Fouriermetoder: Vad är viktigast?

Christer O. Kiselman

Innehåll:

1. Inledning

Kursen *Fouriermetoder* hösten 2001 riktar sig framför allt till teknologer på utbildningsprogrammen *Miljö- och vattenteknik* och *Kemiteknik.* I denna korta sammanfattning försöker jag beskriva vad som är viktigast i kursen. Den är tänkt som en ledtråd under repetitionen och förberedelsen inför tentan den 18 oktober. Ett varmt tack till Nina Eriksson, som föreslog att jag skulle skriva något sådant!

Först något om vad som styr kursens inriktning och innehåll. Ibland träffar man på någon som tror att det är boken som definierar kursen, men det är en missuppfattning. Det är inte heller gamla tentor som definierar kursen. Det som styr är de mål som finns uppsatta i Högskoleförordningen för alla utbildningar och speciellt civilingenjörsutbildningen, samt de mål som Uppsala universitet fastställt lokalt. Se Studiehandboken.

De matematiska begreppen är ofta abstrakta. Därför försöker jag motivera deras förekomst i kursen genom att peka på hur de kan användas inom naturvetenskap och teknik. Ett exempel på detta är att abstrakta begrepp som Fouriertransform och frekvens i vissa tillämpningar kallas spektrum respektive färg eller tonhöjd. (Vad kan vara mer åskådligt än färg?) Jag försöker betona förståelse av begrepp. Det sker på bekostnad av uträkningar. Idén bakom denna prioritering är att kunskap om ett begrepp varar längre än kunskap om en räknemetod.

Använd denna skrift så här: läs rakt fram. Om det som står i ett visst stycke är klart och om du kan lösa ett enkelt problem som handlar om de nämnda begreppen så gå vidare. Om det är något som inte är klart, så slå upp det i något av de tre läromedlen Sollervall och Styf [1999], Kiselman [2001a, 2001b]. Och träna på ett typtal.

2. Laplacetransformationen

Laplacetransformationen syftar till att lösa begynnelsevärdesproblem för differentialekvationer, dvs. problem där något är känt vid tiden noll och där man önskar beräkna det för alla tider efter noll. Den passar alltså för problem på en halvaxel. Men den kan användas inte bara för differentialekvationer, utan även för vissa integralekvationer, och speciellt då faltningsekvationer. En svart låda med en insignal och en utsignal ges ofta av en faltningsoperator, nämligen om utsignalen beror lineärt på insignalen, om en fördröjning av insignalen ger motsvarande fördröjning av utsignalen, och om en viss kontinuitet i beroendet föreligger.

Man bör ha klart för sig att det finns funktioner som växer så snabbt att de inte har en Laplacetransform. Ett exempel är $u(t) = e^{t^2/2}$, som löser den enkla differentialekvationen $u' - tu = 0$. En sådan differentialekvation kan alltså inte lösas med hjälp av Laplacetransformationen, åtminstone inte utan specialknep...

Vidare bör man känna till transformen för en derivata, för en förskjutning åt höger av funktionen, samt vad som händer om funktionen multipliceras med ett polynom eller en exponentialfunktion; likaså transformen av en faltningsprodukt. De exakta formlerna för dessa transformer finns ju i tabeller som man kan kolla i, så man behöver inte kunna alla utantill, men man bör förstå hur formlerna fungerar.

Begreppet stabilitet hos ett system är viktigt. Man bör kunna definitionen, speciellt för differentialekvationer med konstanta koefficienter. Vidare bör man kunna ett nödvändigt och tillräckligt kriterium på koefficienterna för att ekvationen skall vara stabil. Skilj på definition och sats.

Man bör veta att exponentialpolynomen har transformer som är rationella funktioner P/Q där nämnaren Q har högre grad än täljaren P, samt hur man går från sådana rationella funktioner till exponentialpolynomen. Den rationella funktionen 1 är alltså inte transformen av någon funktion. Men man kan införa ett idealt element, Diracmåttet δ, som har transformen 1.

3. z-transformationen

Följder är viktiga eftersom de är funktioner av ett heltalsargument, och heltalsargument blir i vår tid allt viktigare genom att många signaler digitaliseras. Vidare finns många data bara vid diskreta tidpunkter, exempelvis börskurser.

Fouriertransformen av en följd kallas ofta för z-transformen. Det är här bara fråga om att variabeln t ersätts av $z = e^{it}$:

$$Y(z) = \sum_{n\in\mathbf{N}} y(n)z^{-n} = \sum_{n\in\mathbf{N}} y(n)e^{-int} = \hat{y}(t) = Y(e^{it}).$$

Här bör man känna till transformerna för elementära följder som $y = (a^n)_{n\in\mathbf{N}}$ (transformen $Y(z) = z/(z-a)$ fås genom att summera en geometrisk serie), vad som händer när följden förskjuts (translateras) åt höger eller vänster eller multipliceras med en potens av index. Sådana elementära följder har transformer som är rationella funktioner och man bör kunna gå tillbaka från de rationella funktionerna till följderna.

Begreppet stabilitet hos ett system är viktigt även för differensekvationer. Man bör kunna definitionen, speciellt för differensekvationer med konstanta koefficienter. Vidare bör man kunna ett nödvändigt och tillräckligt kriterium på koefficienterna för att ekvationen skall vara stabil.

4. Fourierserier

Fourierserierna är egentligen Fouriertransformen för periodiska funktioner. Periodiska funktioner uppträder inom både naturen och tekniken. Perioderna kan vara korta som hos röntgenstrålning och ultraviolett ljus, något längre som hos ljud, och långa som hos istiderna. (Röntgenstrålning har frekvenser upp till $3 \cdot 10^{20}$ Hz, istiderna kanske 10^{-12} Hz.)

När man "räknar ut en Fourierserie" så är det egentligen bara Fourierkoefficienterna som man beräknar. Man skriver att signalen f med perioden 2π har Fourierserien $\sum c_n e^{int}$. Med det menar man alltså bara att man har bestämt koefficienterna c_n, $n \in \mathbf{Z}$; man påstår inte att serien konvergerar, och inte heller att den konvergerar mot f. Men om man har litet tur, så gör den det. Man bör känna till någon klass av snälla funktioner vilkas Fourierserier konvergerar mot just funktionen (C^1 är en sådan klass, men knyckar och vissa speciella språng kan tillåtas).

Här bör man känna till ortogonalitetsegenskaperna hos exponentialfunktionerna $t \mapsto e^{int}$ och de trigonometriska funktionerna. Vidare bör man kunna gå från formen $\sum e^{in\Omega t}$ till formen $\frac{1}{2}a_0 + \sum_1^\infty (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t)$ och tillbaka. Jämna funktioner har inga sinustermer i sin Fourierserie; udda funktioner inga cosinustermer – det är arbetsbesparande att känna till detta.

Parsevals formel (två versioner) ger effekten hos en signal uppdelad på de olika frekvenserna:

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{n\in\mathbf{Z}} |c_n|^2 = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right).$$

Man bör kunna gå lätt från formen $a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t$ till formen

$$A_n \cos(n\Omega t + \alpha_n) = A_n \cos(n\Omega(t - t_n))$$

och omvänt, alltså behärska amplitud och fasvinkel. (Fasvinkeln $\alpha_n = -n\Omega t_n$ talar om läget vid tiden noll; tiden $t_n = -\alpha_n/n\Omega$ talar om när signalen är störst.)

Frekvensfiltrering innebär att Fourierkoefficienterna multipliceras med en funktion av index, alltså en faltning av signalen.

5. Fouriertransformationen

Fouriertransformen av en funktion av en reell variabel är en annan funktion av en reell variabel. För att konkretisera kallar vi ofta den första variabeln tid, och då blir den andra invers tid. Det är alltså bra att inte använda samma namn på dessa två variabler. Och om den första funktionen är en signal, så är den andra dess spektrum. Språkbruket kommer från fallet att den första signalen är ljus och dess transform ett synligt spektrum med alla spektralfärgerna rött, orange, gult, grönt, blått, indigo, violett, men det utvidgas till alla andra fall, så att man även talar om spektrum av ljud och andra signaler. Men variabeln kan även vara en längd, och då blir den andra variabeln en invers längd.

Här bör man kunna Fouriertransformen av den karaktäristiska funktionen av ett intervall, och mera allmänt av en avhuggen cosinussvängning. Man bör veta hur den senare ser ut: ett amplitudspektrum som har två toppar och några små krusningar – var ligger topparna och hur höga är de, hur breda är de? Genom att kombinera två eller tre sådana svängningar kan man syntetisera vokalljud.

Relationen mellan tonhöjder mäts ofta med hjälp av två-logaritmen för kvoten mellan de två frekvenserna: en oktav motsvarar en fördubbling av frekvensen, två och en halv oktav en höjning med en faktor $5,6$ osv. Antalet oktaver som skiljer tonhöjden β från α är alltså $\log_2 \beta/\alpha$.

Om vi såg som vi hör, så skulle endast personer med absolut gehör kunna avgöra huruvida något är rött; de som inte har absolut gehör skulle bara kunna se att gult har högre frekvens än rött. Hur många oktaver över rött ligger violett? Om vi hörde som vi ser, så skulle alla som inte är färgblinda ha absolut gehör, och språkljuden kanske vara signaler med en välbestämd tonhöjd. Nu karaktäriseras i stället vokalerna av en viss kombination av svängningar med vissa kvoter mellan de ingående frekvenserna och signalstyrkorna.

Klockkurvan $t \mapsto e^{-t^2/a}$ har en Fouriertransform som också är en klockkurva. Spridningen är $\sigma = \sqrt{a/2}$. Transformens spridning blir $1/\sigma$.

Vidare bör man känna till Fouriertransformen av enkla funktioner som $t \mapsto e^{-a|t|}$ och $t \mapsto 1/(1 + bt^2)$. (De finns i tabeller, så man behöver inte kunna dem utantill, men däremot förstå hur knycken i den första ger ett visst avtagande i oändligheten hos den andra.)

Frekvensfiltrering innebär att spektrum multipliceras med en funktion av frekvensen, alltså en faltning av signalen.

6. Spektrogram

Amplitudspektrum och fasvinkelspektrum bör man känna till, och speciellt då hos avhuggna cosinussvängningar. Man bör kunna hur spektrum av brus, smällar och några liknande signaler ser ut.

Heisenbergs osäkerhetsrelation medför att man inte kan tala om vilken frekvens en signal har vid en viss tidpunkt. Spektrogrammet är ett försök att trotsa detta förbud: man kan tala om vilken frekvens en signal har under ett visst tidsintervall. Sammanfogningen av alla spektra under flera olika tidsintervall kallas spektrogram. Kortare tidsintervall leder till sämre upplösning i frekvensrummet. Spektrogram för fågelsång uppvisar många exempel på olika signalers spektrala egenskaper.

7. Tillämpningar på differentialekvationer

Laplacetransformen kan tillämpas lika väl på system av differentialekvationer – dessa är ju bara en differentialekvation för vektorvärda funktioner.

Differentialekvationer med till exempel konstanta koefficienter och periodiskt högerled kan ofta lösas med Fourierserier.

Värmeledningsekvationen $u_t = \kappa u_{xx}$ kan behandlas med variabelseparation. Då får man två ordinära differentialekvationer som kanske kan lösas. Här är ofta x en variabel som varierar i ett begränsat intervall, men då kan man fortsätta funktionen genom spegling så att den blir definierad på hela reella axeln; den kan vara udda eller jämn – man får välja fortsättning som passar till problemet.

Vågekvationen $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ kan ibland lösas medelst Laplacetransformering i tiden t. Då får man en ordinär differentialekvation i den kvarvarande variabeln x. Men man kan också använda Fourierserier, nämligen om man fortsätter begynnelsevärden och randvärden periodiskt. Variabelseparation leder nämligen till ordinära differentialekvationer, och dessa löses av sinus- eller cosinussvängningar, eller av exponentialfunktioner.

Referenser

KISELMAN, Christer O.

2001a *Faltning av följder och funktioner.* Uppsala universitet, Matematiska institutionen, 2001 08 28. 7 sidor.

2001b *Spektrogram.* Uppsala universitet, Matematiska institutionen, 2001 09 16. 9 sidor.

2001c *Fouriermetoder: Vad är viktigast?* Uppsala universitet, Matematiska institutionen, 2001 09 23. 4 sidor. (Denna uppsats innehåller en referens till en viktig skrift som underlättar repetitionen av kursen *Fourierserier.*)

SOLLERVALL, Håkan, & STYF, Bo

1999 *Transformteori för ingenjörer.* Skebobruk: Bokförlaget Kub. ISBN 91-89104-03-X.

Författarens adress: Uppsala universitet, Matematiska institutionen,
Box 480, SE-751 06 Uppsala.
Telefon: 018-4713216 (a); 018-300708 (h) Fax: 018-4713201
Datoradress: kiselman@math.uu.se URL: http://www.math.uu.se/~kiselman