Överblick över kursens innehåll

Linjär algebra $\xrightarrow{\text{tillämpas på}}$ Geometri

Linjära ekvationssystem: lösningsmetod

Matriser: generaliseringar av tal
- matrisräkning
- tillämpning på linjära ekv'system

Determinanter: hänger ihop med matrisinvers, dvs delning med en matris.

Vektorer: är "pilar", och duger till formulering och lösning av många geometriska problem.

Skalärprodukt, Vektorprodukt: är sätt att multiplicera vektorer, och redskap i beräkning av vinklar, längder, areor, volymer mm.

Linjer och plan i rymden

Linjära avbildningar, såsom projektion på ett plan, spegling i ett plan, vridning kring en axel med en viss vinkel, mm

F1

Linjära ekvationssystem

En linjär ekvation i två obekanta x och y ser så här ut.

Ex. 1 $\quad 2x + 3y = 5$

Ex. 2 $\quad -x + 4y = 7$

Allmänt: $\quad ax + by = c$, där a, b, c är konstanta reella tal.

Obs. att en linjär ekvation inte innehåller termer som xy, x^2, y^3, $\sqrt{x}$, $\sin y$, ...

Ex. 3 Ekvationen $2x + 3\sqrt{y} = 5$ är inte linjär.

Ex. 4 Ekvationen $2x + 3y + 4xy = 0$ är inte linjär.

I ex. 1 $\quad 2x + 3y = 5 \quad$ ersätter vi x, y med valda tal, ex.vis

$x = 1$, $y = 1$: $\quad 2\cdot 1 + 3\cdot 1 = 5$ stämmer: paret $(x, y) = (1, 1)$ löser ekvationen.

$x = 1$, $y = 2$: $\quad 2\cdot 1 + 3\cdot 2 = 5$ stämmer inte: paret $(x, y) = (1, 2)$ löser inte ekvationen.

Vissa par (x, y) är alltså lösningar, och vissa par (x, y) är inte lösningar till ekvationen.

Problem. Bestäm (mängden av) alla lösningar till $2x + 3y = 5$.

Lösning. Lös ut y ex.vis: $\quad 2x + 3y = 5 \quad$ har samma lösningar som

$3y = 5 - 2x \quad$ har samma lösningar som

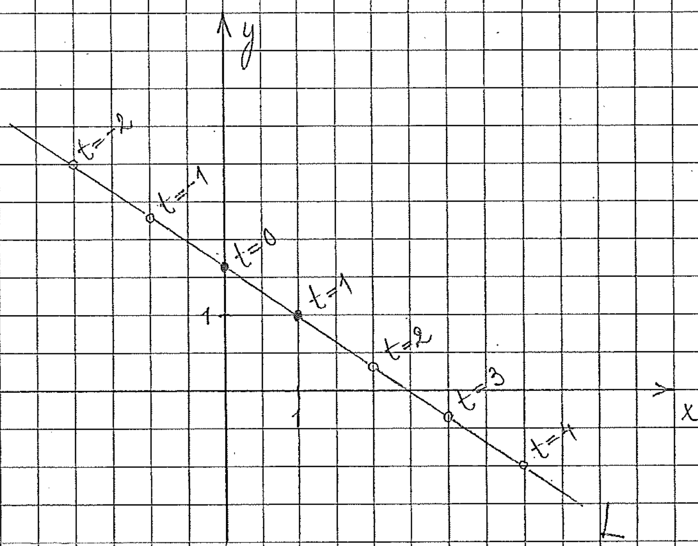
$$y = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}x$$

Sätt $x = t$ (ett godtyckligt reellt tal, kallat parameter) och $y = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}t$. Då är

$$(x, y) = \left(t, \frac{5}{3} - \frac{2}{3}t\right), \quad t \in \mathbb{R},$$ ekvationens allmänna lösning.

Annat skrivsätt: lösningsmängden är $L = \{(t, \frac{5}{3} - \frac{2}{3}t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Denna lösningsmängd L beskriver geometriskt en rät linje i planet, nämligen linjen L genom punkterna $(0, \frac{5}{3})$ och $(1, 1)$ exvis.



Allmänt gäller att lösningsmängden L till ekvationen $ax + by = c$ beskriver en rät linje i planet, om $a \neq 0$ eller $b \neq 0$. Detta förklarar terminologin "linjär ekvation"!

Obs: Om $a = 0$ och $b = 0$ då blir ekvationen $ax + by = c$ lika med $0x + 0y = c$.

Om $c = 0$, då löses $0x + 0y = 0$ av alla (x, y), dvs $L = \mathbb{R}^2$ (= hela planet).

Om $c \neq 0$, då har $0x + 0y = c$ ingen lösning, dvs $L = \emptyset$ (= den tomma mängden).

Ett system av två linjära ekvationer i två obekanta x och y kan skrivas på formen

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}, \quad \text{där } a_1, b_1, c_1 \text{ och } a_2, b_2, c_2 \text{ är konstanta reella tal.}$$

En lösning till systemet är ett talpar som löser båda ekvationer samtidigt.

Betecknar vi lösningsmängden till den första ekvationen med L_1, lösningsmängden till den andra ekvationen med L_2, och lösningsmängden till systemet med L, då gäller alltså

$$L = L_1 \cap L_2$$ (läs: snittet av L_1 och L_2, även kallat skärningsmängden av L_1 och L_2).

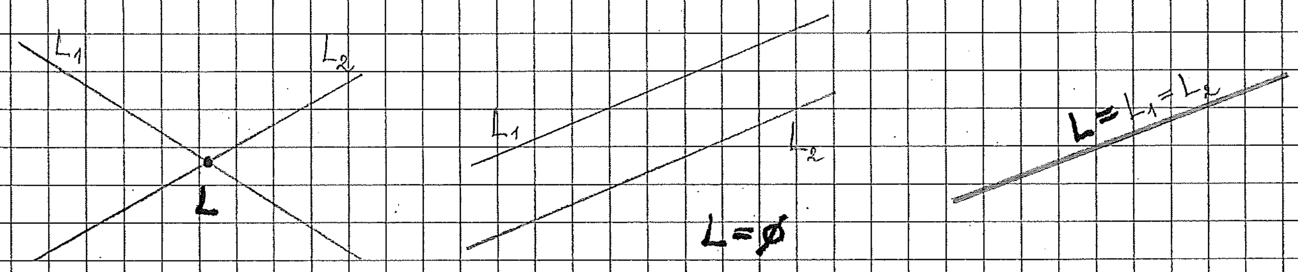
Ex. 5 $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 2x + 4y = 5 \end{cases}$

$(0, \frac{5}{3}) \in L_1$ men $(0, \frac{5}{3}) \notin L_2$, alltså $(0, \frac{5}{3}) \notin L$

$(0, \frac{5}{4}) \in L_2$ men $(0, \frac{5}{4}) \notin L_1$, alltså $(0, \frac{5}{4}) \notin L$

$(\frac{5}{2}, 0) \in L_1$ och $(\frac{5}{2}, 0) \in L_2$, alltså $(\frac{5}{2}, 0) \in L$

Då L_1 och L_2 (i allmänhet) beskriver linjer i planet, inser vi geometriskt att tre olika fall kan uppträda



Om L_1 och L_2 ej är parallella, då innehåller L precis en punkt, nämligen skärningspunkten av L_1 och L_2.

Om L_1 och L_2 är parallella och olika, då innehåller L ingen punkt alls, och kallas därför tom.

Om L_1 och L_2 är lika, då innehåller L oändligt många punkter, nämligen alla de som tillhör $L_1 = L_2$.

Sammanfattning. Varje linjärt ekvationssystem med 2 ekvationer och 2 obekanta har antingen ingen lösning, eller precis en lösning, eller oändligt många lösningar.

I stor allmänhet gäller faktiskt följande "$(0, 1, \infty)$-sats".

Sats. Varje linjärt ekvationssystem (med m ekvationer och n obekanta) har antingen ingen lösning, eller precis en lösning, eller oändligt många lösningar.

Skrivsätt. En linjär ekvation i n obekanta $x_1, \dots, x_n$ kan skrivas på formen

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b,$$ där $a_1, \dots, a_n, b$ är konstanta reella tal.

Ett system av m linjära ekvationer i n obekanta $x_1, \dots, x_n$ skrivs på formen

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Obs "dubbelindexkonventionen": koefficienten a_{ij} finns i den i-te ekvationen och står framför x_j.

Problem 1. Givet ett linjärt ekvationssystem (med m ekvationer och n obekanta), hur avgör man vilket av dessa tre fall (ingen lösning, precis en lösning, oändligt många lösningar) föreligger ?

Problem 2. Om lösningsmängden ej är tom, hur beskriver man den exakt ?

På nästa föreläsning (F2) ska vi lära oss en allmän metod (kallad Gaussalgoritmen) som systematiskt löser både Problem 1 och Problem 2. Låt oss inledningsvis räkna några konkreta exempel. Först återvänder vi till fallet $m = n = 2$.

Ex. 6 $\quad \frac{1}{2}\cdot \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 6y = 11 \end{cases}$ har samma lösningsmängd som systemet

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 2x + 3y = \frac{11}{2} \end{cases},$$ vilket dock inte har någon lösning !

Svar. $L = \emptyset$. (Ingen lösning.)

Ex. 7

$$\frac{1}{2}\cdot\begin{cases} 2x+3y = 5 \\ 4x+8y = 10 \end{cases} \sim$$

(läs: har samma lösningsmängd som)

$$\begin{cases} 2x+3y = 5 \\ 2x+4y = 5 \end{cases} \xrightarrow{(-1)} \sim$$

$$\begin{cases} 2x+3y = 5 \\ y = 0 \end{cases} \sim$$

$$\begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

Svar. $L = \left\{\left(\frac{5}{2}, 0\right)\right\}$. (Precis en lösning.)

Ex. 8

$$\frac{1}{2}\cdot\begin{cases} 2x+3y = 5 \\ 4x+6y = 10 \end{cases} \sim$$

$$\begin{cases} 2x+3y = 5 \\ 2x+3y = 5 \end{cases} \sim$$

$$\{ 2x+3y = 5$$

Svar. $L = \left\{\left(t, \frac{5}{3}-\frac{2}{3}t\right) \mid t \in \mathbb{R}\right\}$.

(Oändligt många lösningar.)

Ex. 9 Lös ekvationen $2x+3y+7z = 5$.

Obs att detta är ett exempel på en linjär ekvation i tre obekanta x, y, z. Man kan även se det som ett linjärt ekvationssystem, där $m = 1$ och $n = 3$.

Lösning. Lös ut z ex. vis:

$$2x+3y+7z = 5 \sim$$

$$7z = 5-2x-3y \sim$$

$$z = \frac{5}{7}-\frac{2}{7}x-\frac{3}{7}y$$

Sätt $x = s$ och $y = t$, där s och t är godtyckliga reella tal, kallade parametrar. Då är

$$(x, y, z) = \left(s, t, \frac{5}{7} - \frac{2}{7}s - \frac{3}{7}t\right)$$ med $s, t \in \mathbb{R}$ ekvationens allmänna lösning.

Lösningsmängden är $L = \left\{\left(s, t, \frac{5}{7} - \frac{2}{7}s - \frac{3}{7}t\right) \,\middle|\, s, t \in \mathbb{R}\right\}$.

Anmärkning. Alternativt kan man lösa ut y eller x. Då fås andra beskrivningar av samma lösningsmängd L.