SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska Matematikersamfundet

Lösningsförslag till kvalificeringstävlingen den 3 oktober 2001

1. Låt oss börja med att förenkla delar av uttrycket under användning av konjugatregeln:

$$\begin{aligned}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\,\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} &= \sqrt{4-(2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\,)}\\ &= \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}.\end{aligned}$$

Vi har här använt att $\sqrt{2+a}\,\sqrt{2-a}=\sqrt{4-a^2}$, med $a=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.
Det aktuella uttrycket kan nu skrivas

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\,\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\,\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}.$$

Upprepad användning av konjugatregeln ger sedan

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\,\sqrt{(4-(2+\sqrt{3})}=\sqrt{(2+\sqrt{3})\,(2-\sqrt{3})}=\sqrt{4-3}=1.$$

2. Antag att k dansande flickor deltog. En av flickorna fick $5=1+4$ blommor, en annan fick $6=2+4$ blommor osv. Den flicka som fick flest, fick $k+4$ blommor. Antalet blommor som flickorna fick sammanlagt var

$$5+6+\ldots+(k+4)=\frac{k(5+k+4)}{2}=\frac{k(k+9)}{2}=200,$$

varav

$$k^2+9k=400.$$

Ekvationen har rötterna

$$k=-\frac{9}{2}\pm\sqrt{\frac{81}{4}+400},$$

men eftersom endast den positiva roten, $k=-\frac{9}{2}+\frac{41}{2}=16$, är aktuell, så måste antalet dansande flickor ha varit 16. Den flicka som fick flest blommor, $16+4=20$ stycken, dansade med 20 pojkar men dansade inte med 3, dvs antalet pojkar måste ha varit 23 stycken.

SVAR: I festen deltog 23 pojkar.

3. Det gäller att $a>0$, $b>0$ och $a^2+b^2=c^2$, varav följer att $a<c$ och $b<c$. Vi får då att

$$\begin{aligned}a^{2001}+b^{2001}=a^{1999}\cdot a^2+b^{1999}\cdot b^2<c^{1999}\cdot a^2+c^{1999}\cdot b^2&=c^{1999}(a^2+b^2)\\ &=c^{1999}\cdot c^2=c^{2001}.\end{aligned}$$

4. Antag att sidorna AB och AC i triangeln ABC båda har längden 1 och låt längden av den tredje sidan vara $2a$ enligt figuren. Vi antar att den inskrivna cirkeln, som

har radien r, tangerar sidan BC i punkten D, sidan AB i punkten E samt sidan AC i punkten F. Eftersom triangeln ABC är likbent måste punkten D dela sidan BC mitt itu, dvs sträckan AD utgör höjden mot sidan BC. Längden av denna är $\sqrt{1-a^2}$. Vi observerar att $0 \leq a \leq 1$, eftersom a är längden av den ena kateten i en rätvinklig triangel med hypotenusan 1. Triangeln AEO, där O är den inskrivna cirkeln medelpunkt, är likformig med triangeln ADC (båda trianglarna är rätvinkliga och har en vinkel gemensam). Detta leder till sambandet

$$\frac{|OE|}{|AE|} = \frac{|CD|}{|AD|}$$

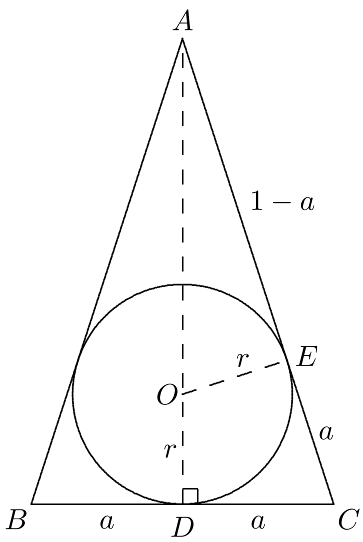
eller

$$\frac{r}{1-a} = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}, \tag{1}$$

varav

$$r = \frac{a(1-a)}{\sqrt{1-a^2}} = \sqrt{\frac{a^2(1-a)^2}{1-a^2}} = \sqrt{\frac{a^2(1-a)}{1+a}}.$$

Låt oss beteckna uttrycket under rottecknet, $\dfrac{a^2(1-a)}{1+a}$, med $g(a)$.



Det gäller alltså att bestämma det värde på a (den sökta sidan har längden $2a$) som gör r och därmed $g(a)$ så stor som möjligt. Derivering ger

$$g'(a) = \frac{(1+a)(2a-3a^2)-(a^2-a^3)}{(1+a)^2} = \frac{-2a(a^2+a-1)}{(1+a)^2}$$

Om vi sätter derivatan $= 0$ får vi, förutom den triviala lösningen $a = 0$, lösningarna till ekvationen $a^2 + a - 1 = 0$. Rötterna till denna är $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$. Endast den positiva roten, $a_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, är av intresse. Eftersom $g(0) = g(1) = 0$ och $g(a_1) > 0$ så följer, eftersom $g(a)$ är kontinuerlig i intervallet $0 \leq a \leq 1$, att $g(a)$ har ett lokalt maximum för $a = a_1$. Vi finner alltså att när radien r är som störst, vilket inträffar när $g(a)$ antar sitt maximum, har sidan BC längden $2a_1 = \sqrt{5} - 1 \approx 1,25$.

Svar: Radien i den inskrivna cirkeln är som störst när den tredje sidan har längden $5 - 1 \approx 1,25$.

5. Vi kan utan inskränkning anta att $a \geq b \geq c$, eftersom a, b och c uppträder symmetriskt i de båda kvadratsummorna. Exempelvis är såväl $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2$ som $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ oförändrat om a och b byter plats. Sätt $r = a - b$, $s = b - c$ och $t = a - c$, som medför att $b = c + s$ och $a = b + r = c + s + r$. Vi noterar att $r + s = t$. Vi söker naturliga tal r, s och t, sådana att $r^2 + s^2 + t^2 = 218$. Med insättning av $t = r + s$ kan sambandet skrivas $r^2 + s^2 + rs = 109$. Låt oss först anta att $r \geq s$. Eftersom r och s är icke-negativa heltal måste r vara ≤ 10. Å andra sidan kan inte r vara mindre än 7 eftersom $0 \leq s \leq r \leq 6$ ger $r^2 + s^2 + rs \leq 6^2 + 6^2 + 6^2 = 108$. Det räcker alltså att pröva talpar (r, s) med $r \geq s$ för r-värdena 7, 8, 9 och 10. Låt oss granska dessa fall i tur och ordning.
(1) Fallet $r = 7$ ger ekvationen $s^2 + 7s = s(s + 7) = 60$, som har lösningen $s = 5$.
(2) Fallet $r = 8$ ger $s^2 + 8s = s(s + 8) = 45$.
(3) Fallet $r = 9$ ger $s^2 + 9s = s(s + 9) = 28$.
(4) Fallet $r = 10$ leder till ekvationen $s^2 + 10s = s(s + 10) = 9$.
I fallen (2), (3) och (4) finner vi efter prövning att det inte finns några positiva heltalslösningar i s. Enda möjlighet är alltså att $r = 7$ och $s = 5$. Här antog vi att $r \geq s$, men det omvända är förstås också tänkbart, så vi har också lösningen $r = 5$ och $s = 7$. I båda fallen är $t = r + s = 12$. De ursprungliga talen kan följaktligen skrivas $c = k$, $b = k + 5$, $a = k + 12$ eller $c = k$, $b = k + 7$, $a = k + 12$, där k är ett godtyckligt positivt heltal. Observera att $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$ inte beror av värdet på k.
Det gäller nu att välja k så att $(a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2$ blir så litet som möjligt. I det första fallet får vi $(2k + 17)^2 + (2k + 5)^2 + (2k + 12)^2$ och i det andra $(2k + 19)^2 + (2k + 7)^2 + (2k + 12)^2$. Eftersom funktionen $(2k + r)$ för varje positivt tal r är monotont växande i k, $k \geq 1$, får vi minimum om k väljs så litet som möjligt. Vi väljer alltså $k = 1$ och finner att minimivärdet i det första fallet är $19^2 + 7^2 + 14^2 = 606$, medan det i det andra fallet är $21^2 + 9^2 + 14^2 = 718$. Det minsta möjliga värdet är således 606, vilket antas om vi som talen a, b och c använder talen 1, 6 och 13 i någon ordning.

Svar: Det minsta möjliga värdet är 606.

6. Vi söker positiva heltal N sådana att N^3 har formen $ababab1$ eller utskrivet

$$a \cdot 10^6 + b \cdot 10^5 + a \cdot 10^4 + b \cdot 10^3 + a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + 1,$$

vilket kan förenklas till

$$a(10^6 + 10^4 + 10^2) + b(10^5 + 10^3 + 10) + 1 = 101010(10a + b) + 1.$$

Men $101010 = 3 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 13$, dvs $N^3 - 1$ är delbart med 3, 7, 10 och 13. Vilka rester kan då talet N ge vid division med resp 3, 7, 10 och 13 ?
Först konstaterar vi att $(3k + r)^3 = 27k^3 + 27k^2r + 9kr^2 + r^3$, där k och r är heltal, ger resten 1 vid division med 3 om och endast om $r^3 - 1$ är delbart med 3. Om vi håller oss till resterna $r = 0, 1, 2$ är nämnda villkor sant endast för $r = 1$. Vi gör motsvarande utredning för division med resp 7, 10 och 13 och får följande sammanfattning (i uppställningen står r, s, t och u för naturliga tal):
a) Om $N^3 - 1$ är jämnt delbart med 3, så måste N ha formen $3r + 1$.
b) Om $N^3 - 1$ är jämnt delbart med 7, så måste N ha någon av formerna $7s + 1$, $7s + 2$ eller $7s + 4$. Detta betyder att $(7s + 1)^3$, $(7s + 2)^3$ och $(7s + 4)^3$ alla ger resten 1 vid division med 7. Vi får nämligen resten 1 när resp 1, 8 och 64 divideras med 7.

c) Om $N^3 - 1$ är jämnt delbart med 10, så måste N ha formen $10t + 1$.

d) Om slutligen $N^3 - 1$ är delbart med 13, så måste N vara på någon av formerna $13u + 1$, $13u + 3$ eller $13u + 9$.

Enligt a) och c) måste $N - 1$ vara jämnt delbart med såväl 3 som med 10, dvs $N - 1$ är en multipel av 30. Eftersom $\sqrt[3]{10^6} < N < \sqrt[3]{10^7}$ gäller det att $100 < N < 220$ (kontrollera att $220^3 > 10^7$!). Enda heltal i intervallet som uppfyller nämnda delbarhetsegenskaper är 121, 151, 181, och 211.

Enligt b) måste N ge någon av resterna 1, 2 eller 4 vid division med 7. Men $181 = 25 \cdot 7 + 6$, så N kan inte vara $= 181$.

Nu återstår talen 121, 151 och 211. Enligt d) måste N ge någon av resterna 1, 3 och 9 vid division med 13. Men $121 = 9 \cdot 13 + 4$ och $151 = 11 \cdot 13 + 8$. Också dessa tal kan avfärdas. Nu återstår bara talet 211. Kontroll visar att $211^3 = 9393931$, dvs med $N = 211$ har N^3 den önskade formen.

Svar: Ja, kuben på talet 211 är 9393931.