FINAL EXAMINATION

1MA211, Fourieranalys

Code/Name: ____

Problem 1.

1) Bestäm fourierserien för x^2, $-\pi \geq x \leq \pi$, periodiskt utvidgat.
2) Bestäm om fourierserien konvergerar (använd en av konvergenssatser).
3) Använd fourierserien att beräkna summan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

(*Tips:* använd i fourierserien att $\cos n\pi = (-1)^n$.)

Problem 2.
Bestäm en lösning till

$$u_t - \kappa u_{xx} = 0, \quad 0 < x < \pi, t > 0,$$

med randvillkoret

$$u(0,t) = 1, u(\pi,t) = 0, \quad t > 0,$$

med begynnelsevillkoret

$$u(x,0) = 1, \quad 0 < x < \pi.$$

Problem 3.
Sätt

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!(t^2+n^2)}.$$

1) Visa att serien är likformigt konvergent på $\mathbb{R}$ och att f är kontinuerglig på $\mathbb{R}$.
2) Beräkna fouriertransformen $\hat{f}(\omega)$.
3) Använd Plancherels formel att beräkna L^1-normen av f.

Problem 4.

1) Bestäm Fouriertränsformer av

$$e^{-a|t|}, \quad \text{and} \quad H(t)e^{-a|t|}.$$

2) Betrakta ekvationen för en dämpad harmonisk oscillator:

$$x''(t) + 2\gamma x'(t) + q^2 x(t) = f(t), \quad (\gamma > 0, 0 < \gamma < q).$$

Antag att $\hat{x}(\omega)$ och $\hat{f}(\omega)$ existerar, visa att

$$x(t) = g * G(t),$$

här:

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{q^2 + 2i\gamma\omega - \omega^2} e^{i\omega t} d\omega.$$

3) Antag att $0 < \gamma < q$ och låt $p = \sqrt{p^2 - \gamma^2}$. Använd 1) att visa

$$G(t) = \frac{H(T)}{p} e^{-\gamma t} \sin pt.$$

Problem 5.

Bestäm en lösning till

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = t^2 e^t.$$

genom Laplacetransformen.