfären

kommentar Med radie kan även avses längden av denna sträcka.

### radie i ett klot

definition sträcka från klotets medelpunkt till en punkt på klotets yta

kommentar Se figur på sidan 232.



Radie i ett klot.

## rotationsellipsoid

definition rotationsyta som uppstår när en ellips får rotera kring en av sina axlar

kommentar Två av de tre axlarna i en sådan ellipsoid har samma längd.

## rotationshyperboloid

definition rotationsyta som uppkommer då en hyperbel får rotera kring en av sina axlar

kommentar Två av de tre axlarna i en sådan hyperboloid har samma längd. Om hyperbeln roterar kring konjugataxeln erhålls en enmantlad hyperboloid. Om den roterar kring transversalaxeln erhålls en tvåmantlad hyperboloid.

## rotationskropp

definition kropp<sub>1</sub> som bestäms av en figur i planet som får rotera kring en rät linje i samma plan

kommentar Linjen kallas *rotationsaxel*.

## rotationsparaboloid

definition rotationsyta som erhålls genom att en parabel får rotera kring sin axel

kommentar En sådan paraboloid är elliptisk.

## rotationsyta

definition yta som uppkommer då en kurva roterar kring en given rät linje

kommentar Den givna linjen kallas *rotationsaxel*.

## rät linje parallell med ett plan

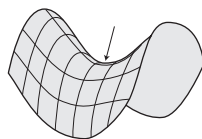
definition rät linje som är parallell med någon rät linje i planet

exempel Den räta linjen genom två punkter med koordinaterna  $(p_1, p_2, p_3)$  och  $(q_1, q_2, q_3) \neq (p_1, p_2, p_3)$  är parallell med planet med ekvationen  $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4 = 0$  om och endast om  $a_1(p_1 - q_1) + a_2(p_2 - q_2) + a_3(p_3 - q_3) = 0$ .



## sadelpunkt

definition punkt där en yta kröker åt ett håll i en tangentiell riktning och åt det andra hållet i en vinkelrät tangentiell riktning



Sadelpunkt.

exempel Ytan med ekvationen  $z = x^2 - y^2$  är en hyperbolisk paraboloid och kröker uppåt när man går från origo längs  $x$ -axeln; den kröker nedåt när man går från origo längs  $y$ -axeln. Origo är därför en sadelpunkt. Faktiskt är varje punkt på ytan det.

## sektor

definition (i planet eller rymden) kon<sub>1</sub> med spets i origo

## sfär

definition yta i rummet som består av alla punkter som har ett givet avstånd till en given punkt

kommentar Den givna punkten kallas sfärens *medelpunkt* eller *centrum* och det givna avståndet sfärens *radie*. En sfär kan definieras av en ekvation

$$(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 + (x_3 - c_3)^2 = r^2,$$

där  $(c_1, c_2, c_3)$  är koordinaterna för medelpunkten och  $r$  är radien. Dess area är  $4\pi r^2$ .

En äldre term för sfär är **klotyta**.

etymologi Ordet *sfär* kommer av grekiskans *sphaíra* 'boll'.

jämför *klot* s. 229

## skärande plan

definition två plan som skär varandra

kommentar I fyra dimensioner kan två tvådimensionella plan vara disjunkta utan att vara parallella, till exempel planen

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4; x_1 = 0, x_2 = 0\} \text{ och}$$

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4; x_1 + x_2 = 1, x_3 = 0\}.$$

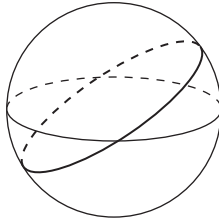
jämför *parallella plan* s. 231

## sluten yta

definition yta som utgör randen till en begränsad tredimensionell delmängd av rummet

## storcirkel

definition cirkel på sfär som har samma medelpunkt som sfären



Två storcirklar.

kommentar Den kortaste vägen på en sfär mellan två punkter på denna är alltid en storcirkelbåge. En projektion som avbildar storcirklar på jorden på räta linjer på kartan är därför värdefull vid navigation. Men många kartor har inte den egenskapen, och på sådana blir storcirkarna (till exempel flygrutter över haven) inte räta linjer.

exempel Om vi approximerar jordytan med en sfär, så är alla meridianer storcirklar. Av latituderna är endast ekvatorn en storcirkel.

jämför *centralprojektion* s. 241

## tangentplan till en yta

definition  $\langle$  i en punkt i ytan  $\rangle$  plan som går genom punkten och är sådant att vinkeln mellan planet och en godtycklig sekant genom punkten och en annan punkt konvergerar mot noll när denna punkt närmar sig den första

## tesseract

definition fyrdimensionell motsvarighet till den tredimensionella kuben

kommentar I ett lämpligt valt fyrdimensionellt koordinatsystem kan tesseracten beskrivas som mängden av alla punkter vilkas koordinater  $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4$  uppfyller  $0 \leq x_j \leq 1, j = 1, 2, 3, 4$ .

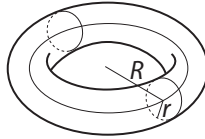
etymologi Ordet *tesseract* kommer av det joniska *tésseres* 'fyra' och *aktís* 'stråle'. (Jämför det attiska *téttares* 'fyra', som givit upphov till *tetra-*.)

## toppvinkel i en rak cirkulär kon

definition vinkeln mellan två olika generatriser som ligger i ett plan genom höjden

**torus**

definition yta som uppkommer när en cirkel roterar ett varv kring en rät linje i dess plan utanför cirkeln



Torus.

kommentar En torus har i ett lämpligt koordinatsystem ekvationen

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right)^2 + z^2 = r^2,$$

där  $r$  är den roterande cirkelns radie och  $R > r$  avståndet mellan rotationsaxeln och cirkelns medelpunkt. Man kan välja koordinater på en torus som är ett par av vinklar.

Om man ersätter likheten i formeln med  $\leq$  får man i stället den **solida torusen**, som består av alla punkter som ligger inne i eller på torusen.

etymologi *Torus* kommer från latinets *torus* 'ansvällning'.

**vinkeln mellan ett plan och en rät linje**

definition den minsta vinkeln mellan linjen och någon linje i planet som går genom skärningspunkten om en sådan finnes; om linjen inte skär planet definieras vinkeln som 0

**vinkeln mellan två plan**

definition vinkeln mellan planens normaler

**vinkeln mellan två räta linjer i rummet**

definition vinkel mellan två skärande linjer parallella med de givna linjerna

kommentar Linjerna behöver inte skära varandra; vinkeln mellan dem är ändå definierad.

**9.8. Koordinatsystem****cylindriska koordinater**

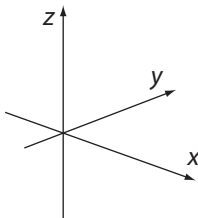
definition koordinater i rummet där de två första är polära i ett plan och den tredje är höjden räknat med tecken från detta plan

## imaginära axeln

- definition den räta linje längs vilken imaginärdelen av ett komplext tal avsätts
- kommentar På den imaginära axeln återfinns de rent imaginära talen  $-i$ ,  $0$ ,  $i$  och  $2i$ .
- jämför *y-axel* s. 240, *reella axeln* s. 239

## kartesiskt koordinatsystem

- definition koordinatsystem där en punkts koordinater avsätts parallellt med axlarna, som är räta linjer



Ett rätvinkligt kartesiskt koordinatsystem i rymden.

- kommentar Axlarna behöver inte bilda räta vinklar mot varandra. Ett kartesiskt koordinatsystem där axlarna är vinkelräta mot varandra kallas *rätvinkligt koordinatsystem*.
- etymologi Koordinatsystemet är uppkallat efter René Descartes (1596—1650), vars latinska namn var Cartesius.
- jämför *polärt koordinatsystem* s. 238

## koordinat

- definition ett av de tal som används för att ange en punkts läge i ett koordinatsystem
- kommentar En koordinat kan ange ett avstånd eller en vinkel.  
Beroende på dimensionen skrivs koordinaterna som tal, ordnade par av tal eller tripplar av tal o.s.v. Om dimensionen är två eller högre så åtskiljs talen med kommatecken:  $x$ ,  $(x, y)$ ,  $(x_1, x_2)$ ,  $(x, y, z)$ ,  $(x_1, x_2, x_3)$ . (För att undvika förväxling med decimalkomma kan man i stället använda semikolon – eller använda decimalpunkt. Om  $x = 1,2$  och  $y = 3,4$  bör man inte skriva  $(x, y) = (1, 2, 3, 4)$  utan  $(1,2; 3,4)$  eller  $(1.2, 3.4)$ .)
- jämför *kartesiskt koordinatsystem* s. 236, *polärt koordinatsystem* s. 238
- etymologi Ordet *koordinat* kommer från latinets *coordinata*, perfekt particip av verbet *coordinare* 'att samordna'.

## koordinataxel

- definition rät linje parallellt med vilken koordinaterna avsätts i ett koordinatsystem

## koordinatplan

definition (i ett tredimensionellt kartesiskt koordinatsystem) vart och ett av de tre plan som innehåller ett par av koordinataxlarna

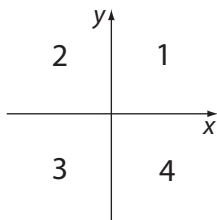
## koordinatsystem

definition referenssystem där en punkts position anges med hjälp av tal

jämför *kartesiskt koordinatsystem* s. 236, *polärt koordinatsystem* s. 238

## kvadrant

definition var och en av de fyra sektorer som axlarna i ett tvådimensionellt koordinatsystem delar in planet i



De fyra kvadranterna.

kommentar Man talar om den *första*, . . . , *fjärde kvadranten* och avser då den där båda koordinaterna är positiva, den där  $x$  är negativ och  $y$  är positiv, och så vidare till den fjärde, den där  $x$  är positiv och  $y$  är negativ.

etymologi *Kvadrant* kommer av latinets *quadrans* 'fjärdedel'.

## negativ axel

definition den negativa delen av en koordinataxel

## oktant

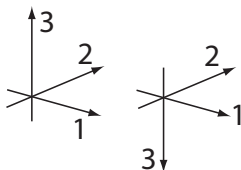
definition var och en av de åtta koner som de tre koordinatplanen i ett tredimensionellt koordinatsystem delar in rummet i

etymologi Ordet *oktant* kommer av latinets *octans* 'vinkelmätningssinstrument omfattande en åttondels cirkel', bildat av *octo* 'åtta'.

## orientering

definition (av ett koordinatsystem) ett av de två val som man kan göra i ett koordinatsystem och som ger olika tecken åt vissa storheter

kommentar Ett tvådimensionellt koordinatsystem säges vara *positivt orienterat* om den positiva  $x$ -axeln kan överföras till den positiva  $y$ -axeln medelst en vridning i positiv led (moturs) mindre än  $180^\circ$ , annars *negativt orienterat*.



Två koordinatsystem: ett positivt orienterat (till vänster) och ett med negativ orientering.

Ett tredimensionellt koordinatsystem säges vara **positivt orienterat** eller ett **högersystem** om de positiva  $x$ -,  $y$ - och  $z$ -axlarna är riktade som tummen, pekfingeret (sträckt) och långfingeret (böjt) på en högerhand.

Ofta ritas man en tvådimensionell projektion av ett tredimensionellt, positivt orienterat koordinatsystem så att  $x$ -axeln pekar åt höger något ut ur bilden,  $y$ -axeln in i bilden, och  $z$ -axeln uppåt.

## origo

definition	nollpunkt i ett koordinatsystem
kommentar	På en rät linje har origo koordinaten 0; i ett plan koordinaterna $(0, 0)$ ; i rummet $(0, 0, 0)$ .
etymologi	<i>Origo</i> kommer av latinets <i>origo</i> 'ursprung, första början'.

## ortonormerat koordinatsystem

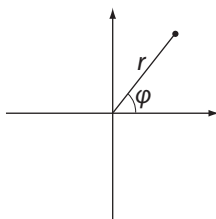
definition	kartesiskt koordinatsystem där koordinataxlarna är vinkelräta mot varandra och längdenheten för koordinaterna är lika med en fastställd enhet
etymologi	Termen <i>ortonormerad</i> innehåller grekiskans <i>orthós</i> 'rät'.

## pol

definition	origo i ett polärt koordinatsystem
------------	------------------------------------

## polärt koordinatsystem

definition	koordinatsystem i planet där man anger avståndet från en fix punkt (origo, kallad <i>polen</i> ) till en given punkt och vinkeln mellan en fix stråle och strålen från polen genom den givna punkten
kommentar	I ett vinkelrätt koordinatsystem kan man införa polära koordinater $(r, \varphi)$ , där $r$ är avståndet från origo (polen) till punkten och $\varphi$ är vinkeln mellan $x$ -axeln och strålen från polen till punkten. Då gäller att $x = r \cos \varphi$ och $y = r \sin \varphi$ . Vinkeln $\varphi$ är endast bestämd modulo $2\pi$ , så det är vanligt att man begränsar den genom att föreskriva att $-\pi < \varphi \leq \pi$ eller $0 \leq \varphi < 2\pi$ skall gälla.



Polärt koordinatsystem.

**positiv axel**

definition den positiva delen av en koordinataxel

**reella axeln**

definition den axel längs vilken realdelen av ett komplext tal avsätts

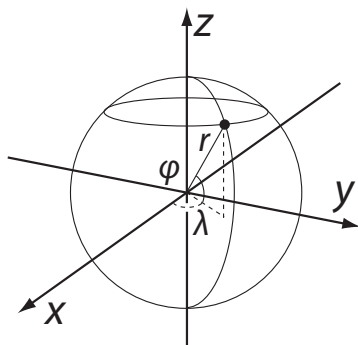
jämför *x-axel* s. 240, *imaginära axeln* s. 236

**rätvinkligt koordinatsystem**

definition kartesiskt koordinatsystem där axlarna är vinkelräta mot varandra

**sfäriska koordinater**

definition koordinater i rummet som består av avståndet från origo till en given punkt och två vinklar, latitud och longitud, eller liknande vinklar



Sfäriska koordinater.

kommentar I ett tredimensionellt rätvinkligt kartesiskt koordinatsystem kan man införa sfäriska koordinater  $(r, \varphi, \lambda)$ , där  $r$  är avståndet från origo till punkten,  $\varphi$  latituden och  $\lambda$  longituden räknad från exempelvis den positiva  $x$ -axeln. Då gäller att  $x = r \cos \lambda \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \lambda \cos \varphi$  och  $z = r \sin \varphi$ .

Man använder samma term också om två koordinater  $\varphi$  och  $\lambda$  på enhetssfären; det svarar mot att man endast betraktar punkter med  $r = 1$ .

### ***x*-axel**

definition den första axeln i ett kartesiskt koordinatsystem

### ***x*-koordinat**

synonym **abskissa**

definition den första koordinaten i ett kartesiskt koordinatsystem

kommentar I ett tvådimensionellt koordinatsystem avsättes den första koordinaten vanligen åt höger.

etymologi *Abskissa* kommer från latinets *abscissa linea* 'avhuggen linje'.

### ***y*-axel**

definition den andra axeln i ett kartesiskt koordinatsystem

### ***y*-koordinat**

synonym **ordinata**

definition den andra koordinaten i ett kartesiskt koordinatsystem

kommentar I ett tvådimensionellt koordinatsystem avsättes den andra koordinaten ofta vertikalt (uppåt på papperet).

etymologi *Ordinata* kommer från latinets *ordinata linea* 'ordnad linje'.

### ***z*-axel**

definition den tredje axeln i ett kartesiskt koordinatsystem

### ***z*-koordinat**

synonym **applikata**

definition den tredje koordinaten i ett kartesiskt koordinatsystem

etymologi *Applikata* kommer från latinets *applicata linea* 'tillfogad/anbringad linje'.

## **9.9. Avbildningar och symmetrier**

### **affin transformation**

definition bijektiv affin avbildning

### **affint ekvivalenta**

definition ⟨om två geometriska figurer⟩ möjliga att överföra på varandra medelst en affin transformation



**kommentar** Två trianglar är alltid affint ekvivalenta, likaså två ellipser, däremot inte en ellips och en hyperbel.

Medianerna i en liksidig triangel skär varandra i en punkt av symmetriskäl. Eftersom alla trianglar är affint ekvivalenta och medianerna är definierade medelst affint invariants begrepp, så skär medianerna i en godtycklig triangel varandra i en punkt. För bisektriser, höjder och mittpunktsnormaler kan motsvarande resultat inte bevisas lika enkelt.

**jämför** *projektivt ekvivalenta* s. 245

## antipod

**definition** (till en punkt på en sfär) motsatt punkt

**kommentar** Antipoden till en punkt  $a$  på sfären med ekvationen  $(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 + (x_3 - c_3)^2 = r^2$  är  $2c - a$ . Man säger att punkterna  $a$  och  $2c - a$  är **antipodiska**.

## areaskala

**definition** kvadraten<sub>2</sub> på skala<sub>1</sub>

**exempel** På en karta i skalan 1:50 000 är areaskalan 1:2 500 000 000. En sjö med arean  $0,6 \text{ cm}^2$  på kartan har i verkligheten arean 15 ha.

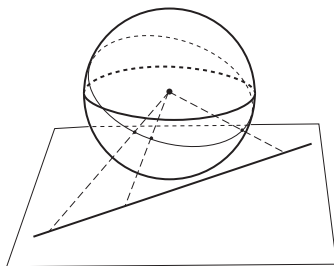
## axel<sub>1</sub>

**definition** (i geometrin) rät linje eller sträcka som är nära förknippad med symmetrin hos en geometrisk figur

**jämför** *koordinataxel* s. 236

## centralprojektion

**definition** avbildning mellan två ytor som bestäms genom att man drar en stråle från en given punkt genom en punkt i den första ytan och avbildar denna på strålens skärning med den andra ytan



Centralprojektion, i detta fall en gnomisk projektion.

kommentar	Den givna punkten kallas projektionens <i>centrum</i> . De två ytorna kan vara plan eller sfärer. Om den första ytan är en sfär med medelpunkt lika med projektionens centrum och den andra är ett plan, så kallas projektionen <i>gnomonisk</i> .
exempel	Vid gnomonisk projektion avbildas storcirklar på räta linjer.
etymologi	<i>Gnomonisk</i> kommer av det grekiska <i>gnómōn</i> 'visare på solur'.
jämför	<i>parallellprojektion</i> s.244, <i>storcirkel</i> s.234, <i>stereografisk projektion</i> s.247

## förminskning

definition	avbildning som förminskar alla avstånd med samma faktor; modell som är resultatet av en sådan avbildning
exempel	För en modell i skalan <sub>1</sub> 1:200 har man dividerat alla längder i verkligheten med 200, och modellen är mindre än föremålet.

## förstoring

definition	avbildning som förstorar alla avstånd med samma faktor; modell som är resultatet av en sådan avbildning
exempel	För en modell i skalan <sub>1</sub> 2:1 har man multiplicerat alla längder i verkligheten med 2, och längderna i modellen är dubbelt så stora som hos originalet.

## invariant<sub>1</sub> (adjektiv)

definition	⟨under en viss avbildning⟩ oförändrad
exempel	Under en strikt växande avbildning är relationerna <i>mindre än</i> ( $<$ ) och <i>mindre än eller lika med</i> ( $\leq$ ) invarianta <sub>1</sub> . Under en växande avbildning är endast den sistnämnda invariant <sub>1</sub> .

## invariant<sub>2</sub> (substantiv)

definition	storhet eller egenskap som är invariant <sub>1</sub> under en viss avbildning
exempel	Under en rotation i planet är arean en invariant <sub>2</sub> .

## inversion

definition	⟨i en cirkel⟩ avbildning som avbildar varje punkt på den punkt som ligger på samma stråle från cirkelns medelpunkt och som bestäms av att de två punkternas avstånd till medelpunkten har produkten lika med radien i kvadrat
kommentar	Om cirkeln har ekvationen $(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 = r^2$ , så avbildas punkten $x = (x_1, x_2)$ genom inversionen på $y = (y_1, y_2) = (1-t)c + tx$ , där $t = r^2/d(x, c)^2$ och $d(x, c)$ är det euklidiska avståndet mellan $x$ och medelpunkten $c$ . Punkterna på cirkeln avbildas på sig själva.

## konform

synonym	<b>vinkeltrogen</b>
---------	---------------------

- definition som bevarar alla vinklar
- kommentar Det är inte möjligt att avbilda en sfär på ett plan så att alla avstånd bevaras. Varje plan karta över jorden måste därför innebära en viss förvanskning. Däremot är det möjligt att bevara alla vinklar; en stereografisk projektion gör detta.
- etymologi *Konform* kommer av latinets *conformis* 'likformig'.

## kongruens

- definition egenskapen att vara kongruenta
- etymologi Ordet *kongruens* kommer från latinets *congruentia* 'överensstämmelse', substantiv av verbet *congruere* 'att överensstämma'.

## kongruensavbildning

- synonym **kongruenstransformation**
- definition avbildning av figurer som bevarar avståndet mellan två godtyckliga punkter
- exempel En kongruensavbildning av ett plan på ett annat är affin och konform.

## kongruenta

- synonym **euklidiskt ekvivalenta**
- definition (om två geometriska figurer) sådana att den ena kan avbildas på den andra medelst en kongruensavbildning

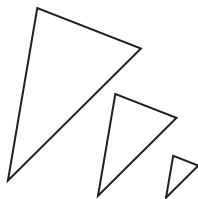


Två par av kongruenta figurer. I det första fallet innehåller kongruensavbildningen en spegling, i det andra inte.

- historia Det finns tre kongruenssats för trianglar i Euklides' *Stoikheía* (i latinsk översättning *Elementa*) 'Grundbegreppen'. En fjärde kongruenssats är inte formulerad, men kan härledas ur en sats om likformighet hos trianglar. Dessa fyra sats med bevis ingick i realskolans matematik ända fram till början av 1960-talet.

## likformiga

- definition (om två geometriska figurer) sådana att den ena kan avbildas på den andra medelst en likformighetsavbildning
- kommentar Att två trianglar är likformiga innebär att förhållandet mellan motsvarande sidor i trianglarna är detsamma. Se figur på sidan 244.



Tre likformiga trianglar.

## likformighet

definition    egenskapen att vara likformiga

## likformighetsavbildning

definition    avbildning sådan att avståndet mellan två godtyckliga punkter multipliceras med en konstant

exempel      Vinklar bevaras under en likformighetsavbildning; en sådan är således konform.

## ortogonal projektion

definition    avbildning av en figur på ett plan längs räta linjer som är vinkelräta mot planet

exempel      Den ortogonala projektionen av  $\mathbf{R}^3$  på planet med ekvationen  $ax + by + cz = 0$  är

$$(x, y, z) \mapsto (x - sa, y - sb, z - sc), \text{ där } s = \frac{ax + by + cz}{a^2 + b^2 + c^2},$$

d.v.s. punkten flyttas längs planets normal  $(a, b, c)$  till planet.

## parallellprojektion

definition    avbildning där varje punkt avbildas på en punkt som ligger på den räta linje som går genom den första punkten och är parallell med en given rät linje

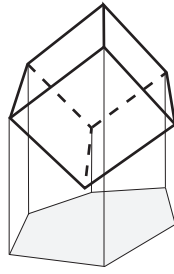
jämför        *centralprojektion* s. 241

## projektion

definition    (inom geometrin) avbildning av en figur på en annan längs kurvor, speciellt längs räta linjer, genom en given punkt eller längs parallella linjer

kommentar    Se figur på sidan 245.

jämför        *centralprojektion* s. 241, *stereografisk projektion* s. 247, *parallellprojektion* s. 244, *ortogonal projektion* s. 244



Projektion.

## projektivt ekvivalenta

**definition** (om två geometriska figurer) möjliga att överföra på varandra medelst en projektiv transformation

**exempel** En ellips är projektivt ekvivalent med en hyperbel. Konen

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$$

skär planet med ekvationen  $z = 1$  i en cirkel, och planet med ekvationen  $x = 1$  i en hyperbel. Eftersom avbildningen  $(x, y, z) \mapsto (z, y, x)$  är en tillåten projektiv transformation, så är cirkeln och hyperbeln projektivt ekvivalenta.

**jämför** *affint ekvivalenta* s. 240

## projektivt plan

**definition** mängd som uppstår genom att ett plan kompletteras med en linje i oändligheten

**kommentar** Mer precist innebär definitionen att ett projektivt plan kan representeras av alla linjer som går genom origo i ett tredimensionellt rum. Punkterna i det ursprungliga planet representeras då av linjer

$$\{(ta, tb, tc) \in \mathbf{R}^3; t \in \mathbf{R}\}$$

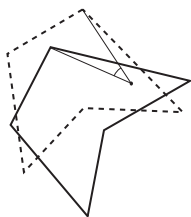
med  $c \neq 0$ , medan punkterna i oändligheten representeras av de linjer som har  $c = 0$  men inte både  $a$  och  $b$  lika med noll.

## projektiv transformation

**definition** (mellan två projektiva plan) avbildning som ges av en lineär och inverterbar avbildning i det tredimensionella rum som representerar planen

## rotation

**synonym** vridning



Rotation.

**definition** avbildning i planet eller rummet som innebär vridning kring en punkt eller en axel

**kommentar** En rotation är en kongruensavbildning.

### rotationssymmetri

**definition** egenskapen hos en kropp<sub>1</sub> att avbildas på sig själv då den roteras en viss vinkel

**exempel** En liksidig triangel har rotationssymmetri: om man roterar den  $120^\circ$  kring medianernas skärningspunkt så övergår den i sig själv.

En regelbunden femhörning har rotationssymmetri (man roterar  $72^\circ$ ).

En cirkel har ännu bättre rotationssymmetri: inget ändras om man roterar den en godtycklig vinkel kring dess medelpunkt.

### skala<sub>1</sub>

**synonym** **längdskala**

**definition** förhållande mellan längderna hos två objekt

**kommentar** Objekten kan till exempel vara en karta och en del av jorden eller en modell och det modellen föreställer.

**exempel** Karta i skalan 1:50 000 (kartan återger en sträcka med en femtio-tusendel av dess verkliga längd).

Modell i skala 3:1 (modellens längder är tre gånger så stora som det ursprungliga objektets).

**jämför** *areaskala* s. 241, *volym skala* s. 249

### skala<sub>2</sub>

**definition** kurva, oftast sträcka eller cirkelbåge, på vilken vissa längder är markerade medelst tvärstreck

**exempel** En linjal kan ha skalor<sub>2</sub> som anger både millimeter och tum.

### skjuvning

**definition** avbildning i rummet där varje punkt translateras i en given riktning med en sträcka som är proportionell mot avståndet till ett givet plan som innehåller den givna riktningen

**kommentar** Om planet är  $z = 0$  och riktningen är  $(a, b, c)$  så måste  $c = 0$  och avbildningen ges av

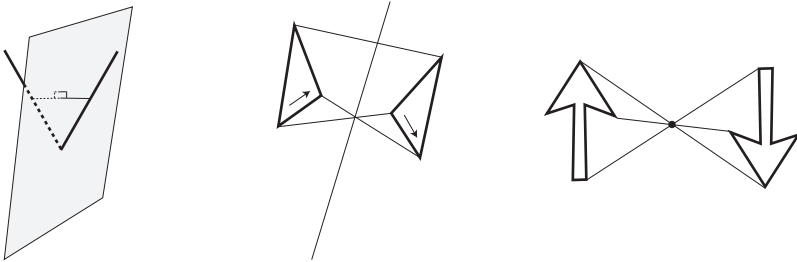
$$(x, y, z) \mapsto (x + az, y + bz, z).$$

Det är vanligt att vinden uppvisar en skjuvning, d.v.s. att vinden vrider sig och ökar med höjden över marken.

**etymologi** *Skjuva* kommer av ett fornsvenskt verb med den allmänna betydelsen 'att flytta i sidled'. Det är besläktat med *skov*, *skovel*, *skuffa*, *skyffel*.

## spegling

**definition** (i en rät linje i planet eller rummet) avbildning där varje punkt avbildas på sin spegelbild i linjen;  
 (i ett plan i rummet) avbildning där varje punkt avbildas på sin spegelbild i planet;  
 (i en punkt i planet eller rummet) avbildning där varje punkt avbildas på en punkt sådan att deras mittpunkt är den givna punkten



Spegling i ett plan; i en linje i rummen; i en punkt.

**kommentar** Avstånd är invarianta under en spegling, som alltså är en kongruensavbildning. Speglingen i planet med ekvationen  $ax + by + cz = 0$  ges av

$$(x, y, z) \mapsto (x - ta, y - tb, z - tc), \text{ där } t = 2 \frac{ax + by + cz}{a^2 + b^2 + c^2},$$

d.v.s. punkten flyttas längs planets normal  $(a, b, c)$  till andra sidan planet.

## stereografisk projektion

**definition** centralprojektion av en sfär på ett tangerande plan sådan att projektionens centrum är antipod till tangeringspunkten

**kommentar** Under en stereografisk projektion avbildas en cirkel på sfären på en cirkel i planet eller på en rät linje; det sista inträffar när cirkeln på sfären går genom projektionens centrum.

exempel	Det komplexa talplanet kan genom en stereografisk projektion identifieras med en sfär, <b>Riemannsfären</b> , där dock en punkt fattas, en punkt som inte motsvarar något komplext tal. Denna motsvarar ett nytt element, oändligheten, betecknad $\infty$ , som kan läggas till de komplexa talen. Man kan ge det utvidgade komplexa planet $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ en topologi så att det blir homeomorft med sfären.
etymologi	<i>Stereografisk</i> kommer av det grekiska <i>stereós</i> 'hård, fast, massiv, solid' och <i>gráphein</i> 'att skriva, att rita'.
jämför	<i>centralprojektion</i> s. 241, <i>konform</i> s. 242

## sträckning

synonym	<b>homoteti</b>
definition	⟨med avseende på en given punkt $c$ ⟩ avbildning som avbildar varje punkt $x$ på punkten $k(x - c) + c$ , där talet $k$ är avbildningens skala <sub>1</sub>
kommentar	En sträckning är en likformighetsavbildning
etymologi	Ordet <i>homoteti</i> är sammansatt av grekiska <i>homós</i> 'samma' och <i>thetós</i> 'placerad', till <i>tithénai</i> 'att placera, att sätta'.

## symmetri

definition	egenskapen att vara oförändrad under en viss bijektiv avbildning
kommentar	Vanliga symmetrier är till exempel symmetri i planet med avseende på en given rät linje: egenskapen att vara oförändrad vid spegling i linjen; symmetri i rummet med avseende på ett givet plan: egenskapen att vara oförändrad vid spegling i planet; och symmetri i planet eller rymden med avseende på en given punkt: egenskapen att vara oförändrad vid spegling i punkten. Vid spegling i en rät linje kallas denna linje för den symmetriska mängdens <b>symmetrilinje</b> ; vid spegling i ett plan kallas planet för den symmetriska mängdens <b>symmetriplan</b> . Vid spegling i en punkt slutligen kallas punkten för den symmetriska mängdens <b>symmetri-centrum</b> .
etymologi	Ordet <i>symmetri</i> kommer från grekiska <i>symmetría</i> 'jämförande mätning', av <i>syn-</i> 'samman-' och <i>metreín</i> 'att mäta'.

## translat

definition	bild under en translation
------------	---------------------------

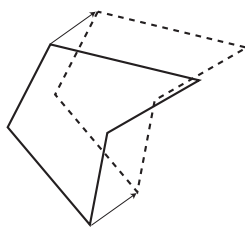
## translatera

definition	utföra en translation
------------	-----------------------

## translation

synonym	<b>parallellförskjutning</b>
definition	avbildning där alla punkter förflyttas en viss sträcka i en viss riktning
kommentar	Uttryckt i koordinater innebär definitionen i planet att $x = (x_1, x_2)$ avbildas på $x + a = (x_1 + a_1, x_2 + a_2)$ ; i rummet att $x = (x_1, x_2, x_3)$ avbildas på $x + a = (x_1 + a_1, x_2 + a_2, x_3 + a_3)$ för någon fix vektor $a$ .





Translation.

etymologi *Translation* kommer från latinets *translatio* 'transport, överföring, förflyttning'.

### volym skala

definition kuben<sub>2</sub> på skala<sub>1</sub>

exempel En fartygsmodell är byggd i skalan 1:200. Volymskalan är då  $1:200^3 = 1:8 \cdot 10^6$ , en till åtta miljoner. Fartygets deplacementet på 30 000 ton motsvarar 3,75 kg i modellen (deplacementet är en volym, men av tradition räknas den i ton vatten).

### vridningsriktning

definition håll åt vilket en rotation i planet sker

kommentar Man säger att vridningsriktningen är *positiv* om den sker moturs, och *negativ* om den sker medurs.

# 10. Trigonometri

## arcusfunktion

synonym **cyklometrisk funktion**

definition invers till en restriktion av en trigonometrisk funktion

kommentar Restriktionen av sinusfunktionen till intervallet  $[-\pi/2, \pi/2]$  är injektiv, vilket gör att dess invers,  $\arcsin: [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ , kan definieras. På samma sätt är restriktionen av cosinusfunktionen till  $[0, \pi]$  injektiv, och man definierar dess invers,  $\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ , liksom inversen till en restriktion av tangensfunktionen,  $\arctan: \mathbf{R} \rightarrow ]-\pi/2, \pi/2[$ . Funktionerna heter *arcus sinus*, *arcus cosinus*, *arcus tangens* och beteckningarna utläses så.

Man ser ibland beteckningen  $\sin^{-1} x$  för  $\arcsin x$ , men den kan förväxlas med  $1/\sin x = \operatorname{cosec} x$ .

historia År 1729 skrev Daniel Bernoulli *A.S.* för arcsinus.

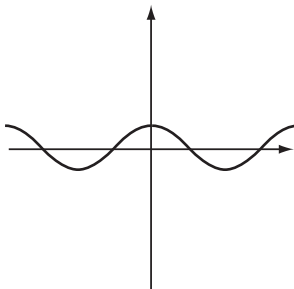
## cosecans

definition funktionen  $1/\sin$

kommentar Cosecansfunktionen kan även definieras som secans för komplementvinkeln:  $\operatorname{cosec} v = \sec(\pi/2 - v)$ .

## cosinus

definition (för en vinkel i en rätvinklig triangel) närliggande katet dividerad med hypotenusan

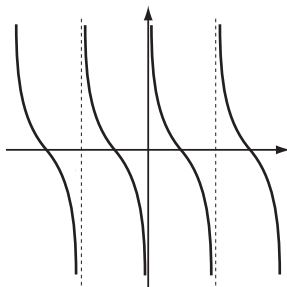


Cosinusfunktionen.

kommentar Cosinus för en vinkel  $v$  skrivs  $\cos v$ . Funktionen kan utvidgas till alla reella argument genom att man föreskriver att den skall vara lika med  $x$ -koordinaten för en punkt på enhetscirkeln med vinkeln  $v$  mot  $x$ -axeln. Den blir då en jämn funktion med perioden  $2\pi$ . Cosinusfunktionen kan även definieras som sinus för komplementvinkeln:  $\cos v = \sin(\pi/2 - v)$ .

## cotangens

definition (för en vinkel  $v$  i en rätvinklig triangel) närliggande katet dividerad med motstående katet



Cotangensfunktionen.

kommentar Cotangens för en vinkel  $v$  skrivs  $\cot v$ . Den kan definieras för alla reella argument utom heltalsmultiplarna av  $\pi$  genom att man föreskriver att  $\cot v$  skall vara lika med  $\cos v / \sin v$ . Den blir då en udda funktion med perioden  $\pi$ , dock odefinierad då  $v \in \pi\mathbf{Z}$ , d.v.s. då  $v$  är en heltalsmultipel av  $\pi$ . Cotangensfunktionen kan även definieras som tangens för komplementvinkeln:  $\cot v = \tan(\pi/2 - v)$ .

## Fourieranalys

synonym **harmonisk analys**

definition gren av matematiken där man delar upp signaler, förlopp och funktioner i en summa av sinus- och cosinusfunktioner eller exponentialfunktioner

kommentar Inom Fourieranalysen studeras speciellt **Fouriertransformationen**, som till en funktion  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  ordnar dess **Fouriertransform**  $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$ , som definieras av

$$\hat{f}(\tau) = \mathcal{F}(f)(\tau) = \int_{\mathbf{R}} f(t)e^{-it\tau} dt, \quad \tau \in \mathbf{R}.$$

historia En beskrivning av en planetbana som en summa av cirkulära rörelser, *epicykler*, användes fram till Kepler och är en typ av Fourierutveckling långt före Fourier.

En viktig föregångare inom Fourieranalysen var Daniel Bernoulli (1700–1782), som omkring 1730 fann att en vibrerande strängs rörelse kan tänkas bestå av ett oändligt antal harmoniska delsvängningar, senare tolkade som sinusvågor.

Joseph Fourier (1768–1830) publicerade 1822 ett epokgörande arbete, *Théorie analytique de la chaleur* 'Analytisk teori för värmets', där han utvecklade de metoder som nu kallas Fourieranalys.

etymologi Namnet *Fourieranalys* är efter Joseph Fourier.

Termen *harmonisk analys* får förstås av det faktum att de svängningar som en ton kan delas upp i harmonierar med varandra; grekerna talade om *harmonía* 'harmoni', som användes om alla delars rätta förhållande till det hela – i musik lika väl som i retorik och anatomi. Grundbetydelsen är 'sammanfogning, förbindelse'; jämför *harmós* 'fog, söm, fogning'.

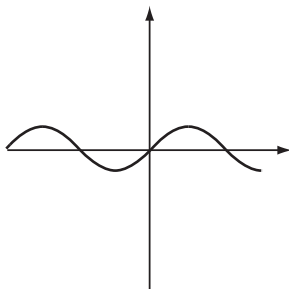
## secans

definition funktionen  $1/\cos$

etymologi *Secans* 'skärande' är presensparticip av *secare* 'att skära'.

## sinus

definition (för en vinkel i en rätvinklig triangel) motstående katet dividerad med hypotenusan



Sinusfunktionen.

kommentar Sinus för en vinkel  $v$  skrivs  $\sin v$ . Funktionen kan utvidgas till alla reella argument genom att man föreskriver att den skall vara lika med  $y$ -koordinaten för en punkt på enhetscirkeln med vinkeln  $v$  mot  $x$ -axeln. Den blir då en udda funktion med perioden  $2\pi$ .

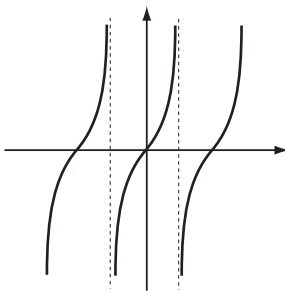
historia Beteckningarna  $\sin$ . och  $\tan$ . började användas i slutet av 1500-talet. Under 1600-talet började man utelämna den avslutande punkten och skrev  $\sin$  och  $\tan$  utan punkt. I slutet av 1600-talet kom så beteckningen  $\cos$ . i bruk; under 1700-talet utan punkt.

etymologi *Sinus* är ett latinskt ord som bl. a. betyder 'båge, bukt, rundning, bröstveck (i dräkt), hålrum'. Detta kan förefalla egendomligt, eftersom sinus för  $v$  inte är en båglängd utan längden hos halva kordan i en båge på enhetscirkeln med medelpunktsvinkeln  $2v$ . Förklaringen kan ligga i transkriberingen från sanskrit till arabiska. I indisk matematik användes sanskritorden *jīva* eller *jya* för kordan i en cirkelbåge, och halva kordan utgör sinus för halva den cirkelbåge som kordan spänner upp. I arabisk matematik skrevs *jīva* med motsvarande arabiska

bokstäver som *jib* (eftersom korta vokaler som *a* inte skrivs ut i arabiskan), och dessa tre bokstäver kom så att läsas som *jaib* (med en annan placering av *a*), ett arabiskt ord med betydelsen 'bröst, barm, hålrum'. Detta arabiska ord översattes sedan till latin av Robert av Chester omkring 1150. Den latinska termen blev då *sinus* med samma betydelse.

## tangens

definition (för en vinkel i en rätvinklig triangel) motstående katet dividerad med närliggande katet



Tangensfunktionen.

kommentar Tangens för en vinkel  $v$  skrivs  $\tan v$ .

Funktionen kan utvidgas till alla reella argument utom  $\pi/2 + k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ , genom att man föreskriver att  $\tan v$  skall vara lika med  $\sin v / \cos v$ . Den blir då en udda funktion med perioden  $\pi$ , dock odefinierad då  $v - \pi/2 \in \pi\mathbf{Z}$ .

etymologi *Tangens* är ett substantiv bildat till latinets *tangere* 'att vidröra, att beröra'. Valet av ord kan förklaras av att  $\tan v$  är längden av den sträcka som vinkelbenen skär av från en tangent till enhetscirkeln.

## trigonometri

definition gren av matematiken som studerar samband mellan vinklar och sträckor i planet och rymden

kommentar Det grundläggande trigonometriska problemet är att beräkna alla sidor och vinklar i en triangel när vissa av dessa är kända. Det handlar då om *plan trigonometri*. I *sfärisk trigonometri*, där både sidor och vinklar är vinklar, behandlas motsvarande problem på en sfär.

historia Hipparkhos (omkring 190 — omkring 125 f.Kr.) konstruerade omkring 150 f.Kr. tabeller med längder av kordor med olika medelpunktsvinklar i en cirkel med given radie. Dessa är, så vitt man vet, de första trigonometriska tabellerna. Kordan för en cirkelbåge med medelpunktsvinkel  $v$  är nämligen lika med cirkelns radie gånger

$2 \sin(v/2)$ . Hipparkhos använde tabellerna vid astronomiska mätningar för att t. ex. bestämma årets längd och avståndet till månen.

Ptolemaíos (omkring 90 — omkring 165) använde omkring år 150 kordatabeller för att visa hur planeterna, solen och månen kretsade runt den stillastående jorden.

Indiska matematiker som Āryabhaṭa (omkring 500 e.Kr.) och Brahmagupta (628) gjorde tabeller för halva kordan, som då i själva verket var sinustabeller.

etymologi Ordet *trigonometri* betyder ursprungligen 'triangelmätning'. Det kommer av grekiskans *trīgōnon* 'triangel, trehörning' och *metreín* 'att mäta'.

### trigonometriska ettan

definition det faktum att kvadraten på sinus plus kvadraten på cosinus alltid är ett

### trigonometrisk funktion

definition någon av funktionerna sinus, tangens och secans eller deras co-funktioner

etymologi Prefixet *co-*, av latinets *con-* 'med-', betyder i detta sammanhang 'avseende komplementvinkeln'.

# 11. Vektorer och matriser

## 11.1. Vektorer

### bas<sub>4</sub>

definition (i ett vektorrum) linjärt oberoende mängd av vektorer sådan att varje element i vektorrummet är en lineärkombination av element i mängden

exempel Mängden  $\{(1, 1), (-2, 3)\}$  är en bas<sub>4</sub> i  $\mathbf{R}^2$ .

### basvektor

definition vektor ingående i en bas

### enhetsvektor

definition vektor med längden 1

kommentar Definitionen förutsätter att ett längdbegrepp är definierat, t. ex. genom att rummet har en norm. Om  $u$  är en godtycklig vektor som inte är noll, så är  $u/\|u\|$  den till  $u$  hörande *normerade vektorn*. Den är en enhetsvektor.

### inre produkt

synonym **skalär produkt**

definition (av vektorerna  $x = (x_1, \dots, x_n)$  och  $y = (y_1, \dots, y_n)$  i  $\mathbf{R}^n$ ) talet  $x_1y_1 + \dots + x_ny_n$

kommentar Den inre produkten betecknas  $x \cdot y$  eller  $\langle x, y \rangle$ . Den angivna definitionen gäller i  $\mathbf{R}^n$ , och där är den inre produkten lika med  $x \cdot y = \|x\|\|y\|\cos v$ , där  $v$  är vinkeln mellan  $x$  och  $y$  och  $\|x\|$  betecknar den euklidiska längden av vektorn  $x$ .

I ett euklidiskt rum existerar den inre produkten enligt axiomen, och formeln ovan kan i stället tjäna till att definiera vinklar:  $v = \arccos(x \cdot y \|x\|^{-1} \|y\|^{-1})$ .

Synonymen *skalär produkt* bör användas med försiktighet så att den inte förväxlas med produkten mellan en skalär och en vektor.

jämför *multiplikation med skalär* s. 256

### komponent

definition vektor som ingår i en summa av vektorer

kommentar Om två icke-parallella vektorer  $a$  och  $b$  i planet är givna, så kan varje vektor  $u$  skrivas som en lineärkombination av dem, alltså  $u = sa + tb$  för några skalärer  $s$  och  $t$ . Man säger då att de två vektorerna  $sa$  och  $tb$  är komponenter i  $u$ .

jämför *summa av två vektorer* s. 258

## lineärkombination

- definition  $\langle$ av två element  $u$  och  $v$  i ett vektorrum $\rangle$  summa av formen  $su + tv$ , där  $s$  och  $t$  är skalärer;  
 $\langle$ av en mängd vektorer  $\{u_j\}$  i ett vektorrum $\rangle$  ändlig summa av formen  $\sum_j s_j u_j$  för skalärer  $s_j$
- kommentar Man säger att lineärkombinationen är *trivial* om alla skalärerna är noll, annars *icke-trivial*.

## lineärt beroende

- definition  $\langle$ om en mängd vektorer $\rangle$  sådan att någon icke-trivial lineärkombination av dem är noll
- kommentar Om motsatsen gäller, alltså att den enda lineärkombinationen som är noll är den där alla ingående skalärer är noll, säges mängden vara *lineärt oberoende*.

## längd hos en vektor

- synonym **storlek hos en vektor**
- definition längden hos en av de riktade sträckor som representerar vektorn
- kommentar I ett vektorrum behöver det inte finnas något längdbegrepp. När ett längdbegrepp finns, så kommer det ofta från en norm, och längden av en vektor  $u$  skrivs då  $\|u\|$ .  
 I t.ex.  $\mathbf{R}^3$  är en vanlig längd den *euklidiska längden*. Vektorn  $x = (x_1, x_2, x_3)$  har då längden  $\|x\|_2$ , lika med den icke-negativa kvadratroten ur  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ .
- exempel En hastighetsvektors längd kallas *fast*. I detta fall mäts alltså längden i meter per sekund.

## motsatt vektor

- definition  $\langle$ till en given vektor $\rangle$  minus den givna vektorn
- kommentar Summan av en vektor och dess motsatta vektor är noll.

## multiplikation med skalär

- definition operation som till en godtycklig vektor och en godtycklig skalär ordnar deras produkt
- kommentar Om vektorn  $v$  representeras av en riktad sträcka  $\vec{ab}$  och skalären är  $t$ , så representeras produkten, betecknad  $tv$ , av den riktade sträckan  $t\vec{ab}$ .  
 Att denna multiplikation existerar ingår i definitionen av ett vektorrum. Det gäller därvid att  $(-1)v + v = (-1 + 1)v = 0v = 0$ .
- jämför *inre produkt* s. 255

## nollvektorn

- definition den vektor som består av alla riktade sträckor  $\vec{aa}$
- kommentar Nollvektorn är det neutrala elementet under addition i ett vektorrum.



## normalvektor

definition (till ett plan) vektor som är vinkelrät mot alla linjer i planet

## normering

definition den operation som till en vektor  $u \neq 0$  ordnar enhetsvektorn  $u/\|u\|$

## norm på ett vektorrum

definition funktion  $x \mapsto \|x\| \in \mathbf{R}$  på vektorrummet sådan att  
 $\|x\| > 0$  för alla vektorer  $x \neq 0$ ;  
 $\|tx\| = |t|\|x\|$  för alla skalärer  $t$  och alla vektorer  $x$ ; och  
 $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  för alla vektorer  $x$  och  $y$

exempel En norm på  $\mathbf{R}^2$  kan definieras genom att för  $p \geq 1$  sätta

$$\|(x, y)\|_p = (|x|^p + |y|^p)^{1/p}, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

För  $p = +\infty$  definierar man  $\|(x, y)\|_\infty = \max(|x|, |y|)$ , lika med gränsvärdet då  $p \rightarrow +\infty$ . Formlerna kan lätt generaliseras till  $\mathbf{R}^n$ . Då  $p = 2$  får man den *euklidiska normen*.

## ortonormerad bas

definition bas<sub>4</sub> sådan att alla basvektorer har längden 1 och att två olika basvektorer är vinkelräta mot varandra

## riktad sträcka

definition geometriskt objekt som består av en sträcka försedd med information om vilken av ändpunkterna som är utgångspunkt

kommentar Man kan kalla en riktad sträcka för en pil. En sträcka  $[a, b]$  ger upphov till två riktade sträckor  $\vec{ab}$  och  $\vec{ba}$  om  $a \neq b$ , svarande mot de två möjliga valen av utgångspunkt. Sträckan  $[a, a]$  motsvaras av blott en riktad sträcka,  $\vec{aa}$ .

## riktningsfält

definition vektorfält där alla vektorer har samma längd

## skalär

definition (när man talar om vektorer) tal

kommentar En skalär kan vara reell eller komplex. I reella vektorrum är termen synonym med *reellt tal*; i komplexa vektorrum med *komplex tal*. Den används för att betona att det inte handlar om en vektor.

Det finns också ett adjektiv *skalär*; substantivet *skalär* är synonymt med *skalär storhet*.

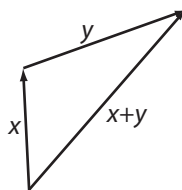
historia Begreppet skalär infördes av W. R. Hamilton omkring år 1845. Det motsvarade då ett reellt tal.

etymologi *Skalär* kommer av franskans *scalaire*, ett adjektiv bildat till latinets *scala* 'trappa'.

## summa av två vektorer

synonym **resultant**

definition vektor som representeras av den riktade sträckan  $\vec{ac}$  i en triangel vars två andra sidor,  $\vec{ab}$  och  $\vec{bc}$ , representerar de två vektorerna



Summan av två vektorer.

kommentar Om vi i  $\mathbf{R}^3$  väljer origo som utgångspunkt för båda sträckorna så ges summan  $u + v$  av två vektorer  $u$  och  $v$  representerade av  $\vec{0x}$  och  $\vec{0y}$  av den riktade sträckan  $\vec{0z}$ , där  $z = x + y$ . Detta motiverar benämningen *summa*.

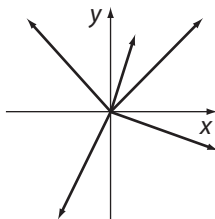
Summan av ändligt många vektorer definieras genom upprepning av denna definition.

I ett vektorrum är summan av två vektorer given axiomatiskt.

jämför *komponent* s. 255

## vektor

definition mängd som består av alla translater av en riktad sträcka



Vektorer.

kommentar Definitionen innebär ledigt uttryckt att en vektor är en pil med en viss längd och en viss riktning, men att man inte bryr sig om pilens placering. Den kan alltså translateras och tilldelas en godtycklig startpunkt. Därför tar man med alla pilar med samma längd och samma riktning i definitionen.

En riktad sträcka säges *representera* den vektor som består av alla translater av denna riktade sträcka. Om  $a$  och  $b$  är två punkter i planet

eller rummet, så är den riktade sträckan  $\vec{ab}$  från  $a$  till  $b$  en representant för den vektor som består av alla riktade sträckor  $\vec{cd}$  från  $c$  till  $d$ , där  $c$  och  $d$  är bilden under en translation (parallellförskjutning) av  $a$  respektive  $b$ .

I  $\mathbf{R}^2$  kan man representera alla vektorer med en punkt  $x = (x_1, x_2)$ , nämligen genom att låta vektorn representeras av den riktade sträckan från origo till  $x$  (man tar alltså origo till utgångspunkt för alla riktade sträckor).

historia Begreppet vektor infördes omkring 1845 av W. R. Hamilton (1805—1865). Det uttrycktes som en trippel av tre reella tal, motsvarande en bestämd längd och en bestämd riktning i rummet.

etymologi Latinets *vector* 'resande, forslande' är ursprunget till ordet *vektor*.

## vektorfält

definition funktion vars värden är vektorer

## vektormultiplikation

definition operation som givet två vektorer  $u$  och  $v$  i det tredimensionella rummet ordnar en tredje,  $w$ , som är vinkelrät mot de två givna och har längden  $\|w\| = \|u\|\|v\|\sin\theta$ , där  $\theta$  är vinkeln mellan  $u$  och  $v$ , och pekar så att, om  $w$  inte är noll,  $u$ ,  $v$  och  $w$  utgör basvektorerna ett positivt orienterat koordinatsystem

kommentar Det följer av definitionen att vektorprodukten av två parallella vektorer är lika med nollvektorn.

Vektorprodukten av  $u$  och  $v$  brukar betecknas  $u \times v$ .

jämför *inre produkt* s. 255

## vektor parallell med en rät linje

definition vektor som har en representant som ligger i linjen

## vektor parallell med ett plan

definition vektor som har en representant som ligger i planet

## vektorrum

synonym **lineärt rum**

definition mängd vars element kan adderas och multipliceras med reella tal så att vanliga räkneregler gäller

kommentar En mer precis definition är: abelsk grupp försedd med en multiplikation med skalär som uppfyller  $1u = u$  för alla vektorer  $u$ ,  $(st)u = s(tu)$  för alla skalärer  $s, t$  och alla vektorer  $u$ , och är sådan att de två distributiva lagarna  $(s + t)u = st + tu$  och  $s(u + v) = su + sv$  gäller. Skalärerna kan vara reella eller komplexa.

exempel Ett viktigt exempel på vektorrum är  $\mathbf{R}^2$  med additionen definierad av  $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ ,  $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2$  och multiplikationen med skalär av  $t(x_1, x_2) = (tx_1, tx_2)$ ,  $t \in \mathbf{R}$ ,  $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ . Allmännare är varje  $\mathbf{R}^n$  med  $n \in \mathbf{N}$  ett vektorrum om man gör motsvarande definitioner.

## vinkeln mellan två vektorer

- definition** vinkeln mellan två representerande riktade sträckor som har samma utgångspunkt
- kommentar** I ett euklidiskt rum uppfyller vinkeln  $v$  mellan två vektorer  $x$  och  $y$  ekvationen  $x \cdot y = \|x\|\|y\| \cos v$ , där  $\|x\|$  och  $\|y\|$  är vektorernas längder.

## 11.2. Matriser

### determinant

- definition**  $\langle$ till en  $(2 \times 2)$ -matris  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  $\rangle$  talet  $ad - bc$ ;  
 $\langle$ till en kvadratisk matris med  $n$  rader $\rangle$  talet

$$\sum_p \operatorname{sgn}(p) a_{1,p(1)} a_{2,p(2)} \cdots a_{n,p(n)},$$

där summan går över alla permutationer  $p$  av mängden  $\{1, 2, \dots, n\}$  och där  $\operatorname{sgn}(p) = 1$  om antalet inversioner i permutationen är jämnt,  $\operatorname{sgn}(p) = -1$  om antalet inversioner är udda

- kommentar** Ett ekvationssystem  $ax + by = r$ ,  $cx + dy = s$  har exakt en lösning  $(x, y)$  om och endast om determinanten  $ad - bc$  är skild från noll. På samma sätt har ett ekvationssystem  $\sum_k a_{jk} x_k = y_j$  med lika många ekvationer som obekanta exakt en lösning om och endast om  $\det(a_{jk}) \neq 0$ . Detta förklarar determinanternas betydelse för lineära ekvationssystem.

Geometriskt betyder determinanten i två dimensioner en area räknad med tecken; i tre dimensioner en volym:  $\det(a_{jk})$  är volymen med tecken av parallelepiped

$$\left\{ t_1(a_{11}, a_{21}, a_{31}) + t_2(a_{12}, a_{22}, a_{32}) + t_3(a_{13}, a_{23}, a_{33}) \in \mathbf{R}^3; \right. \\ \left. t_1, t_2, t_3 \in [0, 1] \right\}.$$

Formeln  $\det(AB) = (\det A)(\det B)$  gäller för alla kvadratiska matriser  $A$  och  $B$  sådana att produkten har mening.

- exempel** Två vektorer  $(a, b)$  och  $(c, d)$  i  $\mathbf{R}^2$  bestämmer en parallelogram med hörn i  $(0, 0)$ ,  $(a, b)$ ,  $(c, d)$  och  $(a + c, b + d)$ . Dess area är lika med absolutbeloppet av determinanten  $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$ . Triangeln med hörn i  $(0, 0)$ ,  $(a, b)$ ,  $(c, d)$  har hälften så stor area.
- etymologi** Ordet *determinant* kommer av det latinska verbet *determinare* 'att begränsa, att utstaka, att bestämma'.

### egenvektor

- definition**  $\langle$ till en linjär operator  $f$  som avbildar ett vektorrum in i samma vektorrum $\rangle$  vektor  $x \neq 0$  sådan att den är parallell med  $f(x)$

kommentar Det tal  $c$  sådant att  $f(x) = cx$  kallas *egenvärde* hörande till egenvektorn  $x$ .

Rummet  $\{x; f(x) = cx\}$  kallas det till egenvärdet  $c$  hörande **egenrummet**. Varje element skilt från noll i egenrummet är en egenvektor.

jämför *egenvärde* s. 261

## egenvärde

definition (hos en linjär operator  $f$  som avbildar ett vektorrum in i samma vektorrum) tal  $c$  sådant att  $f(x) = cx$  för någon vektor  $x \neq 0$

kommentar En vektor  $x \neq 0$  sådan att  $f(x) = cx$  kallas *egenvektor* hörande till egenvärdet  $c$ .

Om  $f$  ges av en kvadratisk matris  $A = (a_{jk})$ , d.v.s. om  $f(x)_j = \sum_k a_{jk}x_k$ , så säger man att talet  $c$  är ett egenvärde till matrisen  $A$ . Det inträffar om och endast om  $A - cI$  har determinanten noll, där  $I$  är enhetsmatrisen.

exempel En kvadratisk matris som har elementen  $c_1, \dots, c_n$  på diagonalen och nollor under diagonalen har egenvärdena  $c_1, \dots, c_n$ .

jämför *egenvektor* s. 260

## enhetsmatris

definition kvadratisk matris med ettor på huvuddiagonalen och nollor på alla övriga platser

## invers matris

definition (till en given matris) matris som när den multipliceras med den givna matrisen ger enhetsmatrisen

## matris

definition rektangulärt schema

kommentar Om matrisen har  $m$  rader och  $n$  kolonner (spalter) så innehåller den alltså  $mn$  element. Den kallas då en  $(m \times n)$ -matris. Det element som står på **rad** nummer  $j$  och i **kolonn** (**spalt**) nummer  $k$  betecknas till exempel  $a_{j,k}$  eller  $a_{jk}$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

Elementen  $a_{jj}$ ,  $j = 1, \dots, m \wedge n$ , bildar **huvuddiagonalen**.

Om  $m = n$ , så kallas matrisen **kvadratisk**.

exempel En  $(2 \times 2)$ -matris kan skrivas

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

En  $(m \times n)$ -matris kan skrivas

$$A = (a_{jk}) = (a_{jk})_{j=1k=1}^{m \quad n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Varje linjär avbildning av  $\mathbf{R}^n$  in i  $\mathbf{R}^m$  ges av en matris: till  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  finns en unik matris  $A = (a_{jk})$  sådan att  $y = f(x)$  om och endast om  $y_j = \sum_k a_{jk}x_k$ . Sammansättning av avbildningar motsvarar därvid multiplikation av matriserna.

historia Det moderna begreppet matris infördes 1850 av James Joseph Sylvester (1814–1897). Uppställning av tal i matrisliknande form för lösning av ekvationssystem kan härledas flera tusen år bakåt i tiden till kinesisk och babylonisk matematik.

etymologi Ordet *matris* kommer från latinets *mater* 'mor, livmoder', mera allmänt 'källa, ursprung, orsak'; i genitiv *matris*. Betydelsen 'rektangulärt schema' kan härledas från betydelsen 'ursprung' genom att man i tryckerier har en matris, en rektangulär metallram, som är ursprunget till den tryckta texten.

## matrisaddition

definition operation som till två givna matriser ordnar deras summa

kommentar Matriserna måste vara av samma typ för att additionen skall kunna utföras.

## matrismultiplikation

definition operation som till två givna matriser ordnar deras produkt

kommentar Matrismultiplikationen är associativ men inte kommutativ.

exempel

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

## matrisprodukt

definition  $\langle$ av två matriser  $A = (a_{ij})_{i=1}^m \text{ }_{j=1}^n$  och  $B = (b_{jk})_{j=1}^n \text{ }_{k=1}^p$  $\rangle$  matrisen  $AB = C = (c_{ik})_{i=1}^m \text{ }_{k=1}^p$ , där  $c_{ik} = \sum_j a_{ij}b_{jk}$

kommentar Produkten är definierad endast om antalet kolonner i  $A$  är lika med antalet rader i  $B$ .

exempel

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix}.$$

## matrissumma

definition  $\langle$ av två matriser  $A = (a_{jk})_{j=1}^m \text{ }_{k=1}^n$  och  $B = (b_{jk})_{j=1}^m \text{ }_{k=1}^n$  $\rangle$  matrisen  $A + B = C = (c_{jk})_{j=1}^m \text{ }_{k=1}^n$ , där  $c_{jk} = a_{jk} + b_{jk}$

kommentar Summan är definierad endast om antalet rader och kolonner i  $A$  är lika med motsvarande antal i  $B$ .

## multiplikation av matris med skalär

definition operation som till en matris och ett tal ordnar deras produkt

## produkt av matris och skalär

definition (givet en matris  $A = (a_{jk})$  och ett tal  $t$ ) matrisen  $tA = (ta_{jk})$

## transponat

definition (till matrisen  $A = (a_{jk})$ ) matrisen  $B = (b_{jk})$  där  $b_{jk} = a_{kj}$

kommentar Transponatet uppkommer genom att man speglar matrisen i dess huvuddiagonal. En vanlig beteckning för transponatet till  $A$  är  $A^T$ .

## transponera

definition bilda transponatet till en matris

etymologi Ordet *transponera* kommer från latinets *transponere* 'att överflytta'.

## typ av matris

definition talpar som anger antalet rader och antalet kolonner i en matris

kommentar En matris med två rader och tre kolonner kallas för en  $(2 \times 3)$ -matris. Den representerar en linjär avbildning från  $\mathbf{R}^3$  till  $\mathbf{R}^2$ .

## 12. Sannolikhetslära

### 12.1. Slumpförsök

#### beroende händelser

- definition** händelser där den ena händelsens sannolikhet påverkas av om den andra händelsen inträffat eller ej
- exempel** Händelsen att dra en dam från en kortlek påverkas av att man tidigare dragit en dam utan att lägga tillbaka den.
- jämför** *betingad sannolikhet* s. 266, *oberoende händelser* s. 265

#### de stora talens lag

- definition** den sats inom sannolikhetsteorin som säger att det aritmetiska medelvärdet av ett stort antal oberoende observationer av en slumpvariabel ligger nära variabelns väntevärde

#### disjunkta händelser

- synonym** **oförenliga händelser**
- definition** händelser som inte kan inträffa tillsammans
- kommentar** Om händelserna betraktas som mängder innebär detta att dessa är disjunkta, och således att  $A \cap B = \emptyset$ . För sådana händelser gäller att  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .
- exempel** Händelserna *ruter* och *hjärter* kan inte inträffa tillsammans då man drar kort ur en kortlek, till skillnad från händelserna *ruter* och *kung*.

#### elementarhändelse

- definition** händelse som består av ett enda utfall
- exempel** Vid kast med tärning finns sex elementarhändelser.

#### försök

- definition** undersökning under kontrollerade former

#### gynnsamt utfall

- definition** (vid ett slumpmässigt försök) det eller de utfall av försökets möjliga utfall som man vill uppmärksamma

#### händelse

- definition** (i sannolikhetsläran) mängd möjliga utfall i ett slumpmässigt försök
- exempel** Fyra kort skall slumpmässigt dras ur en kortlek. Exempel på händelser är *alla fyra korten är ess*; *endast hjärter*; *stege*.  
En fotbollsmatch kan i tipssammanhang sluta på tre olika sätt, nämligen med utfallen *hemmavinst*, *oavgjort* och *bortavinst*. Händelsen *minst oavgjort för hemmalaget* består av de två utfallen *hemmavinst* och *oavgjort*.



**komplementhändelse**

definition (med avseende på en given händelse) mängden av utfall som inte ingår i den givna

**oberoende händelser**

definition händelser som bestäms av slumpen och där sannolikheten för en av händelserna inte ändras om den andra händelsen råkar inträffa

exempel En tärning kastas två gånger. Resultatet av det andra kastet påverkas inte av resultatet av det första (eller tvärtom). Man tänker sig förstås att tärningen inte blivit skadad vid det första kastet.

jämför *beroende händelser* s. 264

**slumpförsök**

synonym **slumpmässigt försök**

definition händelse som har minst två möjliga utfall och där det är omöjligt att i förväg säga vilket som kommer att inträffa

kommentar Försöket skall kunna upprepas under i stort sett samma omständigheter. Som slumpförsök räknas också observerandet av ett slumpmässigt skeende.

exempel Kast med tärning.  
Dragning ur en väl blandad kortlek.

**utfall**

definition möjligt resultat av ett slumpmässigt försök

exempel Vid kast med en vanlig tärning är sex olika utfall möjliga: *etta, tvåa, trea, fyra, femma* och *sexa*.

jämför *elementarhändelse* s. 264, *händelse* s. 264

**utfallsrum**

definition mängden av alla utfall som är möjliga vid ett slumpmässigt försök

kommentar Värdena kan t. ex. vara heltal eller reella tal.

En händelse  $A$  motsvarar en delmängd av utfallsrummet och kan uppfattas som denna delmängd; alltså, om utfallsrummet betecknas  $\Omega$ ,  $A \subset \Omega$ . Då är  $\emptyset$  den omöjliga händelsen, och  $P(\emptyset) = 0$ . Hela utfallsrummet  $\Omega$  är den säkra händelsen, och  $P(\Omega) = 1$ . Vidare betecknar  $\bar{A} = \Omega \setminus A$  händelsen att  $A$  inte inträffar.

Om  $A$  och  $B$  är händelser, så innebär  $A \cup B$  att minst en av  $A$  eller  $B$  inträffar;  $A \cap B$  att både  $A$  och  $B$  inträffar; och  $A \setminus B$  att  $A$  men inte  $B$  inträffar.

**12.2. Sannolikhet****additionslagen för sannolikheter**

definition den lag som säger att  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$  för godtyckliga händelser  $A$  och  $B$

## betingad sannolikhet

**definition** sannolikheten för en händelse under förutsättning att en annan händelse har inträffat

**jämför** *beroende händelser* s. 264

## binomialfördelning

**definition** diskret sannolikhetsfördelning bestämd av  $P(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ , för något positivt heltal  $n$  och något  $p \in ]0, 1[$

**kommentar** Denna sannolikhetsfördelning ger sannolikheten för det antal gånger en händelse kan inträffa vid  $n$  oberoende upprepningar av ett slumpmässigt försök där händelsen antingen inträffar eller inte inträffar, och  $p$  är sannolikheten att händelsen inträffar.

**exempel** En tärning kastas tio gånger. Antalet sexor ( $k = 0, 1, \dots, 10$ ) blir då binomialfördelat med  $n = 10$  och  $p = 1/6$ .

## centrala gränsvärdessatsen

**definition** den sats som i sin enklaste form säger att om man adderar flera slumpvariabler med en och samma sannolikhetsfördelning med ändlig varians, så kommer summan att gå mot en normalfördelning

**kommentar** Mera precist säger satsen att om  $X_1, X_2, \dots$  är en oändlig följd av oberoende och likafördelade slumpvariabler med väntevärde  $\mu$  och standardavvikelse  $\sigma > 0$ , så går sannolikheten för att

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

skall ligga i intervallet  $]a, b[$  mot  $\Phi(b) - \Phi(a)$  då  $n \rightarrow +\infty$ . Här betecknar  $\Phi$  fördelningsfunktionen för en standardiserad normalfördelning.

## exponentialfördelning

**definition** kontinuerlig fördelning med täthetsfunktion  $f(x) = \beta e^{-\beta x}$ ,  $x > 0$ , för någon positiv konstant  $\beta$

**kommentar** En sådan sannolikhetsfördelning kan användas för att t. ex. beskriva livslängden hos objekt eller tidsavståndet mellan företeelser.

## fördelningsfunktion

**definition** (till en slumpvariabel  $X$ ) den funktion  $F$  som för ett reellt tal  $x$  ger sannolikheten  $F(x)$  för att  $X$  skall anta värden som är mindre än eller lika med  $x$

**kommentar** Fördelningsfunktionen för en slumpvariabel  $X$  ges alltså av en formel  $F(x) = P(X \leq x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .

En fördelningsfunktion har följande egenskaper

(a) den är växande:  $x \leq y$  medför  $F(x) \leq F(y)$ ;

(b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ ;

(c) den är högerkontinuerlig:  $F_h = F$ , där

$$F_h(x) = \lim_{\substack{y > x \\ y \rightarrow x}} F(y), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Omvänt är varje funktion som uppfyller (a), (b), (c) fördelningsfunktionen för någon slumpvariabel.

## korrelationskoefficient<sub>1</sub>

**definition** (mellan två slumpvariabler) kovariansen dividerad med produkten av variablernas standardavvikelse

**kommentar** Ett samband mellan två slumpvariabler kan vara positivt: ett större värde på ena variabeln tenderar att ge ett större värde på den andra variabeln. Det kan vara negativt: ett större värde på den ena variabeln svarar mot ett mindre värde på den andra variabeln. Storleken av sambandet och dess tecken kan uttryckas med korrelationskoefficienten.

Korrelationskoefficienten kan anta värden mellan  $-1$  och  $1$ . Värdet  $-1$  betyder ett negativt fullständigt affint (lineärt<sub>2</sub>) samband. Då värdet är  $0$  kallas variablerna okorrelerade (nollkorrelation). Värdet  $1$  betyder ett positivt fullständigt affint (lineärt<sub>2</sub>) samband mellan variablerna.

**etymologi** Ordet *korrelation* kommer från medeltidslatinets *correlatio* 'inbördes förhållande', av *con-* 'med-, sam-' och *relatio* 'förhållande'.

**jämför** *korrelationskoefficient*<sub>2</sub> s. 276

## kovarians

**definition** (av två variabler) väntevärdet av produkten av variablernas avvikelser från deras väntevärde

**kommentar** Kovariansen  $\text{cov}(X, Y)$  är ett mått på sambandet mellan två variabler  $X$  och  $Y$ . Definitionen innebär i formler att

$$\text{cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))),$$

där  $E(X)$  är väntevärdet av variabeln  $X$ .

**etymologi** *Kovarians* kommer av latinets *con-* 'med-, sam-' och *variare* 'att skifta, att förändras, att vara olika'.

## likformig sannolikhetsfördelning

**definition** fördelning som ger samma sannolikhet till alla möjliga utfall

**kommentar** I det kontinuerliga fallet är täthetsfunktionen konstant för de möjliga utfallen

## Monte-Carlo-metod

**definition** en av flera simuleringsalgoritmer som utnyttjar generering av slump-tal

**kommentar** Monte-Carlo-metoder används för att simulera system i naturen. Sådana system kan vara alltför komplicerade för deterministiska beräkningar, varför slumpmängdsgeneratorer kommer till användning.

**etymologi** Monte-Carlo-metoderna är uppkallade efter kasinot i Monte Carlo.

## normalfördelning

**definition** kontinuerlig sannolikhetsfördelning på de reella talen med täthetsfunktionen

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right), \quad x \in \mathbf{R},$$

för några tal  $\mu \in \mathbf{R}$  (väntevärdet) och  $\sigma > 0$  (standardavvikelsen).

**kommentar** En normalfördelning säges vara *standardiserad* om väntevärdet  $\mu$  är noll och standardavvikelsen  $\sigma$  är ett.

**exempel** I naturen är mycket nästan normalfördelat, till exempel vuxna kvinnors längd, blodtrycket hos friska personer och havens salthalt.

## odds i bestämd form *oddset*

**definition** ⟨för en händelse⟩ kvoten mellan sannolikheten för komplementhändelsen och sannolikheten för händelsen

**kommentar** Definitionen innebär att oddset för en händelse  $A$  är lika med  $(1 - P(A))/P(A)$ . En osannolik händelse har ett högt odds.

Inom statistiken brukar man tvärtom definiera oddset som  $P(A)/(1 - P(A))$ . En osannolik händelse har då ett lågt odds.

Inom vadhållning definieras oddset som kvoten mellan vinsten och insatsen, vilket gör att en subjektiv bedömning av sannolikheten kommer in i övervägandena. En osannolik vinnare ger hög utdelning.

## Poissonfördelning

**definition** diskret<sub>2</sub> sannolikhetsfördelning

$$P(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k \in \mathbf{N},$$

för något  $\lambda > 0$

**kommentar** Poissonfördelningar förekommer bl. a. där många oberoende händelser kan inträffa, var och en med liten sannolikhet. Totalantalet blir då approximativt Poissonfördelat.

**exempel** Antalet svenskar som dör i singelolyckor i trafiken ett visst år.

Antalet skogsbränder.

Antalet jordskalv.

**etymologi** Fördelningen är uppkallad efter Siméon Denis Poisson (1781–1840).

## sannolikhet

**definition** ⟨för en händelse⟩ tal mot vilket den relativa frekvensen<sub>2</sub> konvergerar när antalet oberoende försök växer

- exempel En fotbollsmatch kan i tipssammanhang sluta på tre sätt: *hemmavinst*, *oavgjort* och *bortavinst*. De tre utfallen är inte likvärdiga; hemmavinst är sannolikare än vart och ett av de två andra utfallen. I en undersökning av 1 000 matcher fann man att 423 slutade med hemmavinst, 235 med oavgjort och 342 med bortavinst. Frekvensdefinitionen ger alltså följande ungefärliga sannolikheter:  $P(\text{hemmavinst}) \approx 0,423$ ,  $P(\text{oavgjort}) \approx 0,235$  och  $P(\text{bortavinst}) \approx 0,342$ .
- Ofta resonerar man i en teoretisk modell; t. ex. antar man att alla tärningar är perfekta så att sannolikheten för att en tärning skall visa en viss sida uppåt är exakt en sjättedel.
- etymologi *P* kommer av det latinska ordet för sannolikhet, *probabilitas*. Jämför med engelskans *probability* och franskans *probabilité*.

## sannolikhetsfunktion

- definition (för en diskret<sub>2</sub> slumpvariabel) funktion som anger sannolikheten för att variabeln skall anta ett visst värde
- kommentar Definitionen innebär i formler att  $p(x) = P(X = x)$ , där  $p$  är sannolikhetsfunktionen och  $X$  slumpvariabeln.

## sannolikhetsfördelning

- definition de olika utfall som är möjliga vid ett slumpmässigt försök tillsammans med sannolikheterna för dem
- kommentar En sannolikhetsfördelning preciserar slumpstrukturen i ett slumpförsök. Med sannolikhetsfördelningen kan man beräkna sannolikheten för en godtycklig händelse.

En sannolikhetsfördelning kallas *diskret<sub>2</sub>* om slumpvariabeln bara kan anta ett uppräkneligt antal värden. Det inträffar om och endast om dess fördelningsfunktion är en språngfunktion. En sådan sannolikhetsfördelning kan anges med sin sannolikhetsfunktion eller sin fördelningsfunktion. Språngpunkterna kan ligga tätt, och bildar i så fall inte en diskret<sub>1</sub> mängd. (Enligt en äldre definition kallades en sannolikhetsfördelning *diskret* om slumpvariabelns värden bildade en diskret<sub>1</sub> mängd.)

En sannolikhetsfördelning kallas *kontinuerlig* om dess fördelningsfunktion är kontinuerlig. Denna har då inga språng. En sannolikhetsfördelning som kan ges av en täthetsfunktion är kontinuerlig, men inte omvänt.

Varje fördelningsfunktion är summan av en kontinuerlig fördelningsfunktion och en språngfunktion.

- jämför *diskret<sub>1</sub>* s. 176

## sannolikhetslära

- synonym **sannolikhetskalkyl**
- definition läran om modeller för slumpmässiga försök och om hur modellerna används

**historia** Historiskt sett går sannolikhetsläran tillbaka till 1500-talets Italien och 1600-talets Frankrike. Sannolikhetslära förekommer i Pierre de Fermats (1601?–1665) och Blaise Pascals (1623–1662) arbeten. Pierre Simon de Laplace (1749–1827) brukar dock betraktas som dess grundläggare.

## slumpvariabel

**synonym** **stokastisk variabel**

**definition** variabel för vilken de utfall som observeras är resultatet av slumpmässiga försök eller uppfattas som bestämda av slumpen

**etymologi** Ordet *stokastisk* kommer av det grekiska *stokhastikós* 'duktig på att gissa', av verbet *stokházeithai* 'att gissa, att mäta'.

## standardavvikelse hos en sannolikhetsfördelning

**definition** den icke-negativa kvadratroten ur variansen av sannolikhetsfördelningen

## träddiagram

**definition** diagram som med hjälp av förgreningar, ibland i flera steg, visar olika utfall och deras sannolikheter

**kommentar** Flerstegsförsök kan redovisas i ett träddiagram. Sannolikheten för en gren är då produkten av sannolikheterna längs grenen.

**jämför** *multiplikationsprincipen* s. 107

## täthetsfunktion

**definition** ⟨för en kontinuerlig slumpvariabel⟩ funktion som anger sannolikheten för att variabeln skall anta värden inom en viss mängd

**kommentar** Definitionen innebär i formler att  $\int_A f(x)dx = P(X \in A)$ , där  $f$  är täthetsfunktionen och  $X$  slumpvariabeln. För att detta skall ha mening, måste  $f$  vara integrabel och  $A$  mätbar.

Det finns kontinuerliga slumpvariabler som inte har en täthetsfunktion.

## varians hos en sannolikhetsfördelning

**definition** väntevärde av den kvadratiska avvikelser från fördelningens väntevärde

**kommentar** Om en slumpvariabel  $X$  antar värdena  $x_1, x_2, \dots$  med respektive sannolikheter  $p(x_1), p(x_2), \dots$ , så definieras variansen hos  $X$ , skriven  $\sigma^2$  eller  $V(X)$ , som

$$\sigma^2 = E[(X - E(X))^2] = \sum_j (x_j - E(X))^2 p(x_j)$$

förutsatt att summan är väldefinierad.

**etymologi** *Varians* kommer av det latinska verbet *variare* 'att skifta, att vara olika'.

jämför      *varians hos ett slumpmässigt urval* s. 279

## väntevärde

synonym    **förväntat värde, matematisk förväntan**

definition    (av en sannolikhetsfördelning) tyngdpunkt

kommentar    Om en slumpvariabel  $X$  antar värdena  $x_1, x_2, \dots$ , med respektive sannolikheter  $p(x_1), p(x_2), \dots$ , så definieras väntevärdet för  $X$ , skrivet  $E(X)$ , som

$$E(X) = \sum_{j=1}^n x_j p(x_j)$$

förutsatt att det är väldefinierat.

Väntevärdet för en kontinuerlig slumpvariabel med täthetsfunktion  $f$  ges av integralen  $\int_{\mathbf{R}} xf(x)dx$ , förutsatt att integralen existerar.

etymologi    Symbolen  $E$  kommer av det engelska ordet *expectation* 'förväntan'.

## 13. Statistik

### 13.1. Diagram och tabeller

#### ackumulerat stapeldiagram

definition stapeldiagram där varje stapels höjd är proportionell mot andelen observationer mindre eller lika med angivet värde

#### areadiagram

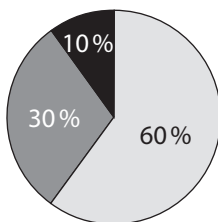
definition diagram där jämförelser görs med hjälp av areor

exempel Cirkeldiagrammet.

#### cirkeldiagram

synonym **tårtdiagram**

definition areadiagram i form av en cirkelskiva indelad i olika sektorer där varje sektor motsvarar en klass och där varje sektors medelpunktsvinkel är proportionell mot klassens relativa frekvens



Cirkeldiagram.

kommentar Cirkelsektorernas medelpunktsvinklar anger andelen eller frekvensen hos en variabel; 100% motsvarar 360°. Cirkeldiagram är speciellt lämpade för kategoriska variabler.

exempel I en undersökning svarar 300 av 500 intervjuade *Ja* på en viss fråga, medan 150 svarar *Nej* och resten, 50, svarar *Vet inte*. De tre talen 300, 150 och 50 kan representeras av cirkelsektorer vilkas medelpunktsvinklar (216°, 108°, 36°) är proportionella mot talen.

#### diagram

definition figur med ett statistiskt material eller en fördelning

exempel Cirkeldiagram, histogram, stapeldiagram, stolpdigram.

etymologi Ordet *diagram* kommer av grekiskans *diá* 'genom' och *grámma*, verbalsubstantiv till *gráphein* 'att skriva, att rita'. *Diágramma* betyder allt som är tecknat: 'ritning, teckning, figur (särskilt geometrisk)'. Man kan uppfatta *diágramma* som substantiv till *diágráphein* 'att teckna av'.

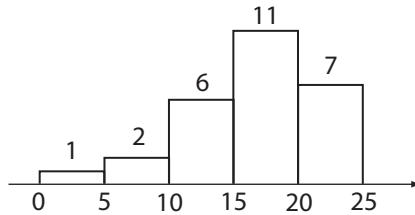


## frekvenstabell

- definition tabell som visar frekvensfördelningen för en eller flera variabler
- kommentar Redovisas bara en variabel, så talar man om *envägstabelle* eller *envägsindelad tabell*. Om flera variabler redovisas, så talar man om *flervägstabelle* eller *flervägsindelad tabell*.

## histogram

- definition diagram för ett klassindelad numeriskt statistiskt material bestående av stående eller liggande rektanglar



Histogram.

- kommentar Varje rektangel har en bas, oftast proportionell mot klassbredden, och en höjd proportionell mot frekvensen<sub>2</sub> för klassen. Om staplarna har samma bredd, vilket är önskvärt, så är areorna proportionella mot höjderna.

En stapel i ett histogram inkluderar i allmänhet flera olika observationsvärden, medan en stapel i ett stapeldiagram svarar mot ett enda observationsvärde.

- etymologi Ordet *histogram* kommer av de grekiska orden *histós* 'vävnad' och *grámma* 'ritning'.
- jämför *klassindelning* s. 281, *stapeldiagram* s. 274, *stolpdigram* s. 275

## korstabell

- definition tabell för ett statistiskt material som är resultatet av en samtidig klassificering efter två eller flera indelningsgrunder (variabler) med minst två nivåer för varje indelningsgrund

## låddiagram

- synonym **boxplot**
- definition diagram för ett statistiskt material som visar den minsta observationen, den undre kvartilen, medianen, den övre kvartilen och den största observationen
- historia Låddiagrammet är en uppfinning av John W. Tukey (1915–2000). Se figur på sidan 274..



Låddiagram.

## punktdiagram

synonym **spridningsdiagram**

definition diagram som illustrerar samband mellan två variabler och där paren av observationer presenteras som punkter i ett koordinatsystem

## stam-blad-diagram

definition tabell där de numeriska observationerna klassindelats och observationerna inom respektive klass skrivs ut på en rad

1	2	7	2				
1	3	7	3	7	4		
1	4	3	5	1	3	1	9
1	5	0	1	4			
1	6	5					

Stam-blad-diagram över ett datamaterial med observationerna 143, 137, 150, 165, 127, 133, 137, 151, 145, 134, 141, 154, 143, 141, 149, 122.

kommentar Stam-blad-diagram är lämpade för mindre datamaterial och görs för hand för att få överblick.

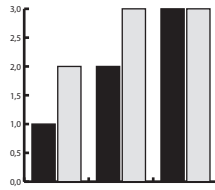
historia Stam-blad-diagrammet infördes i slutet av 1970-talet av John W. Tukey (1915–2000).

## stapeldiagram

definition diagram som består av rektanglar med lika stora baser och med höjder som är proportionella mot frekvenserna<sub>2</sub>

kommentar Ett statistiskt material som inte består av tal åskådliggörs ofta i stapeldiagram, varvid man ritar staplar vilkas höjder är proportionella mot frekvensen<sub>2</sub> för de olika observationsresultaten. Staplarna skall vara lika breda och helst ritas med mellanrum.

jämför *histogram* s. 273, *stolpdiagram* s. 275



Stapelldiagram som visar två olika datamaterial.

## stolpdiagram

- definition** diagram som består av ett antal sträckor vilkas längder är proportionella mot variabelernas värden
- kommentar** Stolpdiagram används för diskreta<sub>2</sub> numeriska data, oftast med högst tio olika värden. Stolparna saknar då bredd. Om man har för många stolpar kan man klassindela materialet, vilket ger ett histogram.
- jämför** *histogram* s. 273, *stapelldiagram* s. 274

## tabell

- definition** uppställning som är ordnad i rader och kolonner

## 13.2. Statistiska mått

### bastal

- definition** (vid indexberäkning) tal som man jämför övriga tal med

### basår

- definition** (vid indexberäkning) år som man har som utgångspunkt vid jämförelser av någon storhet

### frekvens<sub>2</sub>

- definition** det antal gånger ett tal förekommer i en mängd av observationer
- kommentar** Termen kan också avse antalet observationer i en viss klass av observationer.  
Om man vill betona att det inte handlar om den relativa frekvensen, så kan man säga *absolut frekvens*.
- exempel** Fyra av de elever som deltar i ett prov får 15 poäng. Observationen 15 förekommer alltså 4 gånger. Frekvensen för observationen 15 är 4.
- jämför** *frekvens<sub>1</sub>* s. 71, *relativ frekvens* s. 278, *kumulativ frekvens* s. 277

### frekvensfördelning

- definition** de olika variabelvärden som förekommer i ett statistiskt material tillsammans med frekvenserna för dessa

## förändringsfaktor

synonym	<b>tillväxtfaktor</b>
definition	faktor som anger relativ förändring
kommentar	I stället för <i>förändringsfaktor</i> används ibland ordet <b>tillväxtfaktor</b> ; man får då acceptera att en minskning kallas tillväxt, nämligen en negativ tillväxt.
exempel	Befolkningen i en avfolkningsbygd är 50 000, men den minskar varje år med 2 procent. Förändringsfaktorn är $100\% - 2\% = 98\% = 0,98$ . Befolkningen efter 1 år är $50\,000 \times 0,98 = 49\,000$ . Efter 2 år är den $50\,000 \times 0,98^2 = 48\,020$ , och efter 3 år är den nere i $50\,000 \times 0,98^3 \approx 47\,060$ .
jämför	<i>jämförelsefaktor</i> s. 276

## indexserie

definition	följd av indextal som visar olika världens relativa storlek i förhållande till ett utvalt bastal
------------	--

## indextal

synonym	<b>indexvärde</b>
definition	tal som jämförs med ett bastal
kommentar	Ofta räknar man indextalet i procent av bastalet.
exempel	Konsumentprisindex är ett tal som visar konsumentpriserna på en grupp varor och tjänster.

## jämförelsefaktor

definition	faktor som anger hur många gånger större en storhet är jämfört med en annan
jämför	<i>förändringsfaktor</i> s. 276

## konfidensgrad

definition	(hos ett givet intervall) grad som specificerar hur troligt det är att intervallet innehåller det sökta värdet
------------	--

## konsumentprisindex

definition	mått på prisnivån ett visst år relativt ett basår
kommentar	Konsumentprisindex är ett index som är sammansatt av prisindex för ett antal huvudgrupper av varor och tjänster. Det publiceras av Statistiska centralbyrån, som också väljer basår. Konsumentprisindex används för att mäta den inflation eller deflation som en konsument råkar ut för.

## korrelationskoefficient<sub>2</sub>

definition	(för ett tvådimensionellt statistiskt material) samvariation mellan två variabler $x$ och $y$ i materialet definierad som
------------	---

$$\frac{\sum(x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y})}{\sqrt{\sum(x_j - \bar{x})^2} \sqrt{\sum(y_j - \bar{y})^2}}$$

- kommentar** Korrelationskoefficienten kan vara positiv, noll eller negativ och ligger alltid mellan  $-1$  och  $1$ . Existensen av en korrelation medför inte att det finns ett orsakssamband mellan variablerna, även om det kan vara så. Ibland kan den allmänna termen *korrelation* användas för korrelationskoefficienten.
- exempel** Det finns ett positivt samband mellan längd och vikt hos nyfödda: långa barn väger i allmänhet mer än korta barn.
- jämför** *korrelationskoefficient*<sub>1</sub> s. 267

## kumulativ frekvens

- synonym** **kumulerad frekvens**
- definition** (för ett angivet värde) antalet observationer som är mindre än eller lika med värdet
- etymologi** *Kumulerad* kommer av det latinska ordet *cumulare* 'att hopa, att lägga på hög'.
- jämför** *frekvens*<sub>2</sub> s. 275

## kvantil

- synonym** **fraktil**
- definition** tal som delar in ett statistiskt material i två delar med avseende på observationernas storlek
- kommentar** Varje kvantil är ett lägesmått. De vanligaste kvantilerna är medianen och kvartilerna.
- etymologi** Ordet *fraktil* är baserat på latinets *fractus* 'sönderbruten'; jämför *fraktal*.

## kvartil

- definition** (för ett storleksordnat statistiskt material) ett av de tre variabelvärden som, såvitt möjligt, delar upp materialet i fyra lika stora delar
- kommentar** Det finns alltså tre kvartiler, den **första**, **nedre** eller **undre kvartilen**; den andra kvartilen, som är lika med medianen; den övre eller tredje kvartilen. Den första kvartilen är således större än 25 % och mindre än 75 % av observationsvärdena när dessa är ordnade i storleksordning – med lämplig modifiering om det inte finns något sådant värde eller om det finns flera sådana värden.
- etymologi** Ordet *kvartil* är baserat på latinets *quartus* 'fjärde'.
- jämför** *kvantil* s. 277, *låddiagram* s. 273, *median*<sub>2</sub> s. 278

## kvartilavstånd

- definition** differensen mellan den övre och den undre kvartilen
- kommentar** Kvartilavståndet är ett spridningsmått.

## lineär regression

- definition** statistisk metod för tvådimensionella data som ger ett lineärt<sub>2</sub> samband med minsta möjliga avvikelser, oftast mätta medelst variansen, för den andra variabeln

**kommentar** Definitionen innebär att man söker en rät linje med ekvationen  $y = ax + b$  där skillnaden  $y_j - ax_j - b$  för alla data  $(x_j, y_j)$  har minsta möjliga varians eller annat mått för avvikelsen.

Resultatet blir ett annat om man minimerar variansen för de ortogonala avstånden till linjen.

**jämför** *minsta-kvadrat-metoden* s. 282, *regressionsanalys* s. 284

## lägesmått

**synonym** **centralmått, centralvärde**

**definition** mått som anger ett datamaterials huvudsakliga läge

**kommentar** De vanligaste lägesmåttarna är aritmetiskt medelvärde, median<sub>2</sub> och typvärde.

**jämför** *aritmetiskt medelvärde* s. 39, *median<sub>2</sub>* s. 278, *typvärde* s. 279

## medelfel

**definition** punktskattning av standardavvikelse

## median<sub>2</sub>

**definition** den mittersta av ett udda antal observationer och medelvärdet av de två mittersta av ett jämnt antal observationer

**kommentar** Medianen är ett lägesmått och lika med den andra kvartilen.

## percentil

**definition** ett av de nittionio variabelvärden som, såvitt det är möjligt, delar upp ett statistiskt material i hundra lika stora delar efter storleksordning

**kommentar** Varje percentil är ett lägesmått.

**exempel** Den trettionde percentilen är det tal som är större än 30 % och mindre än 70 % av observationerna – med lämpliga modifikationer om det inte finns något sådant tal eller om det finns flera sådana tal.

**etymologi** Ordet *percentil* är baserat på latinets *per centum* 'på hundra'; se *procent*.

## relativ frekvens

**definition** ⟨för ett statistiskt material⟩ frekvensen<sub>2</sub> delad med antalet observationer

**exempel** I en klass om 25 elever som deltar i ett prov får 5 elever 15 poäng. Den absoluta frekvensen är 5, den relativa är 5/25, som också kan skrivas 0,2 eller 20 %.

**jämför** *andel* s. 62

## relativ kumulativ frekvens

**definition** kumulativ frekvens dividerad med totala antalet observationer

## sammansatt index

**definition** viktat medelvärde av flera index

exempel Konsumentprisindex.

## spridning

definition variation vid upprepade mätningar av en storhet

## spridningsmått

definition ett av flera mått som kvantifierar spridning

kommentar De vanligaste spridningsmåten är standardavvikelse, varians, variationsbredd och kvartilavstånd.

## standardavvikelse hos ett slumpmässigt urval

definition den icke-negativa kvadratroten ur variansen hos urvalet

## typvärde

definition (i ett statistiskt material) den eller de observationsvärden som har den största frekvensen<sub>2</sub>

kommentar Typvärdet är ett lägesmått. Det är speciellt lämpat för kategoriska data.

exempel I en klass har fem elever fått betyget MVG, åtta VG, tretton G och två IG. Betyget G är vanligast; det har den största frekvensen<sub>2</sub>. Typvärdet är alltså G.

I materialet 8, 3, 5, 4, 8, 8, 4, 4 är observationerna 4 och 8 vanligast och lika vanliga. Vi har två typvärden i detta fall.

## urvalsfel

synonym **samlingsfel**

definition fel som uppstått genom att ett urval inte omfattar hela populationen

## varians hos ett slumpmässigt urval

synonym **stickprovsvarians**

definition summan av kvadraterna på avvikelserna från medelvärdet dividerad med antalet värden minus 1

kommentar Variansen är ett spridningsmått för ett slumpmässigt urval och ges av formeln

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2,$$

där  $n \geq 2$  är antalet observationer och  $\bar{x}$  är deras medelvärde,

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j.$$

Observationerna  $x_1, x_2, \dots, x_n$  kan ofta ses som ett urval taget ur en större population. Värdet av  $S^2$  blir då inte så beroende av antalet element i urvalet om kvadratsumman divideras med  $n-1$  som om man hade valt nämnaren lika med  $n$ . Man får i medeltal samma

värde på  $S^2$  oberoende av urvalets storlek  $n$ . Variansen  $S^2$  hos ett urval är en skattning av variansen  $\sigma^2$  hos en sannolikhetsfördelning.

Talet  $\bar{x}$  är ett närmevärde till medelvärdet i hela populationen. Om man känner detta medelvärde och använder det i stället för  $\bar{x}$  i formeln för variansen, så bör  $n - 1$  där ersättas med  $n$ .

jämför *varians hos en sannolikhetsfördelning* s. 270

### variationsbredd

synonym **variationsvidd**  
 definition (i ett statistiskt material) differensen mellan den största och den minsta observationen  
 kommentar Variationsbredden är ett spridningsmått.  
 exempel I ett prov är det bästa resultatet 28 poäng och det sämsta 4 poäng. Variationsbredden är  $28 - 4 = 24$  poäng.

### vikt<sub>2</sub>

synonym **vägningstal**  
 definition faktor som anger grad av uppskattad tillförlitlighet hos ett observationsvärde jämfört med andra observationsvärden för samma storhet  
 kommentar Ju högre vikten sätts, desto större anses tillförlitligheten vara.

## 13.3. Statistiska undersökningar

### bearbetningsfel

definition fel som uppstår vid bearbetning av ett statistiskt material

### bias ['baj:as]

synonym **systematiskt fel**  
 definition egenskap hos ett urval som inte är representativt  
 kommentar En bias ger en skev bild av populationen.  
 Motsvarande adjektiv är *biased*, och dess motsats är *unbiased*, som alltså betyder 'rättvisande, väntevärdesriktig'.  
 etymologi *Bias* är ett engelskt ord som kommer av det fornfranska *biais* 'skev, sned'.

### bortfall

definition frånvaro av uppgifter om individer eller andra element som ingår eller var tänkta att ingå i en undersökning

### bortfallsfel

definition fel som uppstår på grund av bortfall

### felmarginal

synonym **osäkerhetstal, osäkerhetsmarginal, slumpmarginal**



definition tal som läggs till respektive dras ifrån en punktskattning när man bildar ett konfidensintervall

## hypotesprövning

synonym **hypotestest, statistiskt test**

definition en av flera metoder att med hjälp av ett statistiskt material avgöra huruvida ett antagande rörande en eller flera sannolikhetsfördelningar kan godtas eller bör förkastas

## inferens

synonym **statistisk inferens, statistisk slutledning**

definition slutsatsdragning om generella förhållanden som görs utgående från observerade resultat

etymologi *Inferens* kommer av det latinska ordet *inferre* 'att föra in, att sätta in'.

## klassindelning

definition indelning av ett statistiskt material i delmängder

kommentar Klassindelningen bör ske så att både klassernas storlek och deras antal blir lämpliga.

En *klass' undre gräns* är värdet mitt emellan dess lägsta värde och det högsta i närmast föregående klass; en *klass' övre gräns* är värdet mitt emellan dess högsta värde och det lägsta i följande klass.

En *klass' mitt* är det aritmetiska medelvärdet av dess gränser.

En *klass' bredd* är differensen mellan dess övre och undre klassgräns.

exempel Om klassgränserna i ett åldersindelad material är 0 år, 5 år, 10 år, o.s.v. upp till 65 år, och den sista klassen omfattar alla som är 65 år eller äldre, så är klassmitten för de 13 första klasserna 2,5, 7,5, 12,5, ..., 62,5 år, medan den fjortonde klassen inte har någon klassmitt.

## konfidensintervall

synonym **osäkerhetsintervall, säkerhetsintervall**

definition intervall som med angiven sannolikhet innehåller det sanna värdet

## likelihood

definition (med avseende på en angiven parameter) sannolikhetsfunktion för observerade data betraktad som funktion av parametern

## maximum-likelihood-skattning

definition (för att skatta en okänd parameter) skattning av det parametervärde som maximerar likelihooden

kommentar En vanlig förkortning är *ML-skattning*.

## minsta-kvadrat-metoden

definition	metoden att bestämma en kurva som är bäst anpassad till punkterna i ett punktdiagram genom att minimera kvadraterna på avvikelserna
kommentar	Definitionen innebär att man bestämmer en funktion i en viss klass så att summan av kvadraterna på avvikelserna från dess graf i vertikal led blir så liten som möjligt. En kurva bestämd enligt minsta-kvadrat-metoden kan användas för att förutsäga värden på variabeln $y$ då man känner värdet på variabeln $x$ . Speciellt används metoden i samband med regressionsanalys. En vanlig förkortning är <b><i>MK-metoden</i></b> .
historia	Minsta-kvadrat-metoden utvecklades av Karl Friedrich Gauss (1777–1855).
jämför	<i>linjär regression</i> s. 277

## mät skala

definition	en av flera typer av skalor som används för att klassificera statistiska material
kommentar	Man skiljer på två typer av mätskalor: nominalskalor och ordinalskalor; den senare typen har sedan flera specialiseringar med successivt rikare struktur. En <b><i>nominalskala</i></b> är en mätskala med data som endast kan klassificeras efter kvalitativa egenskaper. Data sägs vara <i>kategoriska</i> . En <b><i>ordinalskala</i></b> eller <b><i>ordningsskala</i></b> är en mätskala med data i grupper som har inbördes rangordning men inte nödvändigtvis har numeriska värden. En <b><i>intervallskala</i></b> är en ordinalskala där data kan ges numeriska värden. En <b><i>kvotskala</i></b> är en intervallskala där det finns en (naturlig) nollpunkt. En <b><i>absolutskala</i></b> , slutligen, är en kvotskala där det dessutom finns en naturligt given enhet.
exempel	<i>Nominalskala</i> : indelningen av skog i lövskog, barrskog och blandskog. <i>Ordinalskala</i> : en betygsskala. <i>Intervallskala</i> : temperatur mätt i grader Celsius under olika tider eller på olika orter. Nollpunkten är här utan intresse: det är meningslöst att säga att det är 20 procent varmare när det är 24 °C än när det är 20 °C. <i>Kvotskala</i> : temperatur mätt i kelvin eller kroppslängden hos olika personer. En person som är 20 procent längre än en person som är 160 cm lång är 192 cm lång. Någon naturlig enhet behöver inte finnas; jämförelsen blir densamma om man mäter i fot och tum. <i>Absolutskala</i> : antalet individer.

## nollhypotes

definition	grundantagande vid hypotesprövning
------------	------------------------------------

**kommentar** En nollhypotes är ofta ett antagande som man vill motbevisa med hjälp av en statistisk undersökning.

## observation

**definition** tal eller annat undersökningsresultat som ingår i ett statistiskt material

**kommentar** Observationer kan vara numeriska (tal) eller icke-numeriska (kategoriska, icke-tal), till exempel kön eller ändligt många färgnyanser.

**exempel** Om man kastar en tärning 30 gånger, får man 30 observationer men högst 6 variabelvärden.

## obundet slumpmässigt urval

**synonym** enkelt slumpmässigt urval

**definition** ett urval om  $n$  element som utan återläggning mellan dragningarna valts ur en population på så sätt att varje kombination av  $n$  element haft samma chans att bli vald

**kommentar** En vanlig förkortning är *OSU*.

**exempel** De cirka sju miljoner röstberättigade i Sverige utgör en population. Ett urval av t. ex. 1 000 personer ur denna population sägs vara obundet slumpmässigt om alla urval av 1 000 personer har samma sannolikhet.

**jämför** *urval* s. 286

## okorrelerade variabler

**definition** variabler vilkas samband uttryckt med hjälp av korrelationskoefficienten är lika med 0

**kommentar** Korrelationskoefficienten återspeglar affina samband. Andra typer av samband kan förekomma mellan två variabler trots att korrelationskoefficienten är 0.

## orsakssamband

**synonym** kausalsamband

**definition** samband i statistiskt material som kan förklaras med en orsak

**exempel** En bils hastighet och dess bromssträcka är ett exempel på orsakssamband.

Det lär finnas ett statistiskt samband mellan kaffedrickning och lungcancer, som troligen inte är kausalt, men kanske kan förklaras av att kaffedrickarna röker.

Antalet nyfödda under ett visst år i norra Tyskland lär tidigare ha haft ett samband med antalet häckande storkar i området.

## population

**definition** mängd av objekt om vilka man på statistisk väg söker information

**kommentar** Objekten kan vara människor, föremål, händelser o.s.v.

- exempel** En opinionsmätare kan vara intresserad av populationen röstberättigade, en brottsforskare av populationen bestående av alla väskryckningar under en viss period, en historiker av populationen svenska soldatöden under 1600-talet. Oftast nöjer man sig med att undersöka bara en del av populationen, ett urval. De som ingår i urvalet väljs vanligen genom något slag av lottning. Man säger då att stickprovet är slumpmässigt. Med ledning av vad man finner hos urvalet drar man sedan slutsatser om hela populationen.
- etymologi** Ordet *population* kommer av latinets *populus* 'folk'.

### poststratifiering

- definition** stratifiering som görs på ett redan draget slumpmässigt stickprov
- kommentar** Poststratifiering innebär att resultaten från stickprovet viktas så att t. ex. en sned åldersfördelning kompenseras.

### prediktion

- definition** förutsägelse om en variabel som görs utgående från värdena på en eller flera andra variabler
- etymologi** Ordet *prediktion* kommer av det latinska verbet *praedicere* 'att förutsäga'.

### punktskattning

- synonym** **punktestimat**
- definition** <utgående från ett givet datamaterial och avseende en viss parameter> värde som är en bästa gissning av parameteren med hjälp av datamaterialet

### regressionsanalys

- definition** metod som studerar sambandet mellan en beroende variabel och en eller flera oberoende variabler
- kommentar** Den vanligaste formen av regressionsanalys är lineär regression.
- jämför** *beroende variabel* s. 135, *lineär regression* s. 277, *oberoende variabel* s. 138

### repeterbarhet

- definition** inbördes överensstämmelse mellan resultaten vid upprepade mätningar under samma betingelser

### representativ

- definition** <om ett urval ur en given population> som i alla väsentliga avseenden liknar populationen

### selektivt urval

- definition** urval där man kan misstänka att det dåligt representerar populationen genom att en viss grupp eller vissa grupper är över- eller under-representerade

## signifikant avvikelse

definition avvikelse som är för stor för att förklaras av slumpvisa fel

## skattning

synonym **estimat**

definition uppskattning av ett okänt parametervärde baserad på ett stickprov

kommentar En skattning är en funktion av stickprovet.

exempel Medelvärdet hos ett stickprov från en fördelning är en skattning av fördelningens väntevärde.

## slumptalstabell

definition lista i vilken talen är fördelade enligt slumpen men i överensstämmelse med givna frekvenser

## statistiskt material

definition samling observationer som är resultatet av en statistisk undersökning

exempel Födelsevikten på alla födda under en viss period.

Bostadsarean hos alla tvåbarnsfamiljer i en viss stad.

Uppgivna politiska sympatier hos 1 000 svenska medborgare.

## stratifierat urval

definition urval där populationen först delas in i delmängder, kallade *strata*, och där man sedan slumpmässigt drar ett antal element ur varje stratum

## stratum, plural *strata*

definition delmängd av en population

exempel Bland alla röstberättigade utgör kvinnorna och männen två *strata*, likaså olika åldersgrupper.

etymologi *Stratum* kommer från latinets *stratum* 'skikt', perfekt particip av verbet *sternere* 'att breda ut'.

## svarsbortfall

definition person som ingår i ett urval men inte svarat

## tidsserie

definition en följd av observationer gjorda över tiden

kommentar Termen används när man intresserar sig för tidsberoendet.

## totalundersökning

definition undersökning där hela populationen tillfrågas eller undersöks

jämför *urvalsundersökning* s. 286

## täckningsfel

definition fel orsakat av att urvalet i en undersökning valts från en population som avviker från den avsedda

## urval

synonym	<b>stickprov, sampel</b>
definition	delmängd av en population
kommentar	Ett <i>slumpmässigt urval</i> är ett urval där observationerna i urvalet är oberoende, vilket de inte måste vara i allmänhet. Ett sådant urval kallas också <i>sannolikhetsurval</i> . Ett urval kan också vara ett <i>systematiskt urval</i> , vilket innebär att man i ett material valt ut vart $m$ -te element i populationen i någon viss ordning, där $m$ är ett positivt heltal.
etymologi	Ordet <i>sampel</i> kommer av det engelska ordet <i>sample</i> 'prov, urval (från något större)' och går tillbaka på latinets <i>exemplum</i> 'exempel'.
jämför	<i>obundet slumpmässigt urval</i> s. 283, <i>selektivt urval</i> s. 284, <i>stratifierat urval</i> s. 285

## urvalsram

synonym	<b>ram, ramförteckning</b>
definition	förteckning över elementen i den målpopulation man vill dra ett urval ur
kommentar	Ofta skiljer sig urvalsramen något från målpopulationen. Detta kan ge upphov till täckningsfel.

## urvalsundersökning

definition	undersökning där endast en del av elementen i en population undersöks
jämför	<i>totalundersökning</i> s. 285

## 14. Språkens rikedomar och terminologins problem

Christer Kiselman

Språken utgör oskattbara rikedomar för mänskligheten. De är kanske sextusen till antalet. En osäkerhet vidlåder detta antal, ty dels har man troligen inte kartlagt alla språk, dels är det inte klart vad som skall räknas som dialekter eller språk. (Hur många språk är samiskan?)

I princip kan man uttrycka allt på varje språk, men med fler eller färre ord. I det australiska språket kaurna fanns innan det dog ut och senare återuppväcktes inte räkneord för naturliga tal större än fyra. Men man kunde ju säga att sju är lika med fyra plus tre. Det blir förstas litet opraktiskt när man kommer till större tal. Och romarna hade säkert stort besvär att räkna ut  $XLIII - XXVI = XVIII$ , d.v.s.  $44 - 26 = 18$ , för att nu inte tala om  $XXVI - XLIII = -XVIII$ ,  $26 - 44 = -18$ , om de nu alls försökte ställa sig det problemet. Så även om  $XVIII$  och  $18$  är ekvivalenta representationer av ett visst tal, är det senare beteckningssättet mera praktiskt när det gäller det matematiska språkets operationella funktion (i motsats till dess representativa funktion).

Nils Jernsletten listar i en artikel<sup>1</sup> 176 samiska termer som rör snö och is. Många av dessa har långa definitioner på norska eller svenska. Ett enda exempel får illustrerar detta.

Det samiska ordet *doav'ke* betyder enligt Israel Ruong (1903–1986) 'ett tjockare snölager på marken som täcker tuvor och stenar så att man kan åka skidor och köra med akja eller kälke; snön når upp till vaden när man går i den; det är det första vinterflyttningsföret'.<sup>2</sup>

Norskan och svenskan saknar korta termer för denna typ av snö, men det innebär ju inte att man inte kan uttrycka fenomenet: den långa definitionen kan ju användas. Skillnaden är, förutom kortheten, att man får en tankemodell för fenomenet och om man dessutom har erfarenhet av denna typ av snö, så går tänkandet snabbare. Om två personer har denna erfarenhet, så går även kommunikationen mellan dem snabbare. Så är det i princip med alla begrepp som fått ett namn som man kan komma ihåg.

Kan man tänka utan språk? B. L. van der Waerden (1903–1996) hävdade det i en uppsats.<sup>3</sup> Men Adam Schaff (1913–2006) polemiserade häftigt mot denna uppfattning i en bok.<sup>4</sup> Frågan kan väl knappast få ett klart svar innan man klargjort vad som skall menas med orden *tänka* och *språk*. Själv har jag många gånger upplevt att jag haft en vag, ordlös uppfattning om matematiska förhållanden men ändå kunnat tänka konstruktivt på dem. Hur som helst är det väl klart

<sup>1</sup>Nils Jernsletten, Tradisjonell samisk fagterminologi. I: *Festskrift till Ørnulv Vorren*, sidorna 234–253. Tromsø: Tromsø Museum, Universitetet i Tromsø 1994.

<sup>2</sup>Israel Ruong, Jåhkåkaska sameby, sidan 78. I: *Svenska Landsmål och Svenskt Folkliv*, sidorna 41–158, 1964.

<sup>3</sup>B. L. van der Waerden, Denken ohne Sprache. *Acta Psychologica*, **10** (1954), nr. 1–2, 165–174.

<sup>4</sup>Adam Schaff, *Langage et connaissance*. Editions Anthropos, 1969.

att språket förenklar tänkandet. Det fixerar vissa begrepp. Och för kommunikation av idéer är väl ett språk nödvändigt.

### Termer som övertalar

Det är en fördel om en term lätt ger tankeassociationer till begreppet, och helst då korrekta sådana. Det kan underlätta både inläring och förståelse. Ibland kan associationen leda fel, men sådana fel kan vara en nyttig varning vid inlärandet. En sjöhäst är ingen häst utan en kantnålfisk. En bläckfisk är ingen fisk utan en mollusk. En talgoxe är ingen oxe utan en tätting.

De reella talen har fått sitt namn för att de i någon mening skulle vara verkliga, i motsats till de imaginära talen, som skulle vara inbillade. Det är också sant att de reella talen är grunden för många mycket framgångsrika matematiska modeller av verkligheten. Men de komplexa talen kan också vara grunden för matematiska modeller, liksom heltalen. Det faktum att det svenska adjektivet *reell* också betyder 'verklig', liksom att man använder samma adjektiv på engelska, *real*, för både 'verklig' och 'reell', är förledande, och man får inte ta det till intäkt för att tro att de reella talen är verkliga, eller verkligare än andra tal. Heltal och komplexa tal är alltså inte mindre verkliga eller har sämre kontakt med verkligheten än de reella talen.

### Adjektivens roll

I det matematiska språket, liksom i allmänspråket, har adjektiven som attribut oftast en inskränkande roll. En likbent triangel är en speciell typ av triangel; en abelsk grupp är en grupp som uppfyller ett nytt villkor. Adjektiven avgränsar delmängder av den mängd av objekt man talar om. Men ibland har adjektiven en helt annan roll.

Ett exempel är *undre gränsvärde* och *övre gränsvärde*, som inte är gränsvärden, utan tvärtom syftar på ett allmännare begrepp, som kommer till användning när gränsvärdet inte finns. Här tjänar *undre* och *övre* till utvidgning i stället för till inskränkning. En liknande roll har prefixen *pseudo-*, *kvasi-*, *hypo-* som aktuell matematisk forskning använder i sin jakt efter nya ord. Pseudodifferentialoperatorer, kvasianalytiska funktioner och hypoelliptiska operatorer är alltså inte alltid differentialoperatorer, analytiska respektive elliptiska.

Ytterligare en annan och mycket specifikt matematisk roll hos attributet uppvisar termen *riktad sträcka*, som inte betecknar en speciell sträcka, utan en sträcka försedd med en extra struktur, i detta fall information om vilken av ändpunkterna som valts som utgångspunkt. Attributet *riktad* tjänar här snarast till att definiera en helt ny term, inte till att inskränka omfånget hos huvudtermen.

### Idealet

Terminologins ideal är att varje begrepp betecknas av en och endast en term, och att omvänt varje term syftar på ett och endast ett begrepp. Detta har uttryckts av till exempel Eugen Wüster (1898–1977):

Av den varaktiga språkliga tillordningen skall man i terminologin kräva att den, för att använda ett matematiskt uttryckssätt, är bijektiv. D.v.s. att i princip varje begrepp tillordnas blott en benämning, och omvänt.

Detta är avsett för en bestämd tidpunkt, mestadels för nutiden, alltså i ett synkroniskt betraktande av språket.



Det bör alltså varken förekomma flertydiga benämningar (homonymer eller polysemi) eller flera benämningar för ett begrepp (synonymer).<sup>5</sup>

Wüster ställer detta krav på terminologin, men framhåller genast att motsvarande krav ingalunda gäller för allmänspråket eller det litterära språket. Där är det inte ens önskvärt att ställa det.

Men så som språken ser ut, kan detta ideal inte uppnås ens för de matematiska termerna. Låt oss se på några exempel.

### Synonymer: flera termer för ett begrepp

Kärt barn har många namn, säger ordspråket, och vissa begrepp har flera termer knutna till sig, termer som är synonymer i en viss mening, d.v.s. det är inte logiskt möjligt att definiera dem så att de svarar mot olika begrepp. Detta betyder dock inte att dessa termer skulle vara onödiga, ty de används i olika sammanhang, och underlättar förståelsen. Genom dessa olika sammanhang kan de få olika bibetydelser eller betydelsenyanser.

Ett viktigt exempel är orden *avbildning*, *funktion*, *transformation*, *operator*, *operation*, som alla är synonyma eller nästan synonyma. Logiskt sett finns det bakom dessa ord endast ett begrepp: avbildning. Men i en utsaga som *Derivatan av funktionens bild under transformationen är lika med transformen av  $-ix$  gånger funktionen* är det uppenbart att det skulle bli en obegriplig mening om *funktion* och *transformation* ersattes med en enda term; samma kommentar angående *bild* och *transform*. Det är alltså uppenbart att vi behöver flera ord för att inte uttalandet skall smälta ihop till en obegriplighet. I boken har vi valt att ha två termposter, *avbildning* och *funktion*, på grund av att båda är så vanliga i matematiska texter, och att termen *funktion* har en särställning i skolans arbete.

Ett annat exempel är *kurva* och *linje*, där inget av orden kan rensas ut, eftersom båda förekommer i många sammanhang. Detsamma gäller till exempel paret *addera*, *summera*.

En särskild grupp av synonymer är de par där ett inhemskt ord uppträder tillsammans med ett låneord, i matematiken mest från grekiskan och latinet. Här kan orden ha olika stilvärden. Några exempel är: *differens*, *skillnad*; *gränsvärde*, *limes*; *limes superior*, *övre gränsvärde*; *limes inferior*, *undre gränsvärde*; *medelpunkt*, *centrum*; *omkrets*, *perimeter*; *lemma*, *hjälpssats*; *sats*, *teorem*; *korollarium*, *följdsats*. (Det första ordet i varje par är det som vi föredragit som huvudord; det andra är angivet som synonym. Någon kan vilja kasta om ordningen i vissa fall.) Många liknande exempel finns också utanför matematiken, och de utgör kanske ett problem vid inläringen men inget stort begreppsmässigt problem.

När en synonym angivits, skall enligt terminologins regler endast huvudtermen användas i definitioner och förklaringar i samma verk. Så har vi förstås gjort, men det finns undantag. Vi har angivit *heltal* som synonym till *heltal*. Men om man gör en uppräknings som *naturliga*, *hela*, *rationella*, *reella* och *komplexa tal*, så blir det störande att bryta den genom att sätta in *heltal*.

<sup>5</sup>Eugen Wüster, *Einführung in die Allgemeine Terminologielehre und Terminologische Lexikographie*, International Information Centre for Terminology (Infoterm), 1985. Citatet är från sidan 79 och återges här i min översättning.

### Polysemi: en term för flera begrepp

Det finns åtskilliga termer som syftar på flera mer eller mindre besläktade begrepp: *bas*, *kropp*, *kvot*, *differens*, *kub*, *kvadrat*, *argument*, *linjär*, *algebra*, *topologi*. Av dessa är kanske *kvot* det vanskligaste i skolan. Men det går inte att komma ifrån det.

Termen *bas* finns i inte mindre än fyra termposter.  $Bas_1$  syftar på basen i en triangel eller annan månghörning;  $bas_2$  på basen  $b$  i en potens  $b^x$ ;  $bas_3$  på basen i ett positionssystem, alltså något mycket närbesläktat med  $bas_2$ , samt slutligen  $bas_4$  på en bas i ett vektorrum. I alla dessa fall kan man säga att det finns en grundbetydelse, nämligen något som ligger i botten och som något annat bygger på. Denna grundbetydelse är förstås till hjälp när man lär sig, men att sammanföra alla fyra definitionerna i en skulle inte vara klargörande.

Termen *linjär* har två besläktade men olika betydelser. Ibland betyder ordet detsamma som *affin*, ibland inskränks det till en affin avbildning som är noll i origo. Det innebär att linjär<sub>1</sub> är ett specialfall av linjär<sub>2</sub> och att en avbildning är linjär<sub>2</sub> om den är summan av en konstant och en avbildning som är linjär<sub>1</sub>.

En speciell form av polysemi uppvisar termerna *algebra* och *topologi*. De är namn på både ett visst slag av matematisk struktur och på den vetenskapsgren som behandlar dessa strukturer.

En typ av polysemi är mycket vanlig när det gäller namn på sträckor. Här använder man ofta sträckans namn för att beteckna dess längd. Höjd, diagonal, hypotenus och katet är alla speciella sträckor och termerna betecknar även deras längd. Man säger att en rektangels area är basen gånger höjden. Om man är mycket noga, så skall man säga: rektangelområdets area är basens längd gånger höjdens längd, men det hörs ju att det är för tungt. Detta är en ganska ofarlig polysemi. Man kan här jämföra med vanliga uttryck som *Jag är en och åttiosex*, vilket ju syftar på att min kroppslängd är 1,86 meter – ingen missförstår detta.

### Distinktioner

I flera fall gör man i matematiken distinktioner som inte alltid motsvaras av distinktioner i vardagsspråket. En grupp av sådana termer är *cirkel*, *cirkelskiva*; *sfär*, *klot*; *triangel*, *triangelområde*; *kvadrat*, *kvadrat område*. Här är begreppen klart olika: en cirkel är en kurva, medan en cirkelskiva är det område som omsluts av en cirkel. En cirkelskiva med radie  $r$  har arean  $\pi r^2$ , medan cirkeln med samma radie har arean noll. På motsvarande sätt skiljer man mellan en triangel, som har arean noll eftersom den består av tre linjestycken, och ett triangelområde, som är det område som omsluts av en triangel. Att begreppen är olika är inte diskutabelt, men det kan förstås diskuteras om det är nödvändigt med två termer. Man kan se utsagor som att triangelns area är basen gånger höjden genom två, och då förstår man att det handlar om ett triangelområde.

När det gäller termer som *kub*, *tetraeder* och *oktaeder* finns motsvarande begreppsmässiga distinktion mellan en union av plana ytor och den kropp de omsluter. Men här har man inte skapat termer motsvarande *sfär* och *klot*. Distinktionen mellan begreppen finns, men den motsvaras inte av termerna. Vi får leva med detta, och även acceptera att en triangel i vissa böcker kan ha en positiv area.

En speciell distinktion görs av fysikerna när det gäller fart och hastighet. Den är relativt sentida. Nationalencyklopedin talar ännu 1993 om ljushastigheten och

ljusets utbredningshastighet. Men i grundskolans läroböcker fanns distinktionen redan 1989. Hastigheten är en vektor  $v$ , och farten är denna vektors längd  $\|v\|$ . När det gäller acceleration finns samma skillnad mellan begreppen, accelerationen  $a$  är en vektor, och  $\|a\|$  dess längd. Men här har man inte hittat två olika ord. Så det har inte varit möjligt att vara konsekvent när det gäller vektorer som hastighet och acceleration. Vi följer här fysikerna.

Vi kan alltså konstatera att principen *ett begrepp – en term* är värdefull som ett riktmärke i det terminologiska arbetet, och likaså värdefull som pedagogisk ledstjärna, men att den har undantag åt båda hållen, undantag som vi får leva med och utan vilka språket skulle bli allför tungt eller alltför pedantiskt.

### Korrekt, pedantiskt och slarvigt språkbruk

Det matematiska språkbruket är oftast mer precist än det vardagliga. Ett exempel på detta är distinktionen mellan *om* och *om och endast om*, som är viktig i matematiken men inte alltid upprätthålles i vardagen. Men även det matematiska språket utsätts för förenklingar genom samma mekanismer som det vanliga. Vi har redan talat om att *höjd* kan syfta på såväl en sträcka som denna sträckas längd. En annan typ av förenkling uppträder när man säger *Linjerna  $2x + 3y = 11$  och  $3x - y = -11$  skär varandra i punkten  $(-2, 5)$* . I undervisningen måste man ju understryka att en punkt i planet inte är detsamma som ett par av tal, utan att talen är punktens koordinater. Distinktionen är viktig när man håller på att lära sig. Så till en början bör man göra mer fullständiga uttalanden som *Linjerna med ekvationerna  $2x + 3y = 11$  och  $3x - y = -11$  skär varandra i punkten med koordinaterna  $(-2, 5)$* . En ekvation är ju inte en linje och ett par av koordinater är inte en punkt. Men när man blivit van, så blir den typen av förenklingar oundvikliga och känns dessutom naturliga.

### Beskrivning och normering

Det finns två poler mellan vilka alla ordböcker, grammatikor och termlistor rör sig: den deskriptiva (beskrivande) och den normerande (rekommenderande). Man vill å ena sidan beskriva språket så som det faktiskt används, men man behöver å andra sidan ge vägledning för ett gott språkbruk i utbildningen. Ingen av dessa viktiga ledstjärnor för terminologiskt arbete kan få ta över helt. Om man beskrev allt som faktiskt förekommer, skulle förvirring uppstå; en fullständigt deskriptiv ordbok skulle inte bara ta upp *dublett* som en vanligare stavning än *dubblett*, utan också lista *coh* och *jga* som alternativa stavningar av *och* och *jag*. Ett urval måste med nödvändighet ske, och varje urval innebär ett ställningstagande, en rekommendation, och därmed en normering. Men man kan inte normera allt, ty då avlägsnar man sig snabbt från språkbruket och svävar långt utanför det språk som används. Det blir en balansgång, där den största respekt för det hävdvunna språkbruket måste samsas med välgrundad kritik och försiktig normering.

### Terminologins arbetssätt

Inom terminologin bör man gå från det allmänna till det mer specifika: man definierar *verktyg* innan man går in på *hyvel* och *stämjärn*. Man tar hyperonymen före hyponymen.

Tillämpat på matematiken innebär detta att man bör utgå från de allmännaste talen, de komplexa, och sedan definiera ett reellt tal som ett komplext tal med

imaginärdel noll, därefter ett rationellt tal som ett speciellt reellt tal (men hur?). Sedan kommer man till ett heltal och sist till ett naturligt tal. Men barnen lär sig talen i den motsatta ordningen, och detta måste vi följa i vår presentation. Så här har vi ett klart brott mot terminologins rekommenderade tillvägagångssätt. Inlärningsordningen måste här få ett visst genomslag. Och inom zoologin finns det liknande problem. Barnen lär sig inte djuren i ordningen eukaryota organismer, ryggradsdjur, däggdjur, rovdjur, hundar och katter, utan börjar snarare med vovvar och kissar.

Ett annat exempel är kvadraten som polygon. Här går det att följa den terminologiska ordningen, och det har vi också gjort: först definieras en polygon, sedan en månghörning som en speciell polygon, därefter en fyrhörning. Vi specialiserar ytterligare till parallelltrapets, sedan till parallellogram, rektangel och kvadrat. Det blir en lång kedja av successiva specialiseringar, som inte blir enklare av att vi också kan gå från parallellogram via romb till kvadrat. Men kanske någon invänder att små barn lär sig att rita kvadrater före polygoner. Här behövs kanske mera forskning. Nu är det i alla fall sagt hur vi resonerat.

\*\*\*

## 15. Tvånget att precisera och friheten att generalisera

Anders Tengstrand

### Att vara rund

Under en fortbildningskurs för lärare på lågstadiet bad jag deltagarna att definiera termen *cirkel*. En mycket erfaren och uppenbarligen skicklig lärare gav det för henne naturliga svaret: ”Det är något som är runt.” För henne var egenskapen att vara rund fullständigt självklar och en cirkel var något som hade denna egenskap. En av våra mest berömda svenskar, Emanuel Swedenborg (1688–1772), intresserade sig för matematik innan han övergick till att studera mysticism. Han var en av de första svenskar som försökte sätta sig in i den infinitesimalkalkyl som skapades av Newton och Leibniz i slutet av 1600-talet. Han definierade *cirkel* på följande sätt:

En cirkel eller en rund linie är den som går tillsammans.<sup>6</sup>

Också Swedenborg definierar alltså en cirkel med hjälp av ord hämtade från vardagen. Men i matematiken är definitionen inte användbar. Den definition som finns i denna terminologibok och som också finns hos Euklides i hans *Stoikheía* (i latinsk översättning *Elementa*) ’Grundbegreppen’, nämligen

<sup>6</sup>Citatet är hämtat från Staffan Rodhe, *Matematikens utveckling i Sverige fram till 1731*, Uppsala Dissertations in Mathematics, Uppsala: Uppsala universitet, 2002, del I, sidan 41.

Kurva i planet som består av alla punkter som har ett givet avstånd (radien) till en fix punkt (medelpunkten)

är kanske mer komplicerad, men den kan användas för att lösa problem och för att bevisa satser inom geometrin. För att t. ex. visa satser om båginklar och medelpunktsinklar duger inte Swedenborgs karakterisering. För att få en för matematiker användbar definition måste det vardagliga ordet *rund* preciseras, och kravet på precisering innebär att beskrivningen blir mer komplex. I definitionen använder vi oss av ord som *kurva*, *avstånd* och *punkt*, som antingen definierats tidigare eller som vi uppfattar som intuitivt självklara och som vi antar att det finns en gemensam uppfattning om. Men också de sistnämnda termerna kan behöva preciseras i ett sammanhang där man vill studera egenskaper hos kurvor i allmänhet eller där man vill mäta och jämföra avstånd.

### Att vara kontinuerlig

Vi ger ytterligare ett exempel och visar hur ordet *kontinuitet*, som är centralt i matematisk analys, successivt måste preciseras när sammanhangen där det användas blir mer och mer sofistikerade. Ordet *kontinuerlig* används i vardagen om företeelser som varierar med tiden och där det inte förekommer språngvisa förändringar. Detta är också den matematiska innebörden, men termen måste preciseras för att göras användbar. Det är inte heller så bra att definiera en företeelse genom att tala om hur den inte skall uppföra sig. I matematiken talar vi om kontinuitet i samband med funktioner (en term som också kräver en precis definition). En funktions värden beror av värdena på en variabel som vi betecknar med  $x$ . Om vi kallar funktionen för  $f$ , så betecknas funktionens värde i  $x$  med  $f(x)$ . Vi antar att både  $x$  och  $f(x)$  är reella tal. I många fall betecknar  $x$  tiden och  $f(x)$  funktionens värde vid tidpunkten  $x$ . En funktion kan t. ex. beskriva hur temperaturen i en viss punkt eller en bils läge längs en väg förändras med tiden. Att förloppet är kontinuerligt betyder alltså att  $f(x)$  inte ändras språngvis då  $x$  varierar. Vi kan formulera detta på följande sätt, som i många sammanhang kan vara användbart som definition:

Funktionen  $f$  är *kontinuerlig* om små förändringar av  $x$  medför små förändringar av  $f(x)$ .

Men formuleringen blir problematisk redan om vi med hjälp av den vill undersöka om funktionen  $f(x) = x^2$  är kontinuerlig. Vi vet alla hur motsvarande funktionskurva  $y = x^2$  ser ut, och med den för ögonen är det uppenbart att funktionen är kontinuerlig. Kurvan har inga språng utan hänger ihop. Antag nu att vi förändrar  $x$  genom att lägga till ett litet tal  $h$ . Funktionsvärdet ändras då från  $x^2$  till  $f(x+h) = (x+h)^2 = x^2 + 2hx + h^2$ . Ändringen är alltså  $2hx + h^2$ . Är den liten? Om  $x$  är stort så behöver ju inte  $2hx$  vara liten även om  $h$  är det. Men om  $h$  är tillräckligt liten, så är naturligtvis  $2hx + h^2$  liten. Egentligen handlar det om vad vi menar med liten. Antag att vi kommer överens om att tal som till sitt absolutbelopp är mindre än 0,001 är små. Om  $x = 1\,000$ , så är för  $h = 0,001$  talet  $2hx + h^2$  något större än 2, vilket enligt vår överenskommelse inte är litet. Men om vi i stället väljer  $h$  mindre än  $10^{-7}$ , så är förändringen  $2hx + h^2$  klart mindre än 0,001. För att vår definition skall vara användbar i mer komplicerade situationer måste vi på något sätt klargöra vad vi menar med *liten* och hur variationerna i

$x$  och  $f(x)$  förhåller sig till varandra. För det första kan vi naturligtvis inte rent allmänt säga att ett tal är litet bara för att dess absolutbelopp är mindre än 0,001. I vissa sammanhang kanske 0,001 betraktas som stort. För det andra måste vi tydliggöra i vilken ordning vi väljer variationerna i  $x$  och  $f(x)$ . Det kan i detta sammanhang vara praktiskt att använda sig av begreppen godtyckligt små och tillräckligt små. Vi kan precisera vår definition på följande sätt.

Funktionen  $f$  är *kontinuerlig* om förändringarna i  $f(x)$  kan göras godtyckligt små för alla förändringar av  $x$  som är tillräckligt små.

Vi anger alltså först en grad av litenhet i förändringen av  $f(x)$ , och om funktionen är kontinuerlig skall vi därefter kunna bestämma en grad av litenhet i förändringen av  $x$  så att alla sådana små förändringar i  $x$  åstadkommer en förändring av  $f(x)$  som är mindre än den från början angivna. Nu börjar det bli komplicerat. För att få bättre överblick försöker vi formulera vår definition genom att mer konsekvent använda oss av formelspråk. Förändringen av  $f(x)$  är godtyckligt liten om den kan göras mindre än varje positivt tal hur litet detta än är. Vi kan bestämma oss för en viss grad av litenhet genom att ange ett tal som vi kallar  $\varepsilon$ . Då skall vi kunna ange en grad av litenhet  $\delta$  av förändringen av  $x$  så att om  $x$  varierar mindre än  $\delta$  så är förändringen av  $f(x)$  mindre än  $\varepsilon$ . Vi kan skriva definitionen på följande sätt

Funktionen  $f$  säges vara *kontinuerlig* om det till varje tal  $\varepsilon > 0$  finns ett tal  $\delta > 0$  sådant att  $|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon$  för alla  $h$  sådana att  $|h| < \delta$ .

Definitionen har nu blivit betydligt mer komplicerad. I själva verket har matematikstudenter vid universitet och högskolor brottats med den i decennier. Men det luddiga begreppet liten har preciserats, liksom hur förändringarna av  $x$  och  $f(x)$  skall relateras till varandra. Med denna definition står vi bättre rustade när frågan om en funktion är kontinuerlig eller ej ställs på sin spets.

Det finns egentligen ytterligare en otydlighet i definitionen. Funktionen är kontinuerlig om ovanstående gäller för varje  $x$  i definitionsområdet. Talet  $\delta$  beror naturligtvis på valet av  $\varepsilon$ , men det beror också på  $x$ . Definitionen har sitt ursprung i ett arbete av Augustin Cauchy (1789–1857) från 1823. Liknande definitioner kan formuleras för olika former av konvergens. Enligt vissa tolkningar av Cauchys arbeten förbisåg Cauchy beroendet av  $x$  och nådde därmed fram till felaktiga satser. Senare studier visar att dessa tolkningar är tvivelaktiga. För att bringa större klarhet infördes senare under 1800-talet begreppen likformig kontinuitet och likformig konvergens som vi inte går in på här. Cauchy hade kanske på ett intuitivt sätt klart för sig denna likformighet, dock utan att uttrycka sig så klart att vi nästan två sekel senare kan vara säkra på vad han menade.

### Precision och generalisering

Det matematiska språket måste ha stor precision och definitionerna bör utvecklas i takt med att kraven på precision ökar. Ofta blir de mer och mer komplicerade. Ett ord som verkar självklart måste tvingas in i en språklig tvångströja för att man skall undvika missuppfattningar. I en terminologibok som denna är man ibland hänvisad till att använda mindre precisa definitioner för att framställningen skall bli begriplig även för den som inte är specialist, men i takt med att studierna fördjupas måste precisionen öka.

**Att mäta avstånd**

Ett matematiskt begrepp kan ge upphov till nya, mer allmänna begrepp. I stället för att tvånget på precision i viss mån inskränker betydelsen så kan ett begrepp som från början haft en relativt konkret betydelse generaliseras. Jag vill exemplifiera detta genom att studera begreppet avstånd. Enligt terminologiboken är avståndet mellan två punkter längden av sträckan mellan de båda punkterna. Om de båda punkterna har koordinaterna  $(x_1, x_2)$  och  $(y_1, y_2)$  i ett rätvinkligt koordinatsystem, så kan man med hjälp av Pytharoras' sats visa att avståndet mellan dem är

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

och om de har koordinaterna  $(x_1, x_2, x_3)$  och  $(y_1, y_2, y_3)$  i ett rätvinkligt koordinatsystem i rummet, så är avståndet

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

I många sammanhang behöver man flera tal för att karakterisera en företeelse. Om vi t. ex. med jämna mellanrum mäter en kropps temperatur i tio givna punkter, så ger varje mätning upphov till en tiotupel  $(x_1, x_2, \dots, x_{10})$ . Avståndet mellan två olika mätresultat  $(x_1, x_2, \dots, x_{10})$  och  $(y_1, y_2, \dots, y_{10})$  kan då lämpligen sättas lika med

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_{10} - y_{10})^2}.$$

Vi har på detta sätt generaliserat vårt avståndsbegrepp till mängden av alla tiotupler och har då inspirerats av den formel som vi visat för avståndet mellan två punkter i planet och i rummet. Avståndet är ett mått på skillnaden mellan de båda observationsserierna. Naturligtvis kan vi göra motsvarande definition av avståndet mellan två  $n$ -tupler där  $n$  är ett godtyckligt positivt heltal.

Det finns i många sammanhang behov av att mäta avståndet mellan olika element. Hur skall man mäta avståndet mellan två funktioner? Hur skall man mäta avståndet mellan två genupsättningar? Kan man ange skillnaden mellan olika mönster med ett lämpligt avståndsbegrepp? Vi skall inte lämna svar på dessa frågor, men de kan stämma till eftertanke.

Oavsett vilken mängd vi studerar och vilket avståndsmått vi använder, vill vi att måttet skall ha vissa egenskaper. Avståndet mellan två olika element  $a$  och  $b$  skall alltid vara ett positivt tal, och det skall vara lika med avståndet mellan  $b$  och  $a$ . Vidare skall avståndet från ett element till sig själv alltid vara lika med 0. Vi vill också att triangelolikheten skall vara uppfylld, d.v.s. avståndet från  $a$  till  $b$  skall alltid vara mindre än eller lika med summan av avstånden från  $a$  till  $c$  och från  $c$  till  $b$ . Det innebär att den raka vägen från  $a$  till  $b$  aldrig är längre än om vi går via ett annat element  $c$ . Om vi betecknar avståndet från  $a$  till  $b$  med  $d(a, b)$ , kan vi skriva de nämnda villkoren på följande sätt:

1.  $d(a, b) > 0$  om  $a \neq b$  och  $d(a, a) = 0$  för alla  $a$  och  $b$ ;
2.  $d(a, b) = d(b, a)$  för alla  $a$  och  $b$ ;
3.  $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$  för alla  $a, b$  och  $c$ .

Vi generaliserar begreppet avstånd och kommer överens om att en funktion  $d$  med egenskaperna 1–3 är ett avstånd. Det innebär att avstånd mellan element kan definieras på godtyckliga mängder. Det enda vi kräver är att de tre egenskaperna skall vara uppfyllda. Vårt vanliga avståndsbegrepp uppfyller de tre villkoren och är alltså ett avstånd även i den nya, generellare meningen.

Med detta generella avståndsbegrepp kan vi inte bara införa avstånd på praktiskt taget vilka mängder som helst. Vi kan också införa olika avstånd på samma mängd. Det vanliga avståndet mellan två punkter i ett plan är som vi tidigare sagt längden av sträckan mellan punkterna. Men vi kan också införa ett annat avståndsbegrepp. Om två punkter  $p$  och  $q$  har koordinaterna  $(x_1, x_2)$  respektive  $(y_1, y_2)$  i ett rätvinkligt koordinatsystem så visar det sig att definitionen

$$d(p, q) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

uppfyller de tre egenskaperna ovan. Alltså är  $d(p, q)$  ett avstånd. Detta avstånd blir naturligt i en värld där man bara har två färdriktningar att välja på, nämligen parallellt med en av koordinataxlarna. De som bor på Manhattan i New York, där gatunätet är rektangulärt, bor i en sådan värld.

### **Matematikens två sidor**

Matematiken har två sidor. Den ställer stränga krav på logik och precision, men samtidigt tillåter den konstruktioner av nya abstrakta världar, som från början kan synas eteriska, men som ofta visar sig användbara. När de abstrakta världarna skapas, spelar intuitionen en stor roll och inspirationen hämtas från en mer konkret värld där vissa sammanhang kan verka självklara. I den abstrakta världen skapas en teori som kan tillämpas på företeelser som till synes är helt olika. Det är då nödvändigt att samband och påståenden grundas på logiska resonemang utifrån de formella definitioner som gjorts. När gränserna vidgas blir det nödvändigt att strikt hålla sig inom den ram som anges av definitionerna. Utan fantasi blir matematiken tråkig och onjuttbar, men utan logisk stringens blir den endast lös spekulat.



## 16. Alfabetisk termlista

Skrivsättet

area 69

betyder att *area* är en huvudterm och att term-posten med dess definition och eventuella kommentarer m.m. återfinns på sidan 69.

Skrivsättet

abskissa *se* *x*-koordinat 240

betyder att termen *abskissa* är upptagen som synonym till *x*-koordinat och att båda återfinns på sidan 240.

Skrivsättet

addend *under* *addition* 25

betyder att termen *addend* är omnämnd i term-posten *addition*, som börjar på sidan 25.

### — 1 —

10-logaritm *se* *tiologaritm* 68

### — a —

abelsk *under* *grupp* 88

abskissa *se* *x*-koordinat 240

absolutbelopp 38

absolut fel *se* *fel* 86

absolut geometri 174

absolut konvergent *under* *konvergent serie* 114

absolutskala *under* *måtskala* 282

acceleration 69

ackumulerat stapeldiagram 272

addend *under* *addition* 25

addera 24

addition 25

additionsformel 135

additionslagen för sannolikheter 265

additionsmetoden 93

additionstecken *under* *plustecken* 25

additiv invers *under* *invers*<sub>1</sub> 89

affin avbildning 135

affin geometri 174

affin transformation 240

affint ekvivalenta 240

alef-noll 100

algebra<sub>1</sub> 11

algebra<sub>2</sub> 87

algebraisk ekvation *se* *polynomekvation* 97

algebraisk operation 92

algebraiskt tal 38

algebraiskt uttryck 87

algebrans fundamentalsats 87

algoritm 128

allkvantifikatorn *under* *kvantifikator* 119

allmän form *under* *räta linjens ekvation* 98

allmänt bråk *under* *bråk* 40

alternatvinklar 192

ampere 75

amplitud 140

analytisk funktion 140

analytisk geometri 174

andel 62

andraderivata 162

andragradsekvation 93

andragradsfunktion 140

andragradskurva 213

andragradsyta 227

andra ordningen (om differentialekvation) *under* *differentialekvation* 164

antagande 128

antal 11

antiderivata *se* *primitiv funktion* 171

antilogaritm *under* *logaritm* 65

antinomi *se* *paradox* 132

antipod 241

antipodisk *under* *antipod* 241

antisymmetrisk relation 57

applikata *se* *z*-koordinat 240

approximativt värde *se* *närmevärde* 86

arabiska siffror 39

arcusfunktion 250

area 69

areadiagram 272

areaenhet 76

areal *under* *area* 69

areasatsen 198

areaskala 241

Argands diagram *se* *komplexa talplanet* 46

argument<sub>1</sub> (för en avbildning) 135

argument<sub>2</sub> (för ett komplext tal) 192

aritmetik 12

aritmetikens fundamentalsats 36

aritmetisk serie 108

aritmetisk talföljd 109

aritmetiskt medelvärde 39

arkimedisk kropp<sub>1</sub> 221

arkimedisk spiral *under* *spiral* 161

associativ *under* *associativa lagen* 87

associativa lagen 87

asteroid *under* *Lamékurva* 158

asymptot 154

avbildning 12

avgörbar 116

Avogadros tal *under* *mol* 80

avrunda 36

avrunda nedåt *under* *avrunda* 36

avrunda uppåt *under* *avrunda* 36

avrundningsfel 36

avrundningssiffra *under* *avrunda* 36

avstånd från en punkt till en mängd 174

avstånd mellan parallella linjer 175

avstånd mellan parallella plan 175

avstånd mellan två punkter 175

avståndsformeln 175

avtagande funktion 141

axel<sub>1</sub> (symmetri-) 241

axel<sub>2</sub> *under* *ellips* 215

axel<sub>3</sub> *under* *ellipsoid* 228

axiom 123

axiomatisk 124

## — b —

bas<sub>1</sub> (i en triangel) 198  
 bas<sub>2</sub> (i en potens) 63  
 bas<sub>3</sub> (i ett positionssystem) 40  
 bas<sub>4</sub> (i ett vektorrum) 255  
 baskant i prisma 221  
 bastal 275  
 basvektor 255  
 basvinkel 198  
 basyta 221  
 basår 275  
 bearbetningsfel 280  
 begränsad funktion 141  
 begränsat intervall *under begränsad mängd* 57  
 begränsningsyta 227  
 begynnelsevärde 162  
 Bernsteinpolynom 141  
 beroende händelser 264  
 beroende variabel 135  
 beskrivande definition *under definition* 124  
 bestämd integral *se integral* 169  
 betingad sannolikhet 266  
 betingad konvergent *under konvergent serie* 114  
 bevis 129  
 bevisa *under bevis* 129  
 Bézierkurva *under Bernsteinpolynom* 141  
 bias 280  
 biased *under bias* 280  
 bijektion 136  
 bijektiv avbildning *se bijektion* 136  
 bild 13  
 bildmängd 13  
 bilineär 87  
 biljon 40  
 billion *se biljon* 40  
 binom 87  
 binomialfördelning 266  
 binomialkoefficient 106  
 binomialsatsen 106  
 binomialserie 109  
 binära talsystemet 40  
 bisektris 198  
 bisektrissatsen 198  
 bit<sub>1</sub> 76  
 bit<sub>2</sub> 76  
 boolesk algebra 100  
 bortfall 280  
 bortfallsfel 280  
 boxplot *se låddiagram* 273  
 bredd i en rektangel 206  
 briggsk logaritm *se tiologaritm* 68  
 bruten linje *se polygon* 210  
 brutet tal 40  
 bryta ut 22  
 bråk 40  
 bråkd<sub>1</sub> 41  
 bråkd<sub>2</sub> *se stambråk* 54  
 bråkform *under bråk* 40  
 bråkstreck 30

brännpunkt *under ellips* 215  
 bunden variabel 116  
 byte 76  
 båge 175  
 båglängd 69  
 båginkel *se randvinkel* 194  
 båginkelsatsen *se randinkelsatsen* 194  
 bågvis sammanhängande mängd *under sammanhängande mängd* 187

## — c —

candela 76  
 cartesisk produkt *se kartesisk produkt* 102  
 catenaria *se kedjelinje* 158  
 centi- *under prefix* 83  
 centrala gränsvärdessatsen 266  
 centralmått *se lägesmått* 278  
 centralprojektion 241  
 centralvärde *se lägesmått* 278  
 centrum *under centralprojektion* 241  
 centrum *se medelpunkt* 219  
 cirkel 214  
 cirkelbåge 214  
 cirkeldiagram 272  
 cirkelns kvadratur 132  
 cirkelns omkrets 214  
 cirkelområde *se cirkelskiva* 214  
 cirkelring 214  
 cirkelsegment 214  
 cirkelsektor 214  
 cirkelskiva 214  
 cirkulär cylinder 227  
 cirkulär helix 227  
 cirkulär kon 227  
 codomän *under relation* 19  
 cosecans 250  
 cosinus 250  
 cosinussatsen 199  
 cotangens 251  
 cykloid 155  
 cyklometrisk funktion *se arcusfunktion* 250  
 cylinder<sub>1</sub> 227  
 cylinder<sub>2</sub> 227  
 cylindrisk yta 228  
 cylindriska koordinater 235

## — d —

deci- *under prefix* 83  
 deciljon *under tiopotens* 68  
 decillion *under tiopotens* 68  
 decimal 41  
 decimalbråk *under bråk* 40  
 decimaldel *under bråkd<sub>1</sub>* 41  
 decimalform *under bråk* 40  
 decimalkomma *under decimaltecken* 41  
 decimalsystemet 41  
 decimaltecken 41  
 decimalutveckling 42  
 deducera *under härleda* 130  
 deduktion *under härleda* 130

- deduktiv metod 129  
 definiendum under *definition* 124  
 definiens under *definition* 124  
 definition 124  
 definitionsmängd 13  
 definitionsområde se *definitionsmängd* 13  
 deka- under *prefix* 83  
 delare 30  
 delbar med under *delare* 30  
 delmängd 100  
 delningsdivision under *storhet* 73  
 de Moivres formel 48  
 De Morgans lagar 101  
 densitet 69  
 derivata 162  
 derivationsoperatorn under *derivata* 162  
 deriverbar 163  
 deriveringsoperatorn under *derivata* 162  
 deskriptiv definition under *definition* 124  
 de stora talens lag 264  
 determinant 260  
 diagonal 206  
 diagram 272  
 diameter 215  
 differens<sub>1</sub> 26  
 differens<sub>2</sub> (av mängder) 101  
 differenskvot 142  
 differentialekvation 164  
 differentialekvation av andra ordningen under *differentialekvation* 164  
 differentialekvation av första ordningen under *differentialekvation* 164  
 differentialgeometri 175  
 dimension<sub>1</sub> 13  
 dimension<sub>2</sub> 70  
 dimensionsanalys 70  
 dimensionslös under *dimension<sub>2</sub>* 70  
 diofantisk ekvation 94  
 Diracmåttet 142  
 direkt bevis 129  
 direktris under *cylindrisk yta* 228  
 direktris under *konisk yta* 230  
 Dirichlets lådprincip se *lådprincipen* 107  
 disjunkta 101  
 disjunkta händelser 264  
 disjunktion<sub>1</sub> 116  
 disjunktion<sub>2</sub> 117  
 disjunktionstecken 117  
 diskontinuerlig avbildning 136  
 diskret<sub>1</sub> 176  
 diskret<sub>2</sub> sannolikhetsfördelning 269  
 diskriminant 94  
 distributiv under *distributiva lagen* 88  
 distributiva lagen 88  
 divergent serie 113  
 divergent talföljd 113  
 dividend under *division* 31  
 dividera 31  
 division 31  
 divisionsalgoritm 31  
 divisionstecken 32  
 divisor under *division* 31  
 dodekaeder 221  
 domän under *relation* 19  
 dubbelbråk 42  
 dubbelrot 94  
 duvslagsprincipen se *lådprincipen* 107  
 dyadiska systemet se *binära talsystemet* 40
- e —
- e 113  
 effekt 70  
 egenrum under *egenvektor* 260  
 egentligt bråk under *bråk* 40  
 egenvektor 260  
 egenvärde 261  
 egyptisk triangel 199  
 ekvation 94  
 ekvationssystem 95  
 ekvipotenta 101  
 ekvivalens<sub>1</sub> 117  
 ekvivalens<sub>2</sub> 117  
 ekvivalenspil 117  
 ekvivalensrelation 117  
 ekvivalenta ekvationer 95  
 ekvivalenta utsagor under *ekvivalens<sub>1</sub>* 117  
 elektrisk ström 70  
 element 101  
*Elementa* under *euklidisk geometri* 177  
 elementarhändelse 264  
 element i en följd 109  
 elementär funktion 142  
 elimination under *eliminera* 95  
 eliminera 95  
 ellips 215  
 ellipsoid 228  
 elliptisk geometri under *icke-euklidisk geometri* 179  
 elliptisk paraboloid under *paraboloid* 231  
 e-logaritm se *naturlig logaritm* 66  
 empirisk 129  
 energi 70  
 enhet 77  
 enhetsbyte 77  
 enhetscirkeln 216  
 enhetskvadrat 206  
 enhetsmatris 261  
 enhetsrot 95  
 enhetssfären 228  
 enhetssträcka 176  
 enhetssystem 77  
 enhetsvektor 255  
 enkel kurva 155  
 enkelt nollställe se *multiplicitet* 97  
 enkelt slumpmässigt urval se *obundet slumpmässigt urval* 283  
 enklaste bråkform under *förkorta bråk* 42  
 entitet 117

- entydig faktoruppdelning under *aritmetikens fundamentalsats* 36  
 envelopp 155  
 epicykloid 156  
 epigraf 142  
 estimat se *skattning* 285  
 Euklides' algoritim 33  
 Euklides' *Elementa* under *euklidisk geometri* 177  
 Euklides' *Grunderna* under *euklidisk geometri* 177  
 Euklides' parallellpostulat 176  
 Euklides' *Stoikheía* under *euklidisk geometri* 177  
 euklidisk geometri 177  
 euklidisk längd under *längd hos en vektor* 256  
 euklidisk norm under *norm på ett vektorrum* 257  
 euklidiskt ekvivalenta under *kongruenta* 243  
 euklidiskt rum 177  
 Eulers linje 199  
 Eulers polyederformel 223  
 Eulers stegmetod 164  
 euthéia under *rät linje* 186  
 evoluta 156  
 evolvent 157  
 exakt värde 37  
 excentricitet 216  
 exempel 122  
 existenskvantifikatorn under *kvantifikator* 119  
 existenssats 125  
 explicit definition 126  
 exponent 63  
 exponentialfunktionen 143  
 exponentialfördelning 266  
 exponentiellt avtagande 143  
 exponentiellt växande 143  
 extrapolation 144  
 extrapolering se *extrapolation* 144  
 extrempunkt 144  
 extremvärde under *extrempunkt* 144
- f —  
 faktiskt sann se *sann*<sub>1</sub> 120  
 faktor 27  
 faktorisera 27  
 faktorsatsen 88  
 faktorråd 27  
 fakultet 106  
 falsk 117  
 falsk rot 95  
 faltning 109  
 faltningsprodukt 109  
 familj se *mängd* 17  
 fart 71  
 fel 86  
 felgräns 86  
 felmarginal 280  
 femhörning 206  
 Fibonaccis talföljd 110  
 flyttalsoperation under *tal i flyttalsform* 55  
 fokus under *ellips* 215  
 formel 14  
 fotpunkt under *normal* 182  
 Fourieranalys 251  
 Fouriertransform under *Fourieranalys* 251  
 Fouriertransformationen under *Fourieranalys* 251  
 fraktal 177  
 fraktil se *kvantil* 277  
 frekvens<sub>1</sub> 71  
 frekvens<sub>2</sub> 275  
 frekvensfördelning 275  
 frekvenstabell 273  
 fri variabel 118  
 fullkomligt tal se *perfekt tal* 50  
 fullständig fyrhörning 207  
 fullständig fyrsiding 207  
 funktion 14  
 funktional 144  
 funktionalekvation 96  
 funktionskurva 157  
 funktionsserie 144  
 funktionsteori under *komplex analys* 146  
 funktionsvärde 144  
 fyrhörning 207  
 fyrsiding se *fyrhörning* 207  
 följd 110  
 följsats se *korollarium* 127  
 fördelningsfunktion 266  
 föreningsmängd se *union* 104  
 förenkla 22  
 förhållande 57  
 förkorta bråk 42  
 förlänga bråk 42  
 förminskning 242  
 förmodan 126  
 försats under *implikation*<sub>1</sub> 118  
 förstaderivata se *derivata* 162  
 förstagrads ekvation 96  
 första kvadranten under *kvadrant* 237  
 första kvartilen 277  
 första ordningen (om differentialekvation) under *differentialekvation* 164  
 förstoring 242  
 försök 264  
 förväntat värde se *väntevärde* 271  
 förändringsfaktor 276  
 förändringskvot se *differenskvot* 142
- g —  
 gaussiska talplanet se *komplexa talplanet* 46  
 gemensam delare 33  
 gemensam faktor 28  
 gemensam faktor i polynom 88  
 gemensam multipel 28  
 gemensam multipel av polynom 88  
 gemensam nämnare 42  
 generalisering 126  
 generatris under *cylinder*<sub>1</sub> 227  
 generatris under *konisk yta* 230  
 geodetisk linje 157

geometri 15  
 geometrisk serie 110  
 geometrisk talföljd 110  
 geometriskt medelvärde 43  
 geometriskt objekt 15  
 giga- under *prefix* 83  
 glatt 164  
 glidande medelvärde 43  
 gnomisk under *centralprojektion* 241  
 golvfunktionen under *heltalsdel* 44  
 gon 77  
 googol 44  
 googolplex 44  
 grad<sub>1</sub> (vinkelmått) 77  
 grad<sub>2</sub> (för polynom) 88  
 grad Celsius 77  
 grad Fahrenheit under *grad Celsius* 77  
 grad Reamur under *grad Celsius* 77  
 gradskiva 193  
 graf 136  
 grafisk metod 96  
 grundenhet 78  
 grundtal se *naturligt tal* 49  
 grupp 88  
 gränsvärde 113  
 gyllene snittet 178  
 gynnsamt utfall 264  
 gångertecken se *multiplikationstecken* 29  
 gångra under *multiplicera* 28  
 gällande siffra se *signifikant siffra* 54

## — h —

halvaxlarnas längder under *ellips* 215  
 halvaxlarnas längder under *ellipsoid* 228  
 halvaxlarnas längder under *hyperbel* 216  
 halvplan 179  
 halvöppet intervall 57  
 harmonisk analys se *Fourieranalys* 251  
 harmonisk funktion 144  
 harmonisk serie 111  
 harmonisk talföljd 111  
 harmoniskt medelvärde 44  
 hastighet 71  
 Heavisidefunktionen 145  
 hekto- under *prefix* 83  
 helix 228  
 heltal 44  
 heltalsdel 44  
 heltalsmultipel se *multipel* 28  
 helt tal se *heltal* 44  
 heuristik 129  
 heuristisk 129  
 hexaeder 221  
 histogram 273  
 hjälpsats se *korollarium* 127  
 HL under *högra ledet* 96  
 holomorf funktion 15  
 homeomorfa under *homeomorfism* 136  
 homeomorfi under *homeomorfism* 136  
 homeomorfism 136

homogen differentialekvation 164  
 homogen ekvation 96  
 homogent ekvationssystem 96  
 homomorfism 136  
 homoteti se *sträckning* 248  
 hornvinkel 193  
 hundrakamrater 25  
 huvudbråkstreck under *dubbelbråk* 42  
 huvuddiagonal under *matris* 261  
 hyperbel 216  
 hyperbolisk cylinder 228  
 hyperbolisk geometri under *icke-euklidisk geometri* 179  
 hyperbolisk paraboloid under *paraboloid* 231  
 hyperboloid 228  
 hypocykloid 158  
 hypograf 145  
 hypotenus 200  
 hypotes<sub>1</sub> se *antagande* 128  
 hypotes<sub>2</sub> se *förmodan* 126  
 hypotesprövning 281  
 hypotestest se *hypotesprövning* 281  
 händelse 264  
 härleda 130  
 härledd enhet 78  
 härledning under *härleda* 130  
 högerderivata 165  
 högerinvers under *invers<sub>1</sub>* 89  
 högerledet se *högra ledet* 96  
 högeromgivning 58  
 högersistem 238  
 högerändpunkt 58  
 högra ledet 96  
 höjd i en cylinder 228  
 höjd i en kon 229  
 höjd i en månghörning 207  
 höjd i en polyeder 221  
 höjd i en triangel 200  
 hörn<sub>1</sub> (i en triangel) 200  
 hörn<sub>2</sub> (i en månghörning) 208  
 hörn<sub>3</sub> (i en polyeder) 222

## — i —

icke-euklidisk geometri 179  
 icke-reell 45  
 icke-strikt olikhet under *olikhetstecken* 60  
 icke-trivial linjärkombination under *linjärkombination* 256  
 identisk avbildning 137  
 identitet under *ekvation* 94  
 ikosaeder 222  
 imaginär se *icke-reell* 45  
 imaginära axeln 236  
 imaginär del se *imaginärdel* 45  
 imaginärdel 45  
 imaginär enhet 45  
 implicera under *implikation<sub>1</sub>* 118  
 implicit definition 126  
 implicit derivering 165  
 implikation<sub>1</sub> 118

- implikation<sub>2</sub> 118  
 implikationspil 118  
 index 111  
 indexserie 276  
 indextal 276  
 indexvärde *se* *indextal* 276  
 indicera 111  
 indirekt bevis 130  
 indoarabiska talsystemet 45  
 induktion 130  
 induktionsbas *under* *induktion* 130  
 induktionssteg *under* *induktion* 130  
 inferens 281  
 infimum 58  
 inflexionspunkt 180  
 information 71  
 inhomogen differentialekvation *under* *homogen differentialekvation* 164  
 injektion 137  
 injektiv avbildning *se* *injektion* 137  
 inklusion 101  
 innehållsdivision *under* *storhet* 73  
 inre alternatvinklar *under* *alternatvinklar* 192  
 inre produkt 255  
 inre punkt 181  
 inskriven cirkel 217  
 inskriven månghörning 208  
 insättning *under* *sätta in* 92  
 integral 169  
 integration 170  
 intercept 158  
 interceptform *under* *intercept* 158  
 interpolation 145  
 interpolering *se* *interpolation* 145  
 intervall 58  
 intervallskala *under* *måtskala* 282  
 intervallskattning 37  
 invariant<sub>1</sub> 242  
 invariant<sub>2</sub> 242  
 invers<sub>1</sub> 89  
 invers<sub>2</sub> *se* *omvänd relation* 102  
 invers avbildning 137  
 invers bild *se* *urbild* 20  
 inversion 242  
 invers matris 261  
 inverterat tal 46  
 irrationellt tal 46  
 irreflexiv *under* *reflexiv relation* 103  
 isomorfa *under* *isomorfism* 137  
 isomorfi *under* *isomorfism* 137  
 isomorfism 137  
 iterera 130
- j —  
 joule 78  
 jämförelsefaktor 276  
 jämn funktion 145  
 jämnt delbar med *under* *delare* 30  
 jämnt tal 46
- k —  
 kalkyl 118  
 kant 222  
 karakteristika 63  
 karakteristisk ekvation 165  
 kardinalitet *under* *ekvipotenta* 101  
 kardinaltal *se* *antal* 11  
 kartesisk produkt 102  
 kartesiskt koordinatsystem 236  
 kategorisk variabel *under* *variabel* 21  
 katet 201  
 kausalsamband *se* *orsakssamband* 283  
 kedjekurva *se* *kedjelinje* 158  
 kedjelinje 158  
 kedjeregeln 165  
 kelvin 79  
 k-form *under* *räta linjens ekvation* 98  
 Khayyāms triangel *under* *Pascals triangel* 107  
 kilo- *under* *prefix* 83  
 kilogram 79  
 klass *se* *mängd* 17  
 klassbredd *under* *klassindelning* 281  
 klassgräns *under* *klassindelning* 281  
 klassindelning 281  
 klassmitt *under* *klassindelning* 281  
 klot 229  
 klotyta *se* *sfär* 233  
 koefficient 89  
 kolonn *under* *matris* 261  
 kombination 106  
 kombinatorik 106  
 kommutativ *under* *kommutativa lagen* 89  
 kommutativa lagen 89  
 komplement 102  
 komplementhändelse 265  
 komplementvinkel 193  
 komplex analys 146  
 komplexa talplanet 46  
 komplext konjugat 47  
 komplext tal 47  
 komponent 255  
 kon<sub>1</sub> 229  
 kon<sub>2</sub> 229  
 koncentrisk 217  
 konfidensgrad 276  
 konfidensintervall 281  
 konfokala 218  
 konform 242  
 kongruens 243  
 kongruensavbildning 243  
 kongruenstransformation *se* *kongruensavbildning* 243  
 kongruenta 243  
 konisk helix 229  
 konisk yta 230  
 konjugat *se* *komplext konjugat* 47;  
   *se även under* *konjugatregeln* 92  
 konjugataxel *under* *hyperbel* 216  
 konjugatregeln 92

- konjugerat komplext tal *se* *komplext konjugat* 47  
 konjunktion<sub>1</sub> 118  
 konjunktion<sub>2</sub> 119  
 konjunktionstecken 119  
 konkav funktion 146  
 konsekutiva jämna tal *under* *konsekutiva tal* 59  
 konsekutiva tal 59  
 konsekutiva udda tal *under* *konsekutiva tal* 59  
 konstant<sub>1</sub> 15  
 konstant<sub>2</sub> 15  
 konstant avbildning 138  
 konstruktivt bevis 131  
 konsumentprisindex 276  
 kontaktvinkel *se* *hornvinkel* 193  
 kontinuerlig avbildning 138  
 kontinuerlig sannolikhetsfördelning 269  
 kontraposition *under* *indirekt bevis* 130  
 konvergent serie 114  
 konvergent talföljd 114  
 konvex funktion 146  
 konvex mängd 230  
 koordinat 236  
 koordinataxel 236  
 koordinatplan 237  
 koordinatsystem 237  
 korda 181  
 kordasatsen 218  
 korollarium 127  
 korrelationskoefficient<sub>1</sub> 267  
 korrelationskoefficient<sub>2</sub> 276  
 korsande linjer 230  
 korstabell 273  
 kort division 33  
 kovarians 267  
 kraft 71  
 Kroneckerdelta 111  
 kropp<sub>1</sub> (geometrisk) 15  
 kropp<sub>2</sub> (algebraisk) 90  
 krökning 181  
 kub<sub>1</sub> (geometrisk) 222  
 kub<sub>2</sub> (algebraisk) 64  
 kubens fördubbling 132  
 kubik *se* *kub<sub>2</sub>* 64  
 kubikmeter 79  
 kubikrot 64  
 kumulativ frekvens 277  
 kumulerad frekvens *se* *kumulativ frekvens* 277  
 kurva 15  
 kurvanpassning 158  
 kvadrant 237  
 kvadrat<sub>1</sub> (geometrisk) 208  
 kvadrat<sub>2</sub> (algebraisk) 64  
 kvadratisk matris *under* *matris* 261  
 kvadratkomplettering 92  
 kvadratmeter 79  
 kvadrat område 208  
 kvadratrot 64  
 kvadrattal 65  
 kvadratur *under* *integration* 170  
 kvadrera 65  
 kvadrerbar *under* *mätbar* 170  
 kvadreringsreglerna 93  
 kvadriljon *under* *tiopotens* 68  
 kvadrillion *under* *tiopotens* 68  
 kvantifikator 119  
 kvantil 277  
 kvantitet *se* *storhet* 73  
 kvantor *se* *kvantifikator* 119  
 kvartil 277  
 kvartilavstånd 277  
 kvintiljon *under* *tiopotens* 68  
 kvintillion *under* *tiopotens* 68  
 kvot<sub>1</sub> 33  
 kvot<sub>2</sub> 33  
 kvotregeln 165  
 kvotskala *under* *mätskala* 282  
 kägelsnitt *se* *andragradskurva* 213
- 1 —
- Lamékurva 158  
 Laplaceekvationen 165  
 Lebesgueintegralen *under* *integral* 169  
 led 96  
 Leibniz' regel *se* *produktregeln* 167  
 lemma 127  
 lemniskata 182  
 lexikalisk definition *under* *definition* 124  
 liggande stolen 34  
 likabelägna vinklar 193  
 lika tecken *under* *tecken* 24  
 likbent triangel 201  
 likelihood 281  
 likformiga 243  
 likformighet 244  
 likformighetsavbildning 244  
 likformig sannolikhetsfördelning 267  
 likhet 16  
 likhetstecken 16  
 liknämninga bråk 47  
 licksidig triangel 202  
 lillaxel 219  
 limes *se* *gränsvärde* 113  
 limes inferior 114  
 limes superior 115  
 linearitet *under* *lineär<sub>1</sub> avbildning* 138  
 linjär algebra 90  
 linjär<sub>1</sub> avbildning 138  
 linjär<sub>2</sub> avbildning *se* *affin avbildning* 135  
 linjär differentialekvation 166  
 linjär<sub>2</sub> ekvation *se* *förstgradsekvation* 96  
 linjär<sub>2</sub> interpolation 146  
 linjärkombination 256  
 linjär regression 277  
 linjärt beroende 256  
 linjärt<sub>2</sub> ekvationssystem 97  
 linjärt oberoende *under* *linjärt beroende* 256  
 linjärt rum *se* *vektorrum* 259  
 linjal 182

- linje *se* *kurva* 15  
linjeknippe 182  
listform *under* *mängd* 17  
ljusstyrka 71  
ljusår 79  
logaritm 65  
logaritmfunktionen med basen  $b$  65  
logaritmisk spiral 159  
logik 119  
logisk följd 119  
logisk operation 119  
logiskt sann *se* *sann*<sub>2</sub> 120  
logistiska tillväxtekvationen 166  
lokal maximipunkt 146  
lokal minimipunkt 147  
lokalt maximum 147  
lokalt minimum 148  
lådidiagram 273  
lådprincipen 107  
lång division 34  
lägesmått 278  
längd 72  
längdenhet 79  
längd hos en vektor 256  
längd i en rektangel 208  
längdskala *se* *skala*<sub>1</sub> 246  
lösning 97
- m —
- Maclaurinserie 166  
Maclaurins formel 166  
magisk kvadrat 107  
majorant 59  
majorera *under* *majorant* 59  
mantelyta 230  
mantissa 66  
massa 72  
massenhet 80  
matematik 16  
matematisk analys 17  
matematisk förväntan *se* *väntevärde* 271  
matematisk induktion *se* *induktion* 130  
matematisk logik *se* *logik* 119  
matematisk modell 122  
matris 261  
matrisaddition 262  
matrismultiplikation 262  
matrisprodukt 262  
matrissumma 262  
maximipunkt 148  
maximum 148  
maximum av två tal 59  
maximum-likelihood-skattning 281  
medelfel 278  
medelpunkt 219  
medelpunktsvinkel 193  
medelvärde *under* *aritmetiskt medelvärde* 39;  
*se även* *geometriskt medelvärde* 43 och  
*harmoniskt medelvärde* 44  
medelvärdessatsen 166
- medföra *under* *implikation*<sub>1</sub> 118  
median<sub>1</sub> (i en triangel) 202  
median<sub>2</sub> (i statistiken) 278  
mega- *under* *prefix* 83  
mellanled 22  
meromorf funktion 149  
Mersenneprimtal 47  
Mersennetal 47  
meter 80  
metod 133  
MGM *under* *gemensam multipel* 28  
MGN *under* *gemensam nämnare* 42  
mikro- *under* *prefix* 83  
miljard 47  
miljon 48  
milli- *under* *prefix* 83  
milliard *se* *miljard* 47  
million *se* *miljon* 48  
mindre än *under* *olikhetstecken* 60  
mindre än eller lika med *under* *olikhetstecken* 60  
minimipunkt 149  
minimum 149  
minimum av två tal 59  
minnessiffror 22  
minorant 59  
minorera *under* *minorant* 59  
minsta gemensam multipel *under* *gemensam multipel* 28  
minsta gemensam nämnare *under* *gemensam nämnare* 42  
minsta-kvadrat-metoden 282  
minuend *under* *subtraktion* 27  
minustecken 26  
mittpunktsnormal 182  
MK-metoden *under* *minsta-kvadrat-metoden* 282  
ML-skattning *under* *maximum-likelihood-skattning* 281  
modulo 22  
de Moivres formel 48  
mol 80  
momentanhastighet 72  
monom 90  
monoton 150  
Monte-Carlo-metod 267  
De Morgans lagar 101  
motexempel 123  
motsatta strålar 231  
motsatt tal 48  
motsatt vektor 256  
motstående hörn i en triangel 202  
motstående sida i en triangel 202  
motstående vinkel i en triangel 202  
motsägelse 120  
motsägelsebevis 131  
multipel 28  
multipelenhet 80  
multipelprefix 81  
multipelrot 97



multiplicera 28  
 multiplicera in 28  
 multiplicitet 97  
 multiplikand *under multiplikation* 29  
 multiplikation 29  
 multiplikation av matris med skalär 262  
 multiplikation med skalär 256  
 multiplikationsprincipen 107  
 multiplikationstecken 29  
 multiplikativ invers *under invers<sub>1</sub>* 89  
 multiplikator *under multiplikation* 29  
 månghörning 208  
 månghörningsområde 209  
 måttenhet *se enhet* 77  
 mängd 17  
 mängdalgebra 102  
 mängddiagram *se Venn-diagram* 104  
 mängddifferens *se differens<sub>2</sub>* 101  
 mängdlära 102  
 mängdteori *se mängdlära* 102  
 mätbar 170  
 mätetal 72  
 mätfel 86  
 mätskala 282  
 mätvärde *under storhetsvärde* 74

— n —

nano- *under prefix* 83  
 naturlig logaritm 66  
 naturligt tal 49  
 nedre kvartil *under kvartil* 277  
 nedåt begränsad *under begränsad mängd* 57  
 negation<sub>1</sub> 120  
 negation<sub>2</sub> 120  
 negativ axel 237  
 negativt orienterad *under orientering* 237  
 negativt tal 49  
 negativ vridningsriktning *under vridning* 245  
 nepersk logaritm *se naturlig logaritm* 66  
 neutralt element 90  
 newton 83  
 Newton–Raphsons iterationsmetod 167  
 noggrannhet 86  
 nollhypotes 282  
 nollställe 150  
 nollvektorn 256  
 nominalskala *under mätskala* 282  
 noniljon *under tiopotens* 68  
 nonillion *under tiopotens* 68  
 normal 182  
 normalfördelning 268  
 normal mot *under rät vinkel* 195  
 normalvektor 257  
 normerad vektor *under enhetsvektor* 255  
 normerande definition *under definition* 124  
 normering 257  
 norm på ett vektorrum 257  
 numerisk analys 18  
 numerisk derivering 167  
 numerisk integration 170

numerisk serie 111  
 numeriskt uttryck 37  
 numerisk variabel *under variabel* 21  
 nygrad *se gon* 77  
 nämnare 49  
 närmevärde 86  
 nödvändigt villkor *under villkor* 128

— o —

obegränsad mängd 60  
 obegränsat intervall *under obegränsad mängd* 60  
 obekant 91  
 oberoende händelser 265  
 oberoende variabel 138  
 obestämd integral 170  
 observation 283  
 obundet slumpmässigt urval 283  
 Ockhams rakkniv 123  
 odds 268  
 oegentligt bråk *under bråk* 40  
 oförenliga händelser *se disjunkta händelser* 264  
 okorrelerade variabler 283  
 oktaeder 222  
 oktant 237  
 oktiljon *under tiopotens* 68  
 oktillion *under tiopotens* 68  
 olika tecken *under tecken* 24  
 olikhet 60  
 olikhetstecken 60  
 olösligt problem 133  
 olöst problem 133  
 omgivning 183  
 omkrets 183  
 omkrets hos månghörning 209  
 område *under öppen mängd* 191  
 omskriven cirkel 219  
 omskriven månghörning till en cirkel 209  
 omvändning 127  
 omvärd proportionalitet 97  
 omvärd relation 102  
 oordnat par 112  
 operation *se avbildning* 12  
 operator *se avbildning* 12  
 ordinalskala *under mätskala* 282  
 ordinaltal *se ordningstal* 60  
 ordinata *se y-koordinat* 240  
 ordnat par 112  
 ordningsskala *se mätskala* 282  
 ordningstal 60  
 orientering 237  
 origo 238  
 orsakssamband 283  
 ortogonal mot *under rät vinkel* 195  
 ortogonal projektion 244  
 ortonormerad bas 257  
 ortonormerat koordinatsystem 238  
 oskulerande cirkel 183  
 ostensiv definition *under definition* 124  
 OSU *under obundet slumpmässigt urval* 283  
 osäkerhetsintervall *se konfidensintervall* 281

- osäkerhetsmarginal *se felmarginal* 280  
osäkerhetstal *se felmarginal* 280  
oändlighet 37  
oändlighetstecken 38  
oändlig mängd 102
- p —
- $\pi$  50  
palindromtal 50  
parabel 219  
parabolisk cylinder 231  
paraboloid 231  
paradigm 131  
paradigmskifte 131  
paradox 132  
parallella plan 231  
parallella räta linjer 184  
parallellaxiom 184  
parallelepiped 222  
parallellförskjutning *se translation* 248  
parallelogram 209  
parallelogramområde 210  
parallellprojektion 244  
parallelltransversal 204  
parallelltrapets 210  
parallelltrapetsområde 210  
parameter 18  
parameterform 15; 99  
parentestecken 18  
parsek 83  
partiell derivata 167  
partiell integration 170  
parts per million *under ppm* 62  
Pascals triangel 107  
passare 185  
pentagon *se femhörning* 206  
percentil 278  
perfekt tal 50  
periferi *under rand* 186  
periferivinkel *se randvinkel* 194  
periferivinkelsatsen *se randvinkelsatsen* 194  
perimeter *se omkrets* 183  
period 150  
periodisk decimalutveckling *under decimal-  
utveckling* 42  
periodisk funktion 150  
permutation 108  
pi 50  
piko- *under prefix* 83  
plan 185  
planets ekvation 97  
plan geometri 185  
planimetri *under plan geometri* 185  
plan kurva *under kurva* 15  
plant område 185  
plan trigonometri *under trigonometri* 253  
platonisk kropp *se regelbunden polyeder* 224  
platsvärde 50  
plotdiagram *se punktdiagram* 274  
plussa *under addera* 24  
plustecken 25  
Poissonfördelning 268  
pol 238  
polyeder 223  
polygon 210  
polynom 91  
polynomekvation 97  
polynomfunktion 150  
polär form *under komplext tal* 47  
polärt koordinatsystem 238  
population 283  
positionssystem 50  
positiv axel 239  
positivt orienterad *under orientering* 237  
positivt tal 51  
positiv vridningsriktning *under vridning* 245  
poststratifiering 284  
postulat *se axiom* 123  
potens 66  
potensekvation 98  
potensform *under potens* 66  
potensfunktion 151  
potenslag 23  
potensserie 151  
ppm 62  
predikatalkyl 120  
prediktion 284  
prefix 83  
preskriptiv definition *under definition* 124  
primfaktor *se printalsfaktor* 29  
primitiv funktion 171  
prima tal *se printal* 51  
printal 51  
printalsfaktor 29  
prioriteringsregel 23  
prisma 223  
problem 133  
procent 62  
procentenhet 62  
procentform *under procent* 62  
procentsats 63  
produkt 29  
produkt av matris och skalär 263  
produktmängd *under kartesisk produkt* 102  
produktregeln 167  
produkttecken 30  
projektion 244  
projektivt ekvivalenta 245  
projektivt plan 245  
projektiv transformation 245  
promille 63  
proportion *se förhållande* 57  
proportionalitet 98  
proportionalitetskonstant *under proportionalitet*  
98  
proportionell mot *under proportionalitet* 98  
proposition 127  
pröva en lösning 98  
punkt 185

- punktdiagram 274  
 punkttestimat *se punktskattning* 284  
 punktskattning 284  
 pyramid 223  
 Pythagoras' sats 202  
 pythagoreisk summa 203  
 påstående 120
- **q** —  
 quadratrixen 160
- **r** —  
 rad *under matris* 261  
 radian 84  
 radie i en cirkel 220  
 radie i en sfär 231  
 radie i ett klot 231  
 rak cirkulär kon *under kon<sub>2</sub>* 229  
 rak cylinder *under cylinder<sub>2</sub>* 227  
 rakt prisma 223  
 rak vinkel 194  
 ram *se urvalsram* 286  
 ramförteckning *se urvalsram* 286  
 rand 186  
 randpunkt 186  
 randvinkel 194  
 randvinkelsatsen 194  
 rationell funktion 151  
 rationellt tal 51  
 rationellt uttryck 91  
 realdel 52  
 reducera *se förenkla* 22  
 reductio ad absurdum *se motsägelsebevis* 131  
 reella axeln 239  
 reellt tal 52  
 reellvärd funktion 151  
 reflexiv relation 103  
 regelbunden hexaeder *se kub<sub>1</sub>* 222  
 regelbunden månghörning *under månghörning*  
 208  
 regelbunden polyeder 224  
 regelbunden pyramid 225  
 regressionsanalys 284  
 reguladetri 38  
 rektangel 210  
 rektangelmetoden 171  
 rektangelområde 211  
 rekursion 112  
 rekursionsformel 112  
 rekursiv *under rekursion* 112  
 relation 19  
 relativ frekvens 278  
 relativ kumulativ frekvens 278  
 relativt fel 86  
 relativt prima 52  
 rent imaginär 52  
 repeterbarhet 284  
 representativ 284  
 rest 34  
 restriktion 139  
 restsatsen 91
- resultant *se summa av två vektorer* 258  
 Reuleauxkurva 160  
 Riemannintegralen *under integral* 169  
 Riemannsfären *under stereografisk projektion*  
 247  
 Riemannsumma 172  
 rifunktion 151  
 riktad sträcka 257  
 riktningsfält 257  
 riktningskoefficient 186  
 riktningsvinkeln för en stråle 186  
 ring 91  
 romb 211  
 rombrråde 212  
 romerska siffror 52  
 rot 67  
 rotation 245  
 rotationsaxel *under rotationskropp* 232  
 rotationsaxel *under rotationsyta* 232  
 rotationsellipsoid 232  
 rotationshyperboloid 232  
 rotationskropp 232  
 rotationsparaboloid 232  
 rotationssymmetri 246  
 rotationsyta 232  
 rotlag 67  
 rottecken *under kvadratrot* 64  
 rum 19  
 rummet 20  
 rymd *se rum* 19  
 rymden *se rummet* 20  
 rymddiagonal 225  
 rymdgeometri 186  
 rymdområde 186  
 rymdvinkel 73  
 rymdvinkelenhet 84  
 räknelag 23  
 räkneregler 23  
 räknesätt 23  
 räta linjens ekvation 98  
 rätblock 226  
 rät cylinder *under cylinder<sub>2</sub>* 227  
 rät linje 186  
 rät linje parallell med ett plan 232  
 rät vinkel 195  
 rätvinklig triangel 203  
 rätvinkligt koordinatsystem 239  
 rörelsemängd 73
- **S** —  
 sadelpunkt 233  
 sammanfallande *under parallella räta linjer* 184  
 sammanhängande mängd 187  
 sammansatt avbildning 139  
 sammansatt index 278  
 sammansatt tal 53  
 samma tecken *under tecken* 24  
 sampel *se urval* 286  
 samplingsfel *se urvalsfel* 279  
 sann<sub>1</sub> 120

- sann<sub>2</sub> 120  
 sanningsvärdestabell 120  
 sannolikhet 268  
 sannolikhetsfunktion 269  
 sannolikhetsfördelning 269  
 sannolikhetskalkyl *se sannolikhetslära* 269  
 sannolikhetslära 269  
 sannolikhetsurval *under urval* 286  
 satisfiera 99  
 sats 128  
 satskalkyl 121  
 secans 252  
 sekant 187  
 sektor 233  
 sekund 84  
 selektivt urval 284  
 septiljon *under tiopotens* 68  
 septillion *under tiopotens* 68  
 serie 112  
 serietveckling 115  
 sextiljon *under tiopotens* 68  
 sextillion *under tiopotens* 68  
 sfär 233  
 sfäriska koordinater 239  
 sfärisk trigonometri *under trigonometri* 253  
 SGD *under gemensam delare* 33  
 SGF *under gemensam faktor* 28  
 sida<sub>1</sub> (i en triangel) 203  
 sida<sub>2</sub> (i en månghörning) 212  
 sida<sub>3</sub> *se sidoyta* 226  
 sidovinkel 195  
 sidoyta 226  
 SI-enhet 84  
 siffersumma 23  
 siffra 53  
 signifikant avvikelse 285  
 signifikant siffra 54  
 signum *se tecken* 24  
 signumfunktionen 23  
 Simpsons formel 172  
 singletonmängd *under mängd* 17  
 sinus 252  
 sinussatsen 203  
 skala<sub>1</sub> 246  
 skala<sub>2</sub> 246  
 skalär 257  
 skalärprodukt *se inre produkt* 255  
 skalär storhet *under skalär* 257  
 skattning 285  
 skeva linjer *se korsande linjer* 230  
 skilda tecken *under tecken* 24  
 skillnad *se differens*<sub>1</sub> 26  
 skilt från *under olikhetstecken* 60  
 skjuvning 246  
 skära 103  
 skärande plan 233  
 skärningsmängd *se snitt* 103  
 skärningspunkt *under parallella räta linjer* 184  
 slumpförsök 265  
 slumpmarginal *se felmarginal* 280  
 slumpmässigt försök *se slumpförsök* 265  
 slumpmässigt urval *under urval* 286  
 slumpstalstabell 285  
 slumpvariabel 270  
 slutet mängd 187  
 slutet kurva 161  
 slutet utsaga 121  
 slutet yta 234  
 slutet intervall 60  
 slutet klot *under klot* 229  
 slutledning 121  
 slutsats *under implikation*<sub>1</sub> 118  
 snett bråkstreck *under bråkstreck* 30  
 snitt 103  
 solid torus *under torus* 235  
 sort *under enhet* 77  
 sortomvandling *under enhetsbyte* 77  
 spalt *under matris* 261  
 specialfall *under generalisering* 126  
 specifik vikt *under densitet* 69  
 spegling 247  
 spelteori 20  
 spets 229  
 spetsig vinkel 196  
 spetsvinklig triangel 203  
 spiral 161  
 spridning 279  
 spridningsdiagram *se punktdiagram* 274  
 spridningsmått 279  
 språng 136  
 språngfunktion 152  
 stam-blad-diagram 274  
 stambråk 54  
 standardavvikelse hos en sannolikhetsfördelning 270  
 standardavvikelse hos ett slumpmässigt urval 279  
 standardiserad normalfördelning 268  
 stapeldiagram 274  
 startvärde *se begynnelsevärde* 162  
 stationär punkt 168  
 statistik 20  
 statistisk inferens *se inferens* 281  
 statistisk slutledning *se inferens* 281  
 statistiskt material 285  
 statistiskt test *se hypotesprövning* 281  
 steradian 84  
 stereografisk projektion 247  
 stereometri *under rymdgeometri* 186  
 stickprov *se urval* 286  
 stickprovsvarians *se varians hos ett slumpmässigt urval* 279  
 stipulativ definition *under definition* 124  
*Stoikheía* *under euklidisk geometri* 177  
 stokastisk variabel *se slumpvariabel* 270  
 stolpdiaqram 275  
 storaxel 220  
 storcirkel 234

- storhet 73  
 storhetsvärde 74  
 storlek hos en vektor *se längd hos en vektor* 256  
 stratifierat urval 285  
 stratum 285  
 strikt avtagande 141  
 strikt olikhet *under olikhetstecken* 60  
 strikt växande 154  
 strofoid 161  
 stråle 188  
 sträcka 188  
 sträckas förlängning 189  
 sträckning 248  
 sträng olikhet *under olikhetstecken* 60  
 strängt avtagande 141  
 strängt växande 154  
 större än *under olikhetstecken* 60  
 större än eller lika med *under olikhetstecken* 60  
 största gemensam delare *under gemensam delare* 33  
 största gemensam faktor *under gemensam faktor* 28  
 substansmängd 74  
 substituera *se sätta in* 92  
 substituering *under sätta in* 92  
 substitutionsmetoden 99  
 subtrahend *under subtraktion* 27  
 subtrahera 26  
 subtraktion 27  
 subtraktionsformel 139  
 subtraktionstecken *under minustecken* 26  
 summa 25  
 summa av en serie 115  
 summa av två vektorer 258  
 summand *under addition* 25  
 summatecken 25  
 summera *se addera* 24  
 superellips *under Lamékurva* 158  
 supplementvinkel 196  
 supremum 61  
 surjektion 140  
 surjektiv avbildning *se surjektion* 140  
 svarsbortfall 285  
 symbolisk logik *under logik* 119  
 symmetri 248  
 symmetricentrum 248  
 symmetrilinje 248  
 symmetriplan 248  
 symmetrisk funktion 152  
 symmetrisk relation 103  
 systematiskt fel *se bias* 280  
 systematiskt urval 286  
 säkerhetsintervall *se konfidensintervall* 281  
 sätta in 92
- **t** —
- tabell 275  
 takfunktionen *under heltalsdel* 44  
 tal 54  
 tal i blandad form 54  
 tal i decimalform 54  
 tal i flyttalsform 55  
 tal i grundpotensform 68  
 tal i potensform *under potens* 66  
 tal i procentform *under procent* 62  
 tal i tiopotensform 68  
 talaxel *se tallinje* 61  
 talföljd 112  
 tallinje 61  
 talpar 113  
 talsystem 55  
 talteori 20  
 tangens 253  
 tangenssatsen 204  
 tangent 189  
 tangentmetoden *se Eulers stegmetod* 164  
 tangentplan till en yta 234  
 tangera *under tangent* 189  
 tangerande kurvor 190  
 tangeringspunkt *under tangent* 189  
 Tartaglias triangel *under Pascals triangel* 107  
 Taylorserie 168  
 Taylors formel 168  
 tecken 24  
 teckenregel 24  
 teckenschema 152  
 temperatur 74  
 teorem *se sats* 128  
 tera- *under prefix* 83  
 term 26  
 terminologisk definition *under definition* 124  
 terrasspunkt 169  
 tessellation *under tessellera* 190  
 tessellera 190  
 tesserakt 234  
 tetraeder 226  
 tid 75  
 tidsenhet 85  
 tidsserie 285  
 tillhöra 103  
 tillräckligt villkor *under villkor* 128  
 tillväxtfaktor *se förändringsfaktor* 276  
 tilläggsenhet 85  
 tiokamrater 26  
 tiologaritm 68  
 tiopotens 68  
 tiosystemet *se decimalsystemet* 41  
 tomma mängden 103  
 topologi<sub>1</sub> 190  
 topologi<sub>2</sub> 190  
 topptriangelsatsen 204  
 toppvinkel i en rak cirkulär kon 234  
 torus 235  
 totalundersökning 285  
 transcendent 55  
 transform *se bild* 13  
 transformation *se avbildning* 12  
 transitiv relation 104  
 translät 248

- translatera 248  
 translation 248  
 transponat 263  
 transponera 263  
 transversal 191  
 transversalaxel *under hyperbel* 216  
 transversalsatsen 204  
 trapetsmetoden 172  
 trappan 34  
 trappfunktion 153  
 tredjederivata *under derivata* 162  
 tredje kvartilen *under kvartil* 277  
 tredjerot *se kubikrot* 64  
 trehörning *se triangel* 205  
 triangel 205  
 triangelområde 205  
 triangeltal 55  
 trigonometri 253  
 trigonometriska ettan 254  
 trigonometrisk funktion 254  
 triljon 56  
 trinom *under polynom* 91  
 trippel *under följd* 110  
 trivial lineärkombination *under lineärkombination* 256  
 trokoid 162  
 trubbig vinkel 197  
 trubbvinklig triangel 205  
 trädidiagram 270  
 tvåsystemet *se binära talsystemet* 40  
 tyngd *under massa* 72  
 typ av matris 263  
 typvärde 279  
 tärtdiagram *se cirkeldiagram* 272  
 täckningsfel 285  
 täljare 56  
 täthet *under densitet* 69  
 täthetsfunktion 270
- U —**
- udda funktion 153  
 udda tal 56  
 unbiased *under bias* 280  
 undersumma 173  
 undre begränsning *se minorant* 59  
 undre gränsvärde *se limes inferior* 114  
 undre kvartil *under kvartil* 277  
 union 104  
 uppdelning i faktorer *se faktorisera* 27  
 uppdelning i primfaktorer 30  
 uppräknelig mängd 104  
 uppåt begränsad *under begränsad mängd* 57  
 urbild 20  
 urval 286  
 urvalsaxiomet 104  
 urvalsfel 279  
 urvalsram 286  
 urvalsundersökning 286  
 utbrytning *under bryta ut* 22  
 utelämnat tecken 24
- utfall 265  
 utfallsrum 265  
 utsaga *se påstående* 120  
 uttryck 21
- V —**
- variabel 21  
 variabelbyte 173  
 varians hos en sannolikhetsfördelning 270  
 varians hos ett slumpmässigt urval 279  
 variationsbredd 280  
 variationsvidd *se variationsbredd* 280  
 varv 85  
 vektor 258  
 vektorfält 259  
 vektormultiplikation 259  
 vektor parallell med en rät linje 259  
 vektor parallell med ett plan 259  
 vektorrum 259  
 Venndiagram 104  
 vertex 191  
 vertikalvinklar 197  
 vetenskaplig revolution *se paradigmskifte* 131  
 vikt<sub>1</sub> 75  
 vikt<sub>2</sub> 280  
 viktat aritmetiskt medelvärde 56  
 viktat medelvärde *se viktat aritmetiskt medelvärde* 56  
 viktenhet *under massenhet* 80  
 villkor 128  
 vinkel 197  
 vinkelben *under vinkel* 197  
 vinkelenhet 85  
 vinkelfrekvens 75  
 vinkel i en månghörning 212  
 vinkel i en triangel 205  
 vinkeln mellan ett plan och en rät linje 235  
 vinkeln mellan två plan 235  
 vinkeln mellan två räta linjer i planet 198  
 vinkeln mellan två räta linjer i rummet 235  
 vinkeln mellan två vektorer 260  
 vinkelns tredelning 133  
 vinkelrät mot *under rät vinkel* 195  
 vinkelspets *under vinkel* 197  
 vinkelsumma 212  
 vinkeltrögen *se konform* 242  
 VL *under vänstra ledet* 99  
 volym 75  
 volymenhet 85  
 volymskala 249  
 vridning *se rotation* 245  
 vridningsriktning 249  
 vågrätt bråkstreck *under bråkstreck* 30  
 vägningstal *se vikt<sub>2</sub>* 280  
 välformad teckensträng *under kalkyl* 118  
 vänsterderivata 169  
 vänsterinvers *under invers<sub>1</sub>* 89  
 vänsterledet *se vänstra ledet* 99  
 vänsteromgivning 61  
 vänsterändpunkt 61

vänstra ledet 99  
väntevärde 271  
värde 21  
värdeförråd *se bildmängd* 13  
värdeområde *se bildmängd* 13  
värdesiffror *se signifikant siffra* 54  
värdetabell 153  
växande funktion 154

— **W** —  
watt 85  
wesselska talplanet *se komplexa talplanet* 46

— **X** —  
 $x$ -axel 240  
 $x$ -koordinat 240

— **Y** —  
Yang Huis triangel *under Pascals triangel* 107  
 $y$ -axel 240  
 $y$ -koordinat 240  
yokto- *under prefix* 83  
yotta- *under prefix* 83  
yta 21  
yttenhet *under areaenhet* 76  
yttervinkel<sub>1</sub> 205  
yttervinkel<sub>2</sub> 212  
yttervinkelsatsen 205  
ytte alternatvinklar *under alternatvinklar* 192

— **Z** —  
 $z$ -axel 240  
zepto- *under prefix* 83  
zetta- *under prefix* 83  
 $z$ -koordinat 240

— **Ä** —  
äktad delmängd *under delmängd* 100  
ändlig mängd 105  
ändpunkt 61

— **Ö** —  
öppen mängd 191  
öppen utsaga 121  
öppet intervall 62  
öppet klot *under klot* 229  
öppet problem *se olöst problem* 133  
överslagsräkning 24  
översumma 173  
överuppräknlig mängd 105  
övre begränsning *se majorant* 59  
övre gränsvärde *se limes superior* 115  
övre kvartil *under kvartil* 277

## 17. Några beteckningar

$f: X \rightarrow Y$ , mängden  $X$  avbildas in i mängden  $Y$  av avbildningen  $f$  *under avbildning* 12  
 $f(x)$ , bilden av punkten  $x$  under avbildningen  $f$  *under avbildning* 12  
 $f: x \mapsto y$ , punkten  $x$  avbildas på punkten  $y$  av avbildningen  $f$  *under avbildning* 12  
 $\equiv$ , identitet *under likhet* 16  
 $=$ , likhetstecken 16  
 $\approx$ , approximativ likhet *under likhetstecken* 16  
 $\doteq$ , approximativ likhet *under likhetstecken* 16  
 $\{a, b\}$ , mängden av  $a$  och  $b$  *under mängd* 17  
 $\{x \in A; P(x)\}$ , mängden av alla  $x$  i  $A$  som uppfyller villkoret  $P(x)$  *under mängd* 17  
 $\equiv$ , modulo 22  
 $+$ , plustecken 25  
 $-$ , minustecken 26  
 $\cdot, \times$ , multiplikationstecken 29, 259  
 $/, -$ , bråkstreck 30  
 $/, :$ , divisionstecken 32  
 $\infty$ , oändlighetstecken 38  
 $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ , golvfunktionen *under heltalsdel* 44  
 $x \mapsto \lceil x \rceil$ , takfunktionen *under heltalsdel* 44  
 $\bar{z}, z^*$ , komplext konjugat 47  
 $[a, b]$ , slutet intervall 60  
 $]a, b[$ , öppet intervall 62  
 $x \vee y, \max(x, y)$ , maximum av två tal 59  
 $x \wedge y, \min(x, y)$ , minimum av två tal 59  
 $\neq$ , skild från *under olikhetstecken* 60  
 $<$ , mindre än *under olikhetstecken* 60  
 $>$ , större än *under olikhetstecken* 60  
 $\leq$ , mindre än eller lika med *under olikhetstecken* 60  
 $\geq$ , större än eller lika med *under olikhetstecken* 60  
 $\sqrt{\quad}$ , rottecken *under rot* 67  
 $^\circ$ , grad *under grad* 77  
 $\subset$  *under delmängd* 100  
 $\supset$  *under delmängd* 100  
 $\cap$ , snitt av två mängder *under snitt* 103  
 $\bigcap$ , snitt av en familj av mängder *under snitt* 103  
 $\cup$ , union av två mängder *under union* 104  
 $\bigcup$ , union av en familj av mängder *under union* 104  
 $\binom{n}{k}$ , binomialkoefficient 106  
 $n!$ , faktultet 106  
 $(a, b)$ , ordnat par 112  
 $f(x) \rightarrow b$  då  $x \rightarrow a$  *under gränsvärde* 113  
 $P \vee Q, P$  eller  $Q$  *under disjunktion*<sub>1</sub> 116  
 $\Leftrightarrow$ , ekvivalenspil 117  
 $\Rightarrow$ , implikationspil 118  
 $P \wedge Q, P \& Q, P$  och  $Q$  *under konjunktion*<sub>1</sub> 118  
 $''$ , bis *under andraderivata* 162  
 $'$ , prim *under derivata* 162  
 $\int$ , integraltecken *under integral* 169  
 $x \cdot y, \langle x, y \rangle$ , inre produkt 255

$\forall$ , allkvantifikatorn under *kvantifikator* 119  
 $\aleph$ , alef under *alef-noll* 100  
arccos, arcus cosinus under *arcusfunktion* 250  
arccot, arcus cotangens under *arcusfunktion* 250  
arcsin, arcus sinus under *arcusfunktion* 250  
arctan, arcus tangens under *arcusfunktion* 250  
 $\arg z$ , ett argument för  $z$  under *argument<sub>2</sub>* 192  
 $\mathbf{C}$  under *komplext tal* 47  
 $\mathbb{C}$  under *komplement* 102  
cos, *cosinus* 250  
cosec, *cosecans* 250  
cot, *cotangens* 251  
 $e$ , basen för de naturliga logaritmerna under  $e$  113  
 $\exists$ , existenskvantifikatorn under *kvantifikator* 119  
 $\in$  under *tillhöra* 103  
 $\ni$  under *tillhöra* 103  
exp, *exponentialfunktionen* 143  
 $i$ , *imaginär enhet* 45  
Im, *imaginärdel* 45  
lim, *gränsvärde* 113  
lim inf, lim, *limes inferior* 114  
lim sup,  $\overline{\lim}$ , *limes superior* 115  
log, logaritmfunktionen under *logaritm* 65  
mod, *modulo* 22  
 $\mathbf{N}$  under *naturligt tal* 49  
 $\mathcal{P}(A)$ , familjen av alla delmängder av  $A$  under *delmängd* 100  
 $\mathbf{Q}$  under *rationellt tal* 51  
 $\pi$ , talet pi under *pi* 50  
 $\prod$ , *produkttecken* 30  
 $\mathbf{R}$  under *reellt tal* 52  
Re, *realdel* 52  
 $\sum$ , *summatecken* 25  
sec, *secans* 252  
sgn, *signumfunktionen* 23  
sin, *sinus* 252  
tan, *tangens* 253  
 $\mathbf{Z}$  under *heltal* 44