SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska Matematikersamfundet

Kvalificeringstävling den 4 oktober 2005

Förslag till lösningar

1. En rörledning ska dras från A till B, en sträcka på 2005 m, genom att man sätter samman rör av längderna 13 och 17 m. Det är bara möjligt att koppla ihop rör av olika längd, dvs i en rörledning måste vartannat rör ha längden 13 m, vartannat längden 17 m. Varje skarv är 1 m lång, dvs vid övergången från ett rör till ett annat har vi en överlappning om 1 m.
Är det möjligt att dra ledningen utan att behöva kapa något rör?

Lösning: Följande fyra sätt att bilda rörledningar från A till B är tänkbara (rörens positioner markeras med resp rörlängder och rörskarvar med streck):

$$\begin{array}{rl}
(i) & 13-17-13-17-\ldots-13-17-13 \\
(ii) & 17-13-17-13-\ldots-17-13-17 \\
(iii) & 13-17-13-17-\ldots-13-17 \\
(iv) & 17-13-17-13-\ldots-17-13
\end{array}$$

I fallen (i) och (ii) har vi ett udda antal rör, säg $2k+1$ stycken; i fallen (iii) och (iv) har vi ett jämnt antal rör, säg $2k$ stycken. Vi noterar att (iv) beskriver samma rörledning som (iii), men i omvänd ordning.
I fall (i), exempelvis, ligger rören på följande sätt:

I fall (i) har vi ett rör av längden 13 m följt av k par, där varje par innehåller ett rör av vardera slaget. Antalet skarvar är $2k$, vilket betyder $2k$ m av outnyttjad rörledning. Totala längden blir därför $13+30k-2k = 13+28k$ m.
I fall (ii) har vi ett rör av längden 17 m följt av k par av rör, ett av vardera slaget, och den totala längden blir $17+28k$.
I fallen (iii) och (iv) har vi k par av rör. Vi har $2k-1$ skarvar, vilket betyder att den totala längden nu blir $30k-(2k-1) = 28k+1$.
Vi ska alltså undersöka om någon av ekvationerna

$$\begin{aligned}
28k+13 &= 2005 \\
28k+17 &= 2005 \\
28k+\ \ 1 &= 2005
\end{aligned}$$

har en heltalslösning i k. Vi finner att ekv 2, som svarar mot fall (ii), har heltalslösningen $k=71$, vilket betyder att ledningen inleds och avslutas med ett rör av längd 17 m. Inget rör behöver alltså kapas. Ingen av de båda övriga ekvationerna har en heltalslösning i k. Den rörkombination som den funna lösningen leder till är alltså entydig.

Svar: Ja, det går om ledningen börjar och slutar med ett rör av längden 17 m.

2. Bestäm alla reella tal a sådana att ekvationen

$$x^2 + 2x + 10 - 12a + 4a^2 = 0$$

har minst en reell lösning.

Lösning: Vi kompletterar de första termerna i vänsterledet till en kvadrat:

$$x^2 + 2x + 1 + 9 - 12a + 4a^2 = 0$$

och får

$$(x+1)^2 + 9 - 12a + 4a^2 = 0.$$

Här kan $4a^2 - 12a + 9$ skrivas som $(2a-3)^2$ och ekvationen övergår i

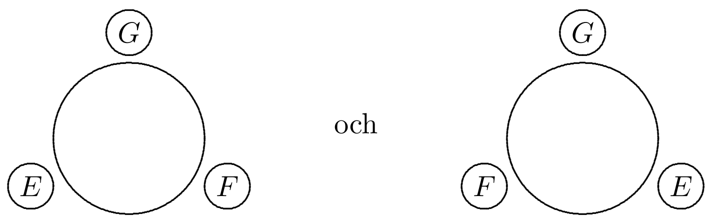
$$(x+1)^2 = -(2a-3)^2$$

I denna ekvation är vänsterledet ≥ 0 för alla x, vilket betyder att högerledet måste vara icke-negativt för att det ska finnas en reell lösning. Men högerledet är ≤ 0 för varje a, med likhet endast för $a = \frac{3}{2}$. Med detta värde på a får vi ekvationen $(x+1)^2 = 0$, som har dubbelroten $x = -1$.

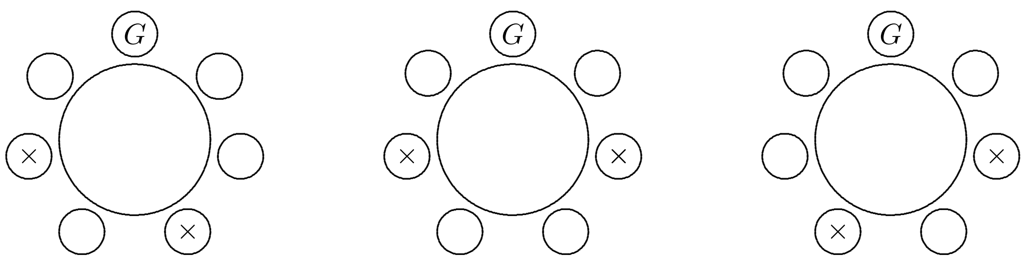
Svar: $a = \frac{3}{2}$

3. Amanda och Botvid är medlemmar i Gullholmens Matematikförening och skall arrangera en arbetsmiddag för sig själva och ytterligare 5 medlemmar: Camilla, Daniela, Efraim, Folke och Göran. De sju personerna skall placeras kring ett runt bord. Eftersom Efraim, Folke och Göran är osams, gäller att ingenstans får två av dessa tre sitta bredvid varandra. I övrigt finns inga restriktioner beträffande bordsplaceringen. På hur många sätt kan denna göras? Placeringar som skiljer sig endast genom en rotation kring bordet betraktas som samma.

Lösning: Vi betecknar de 7 medlemmarna med resp A, B, C, D, E, F och G. Eftersom vi kan bortse från rotationer, kan vi fixera positionen för en av medlemmarna, t ex för G, och variera de övrigas placeringar i förhållande till G. Vi placerar först ut stolarna för E och F. Vi har två grundlägen:



Minst en stol ska finnas i varje mellanrum, dvs för varje grundläge har vi tre sätt att fördela de fyra sista stolarna; vi ska ha två stolar i en lucka och en stol i var och en av de övriga (stolarna som är reserverade för E och F är nedan markerade med $\times$).



För varje grundläge och stolsfördelning gäller det att placera ut A, B, C och D på de tomma stolarna (dvs över de ofyllda ringarna). För A finns det fyra möjliga placeringar. När A har valt sin stol återstår tre möjliga placeringar för B. När det är C :s tur finns det två stolar att välja emellan, medan D får ta den sista stolen. Antalet sätt att placera de fyra medlemmarna är därför $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Sammanfattningsvis har vi 2 grundlägen, 3 sätt att fördela de 4 sista stolarna för varje grundläge och 24 placeringar av medlemmarna A, B, C och D för varje grundläge och stolsfördelning, vilket ger totalt $2 \cdot 3 \cdot 24 = 144$ bordsplaceringar.

Svar: 144 bordsplaceringar

4. Bestäm alla reella lösningar till ekvationen $f\big(f(x)\big) = x$, där $f(x)$ är polynomet $x^2 - 2x + 2$.

Lösning: Polynomet kan skrivas $f(x) = (x-1)^2+1$. Vi söker lösningar till ekvationen

$$(f(x) - 1)^2 + 1 = x,$$

eller

$$\big((x-1)^2 + 1 - 1\big)^2 + 1 = x,$$

som kan förenklas till

$$(x-1)^4 = x - 1.$$

Om vi för överskådlighetens skull, sätter $y = x - 1$ får vi ekvationen

$$y(y^3 - 1) = 0,$$

som efter faktorisering av parentesen övergår i

$$y(y-1)(y^2 + y + 1) = 0.$$

Denna ekvation har de reella rötterna $y = 0$ och $y = 1$, dvs $x = 1$ och $x = 2$. Eftersom $y^2 + y + 1 = (y + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$, är den sista parentesen i ekvationen positiv för alla y. Det finns därför inga ytterligare reella rötter till ekvationen.

Svar: Två reella rötter: $x = 1$ och $x = 2$

5. Låt $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vara heltal med summan 1. Kan polynomet

$$f(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

uppfylla att $f(3) = 2005$?

Lösning: Insättning av $x = 3$ ger

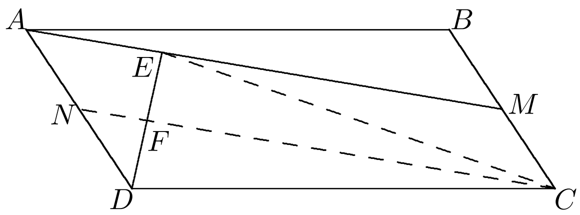
$$\begin{aligned} f(3) &= 1 + 3a_1 + 3^2 a_2 + \ldots + 3^n a_n \\ &= 1 + (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + \big((3-1) \cdot a_1 + (3^2 - 1) \cdot a_2 + \ldots + (3^n - 1) \cdot a_n\big) \\ &= 2 + \big((3-1) \cdot a_1 + (3^2 - 1) \cdot a_2 + \ldots + (3^n - 1) \cdot a_n\big) \end{aligned}$$

Men i den sista raden är koefficienten för a_i ett jämnt heltal för varje i, vilket betyder att alla termerna i parentesen är jämna tal. Således måste $f(3)$ vara ett jämnt tal och kan därför inte anta värdet 2005.

Svar: Nej, $f(3)$ kan inte anta värdet 2005.

6. Låt M vara mittpunkten på sidan BC av parallellogrammet $ABCD$. Låt E vara den punkt på sträckan AM för vilken vinkeln DEM är rät. Visa att triangeln DEC är likbent.

Lösning 1: Drag en linje genom C parallell med AM. Den skär sidan AD i mittpunkten N (fyrhörningen $AMCN$ är en parallellogram, då sidorna är parvis parallella) samt sträckan DE i punkten F, säg. Vinkeln DFC är rät, eftersom vinklarna DFC och DEM är likbelägna vinklar vid parallella linjer och därmed lika. Sträckan NF är alltså en transversal till triangeln ADE parallell med sidan AE och delar således ED liksom AD mitt itu. Trianglarna CFE och CFD är följaktligen kongruenta (första kongruensfallet), dvs triangeln CDE är likbent med $|CD| = |CE|$.
Anm. I nedanstående figur är vinklarna DAM och AMD båda mindre än $90°$, vilket innebär att punkten E ligger i det inre av parallellogrammen $ABCD$. Om vinkeln DAM är rät sammanfaller E med hörnet A; om vinkeln är större än $90°$ hamnar E på förlängningen av sträckan AM över A. Om vinkeln AMD är rät sammanfaller punkterna E och M; om vinkeln är större än $90°$ hamnar E på förlängningen av sträckan AM över M. Ovanstående bevis täcker även dessa fall.



Lösning 2: Vi inför beteckningar för sträcklängderna $|AB| = a,\ |BC| = b,\ |CE| = x$ samt för vinklarna $\angle BAD = \alpha,\ \angle BAM = \varphi$. Sinussatsen tillämpad på triangeln ABM ger

$$\text{(1)} \qquad \frac{\frac{b}{2}}{\sin\varphi} = \frac{a}{\sin\big(180° - \varphi - (180° - \alpha)\big)} = \frac{a}{\sin(\alpha - \varphi)}$$

(notera att $\varphi < \alpha$, så att $\alpha - \varphi > 0$). Ur den rätvinkliga triangeln ADE får vi

$$\text{(2)} \qquad |DE| = b\sin(\alpha - \varphi)$$

(gäller för α spetsig, rät och trubbig, eftersom $\sin(180° - t) = \sin t$). Betrakta nu triangeln DEC. Enkel kalkyl ger att $\angle EDC = 90° - \varphi$ (observera att kalkylen måste göras för alla tre fallen för α för sig, d.v.s. för α spetsig, rät och trubbig). Cosinussatsen använd på triangeln DEC tillsammans med (1) och (2) ger nu

$$\begin{aligned} x^2 &= a^2 + b^2\sin^2(\alpha - \varphi) - 2ab\sin(\alpha - \varphi)\cos(90° - \varphi) \\ &= a^2 + 2b\sin(\alpha - \varphi)\left(\frac{b}{2}\sin(\alpha - \varphi) - a\sin\varphi\right) = a^2, \end{aligned}$$

varav $x = a$, dvs sidorna CD och CE är lika långa.