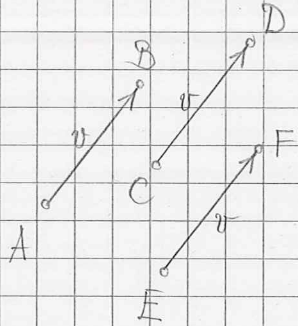
F8

Vektorer

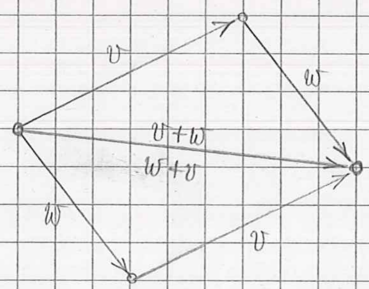
En *vektor* (i planet eller i rymden) består av *längd* och *riktning*. Den *anges* med en *pil* (som ju har längd och riktning). Pilar med *samma längd* och *samma riktning* anger *samma vektor*, och kallas *ekvivalenta*.



Notation. En pil med startpunkt A och målpunkt B beskriver vektorn $v = \overrightarrow{AB}$. Ex.vis är i figuren här intill $v = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$.

Vektorer är *geometriska objekt* (de har längd och riktning), samtidigt som de är *algebraiska objekt*: de kan adderas, subtraheras, multipliceras med skalärer, multipliceras med varandra, mm.

Addition av vektorer. Givet två vektorer v och w, så kan vi ange dem med sådana pilar att målpunkt(v) = startpunkt(w). Pilen från startpunkt(v) till målpunkt(w) anger då vektorn $v+w$.



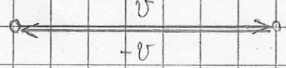
Konstruerar man enligt samma princip $w+v$, då uppstår ett parallellogram, med diagonal

$$\boxed{v + w = w + v}$$

Vektorn av längd 0 kallas nollvektorn, betecknas 0, och ritas som punkt. Den uppfyller

$$\boxed{v + 0 = v = 0 + v}$$

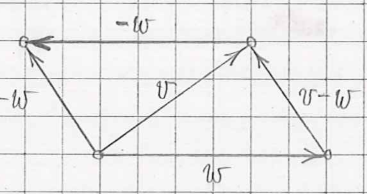
Vektorn med samma längd som v, dock omvänd riktning, betecknas $-v$. Den uppfyller



$$\boxed{v + (-v) = 0}$$

Subtraktion av vektorer definieras enligt

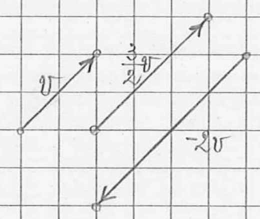
$$\boxed{v - w \;:=\; v + (-w)}$$



Multiplikation med skalärer. Om v är en vektor och $c \in \mathbb{R}$ en skalär, då är cv vektorn med

$$\text{längd av } cv = |c|(\text{längd av } v), \quad \text{och}$$

$$\text{riktning av } cv = \begin{cases} \text{riktning av } v & \text{ifall } c > 0 \\ \text{riktning av } -v & \text{ifall } c < 0 \end{cases}$$



I specialfallet $c = 0$ fås

$$\text{längden av } 0v = |0|(\text{längden av } v) = 0\,(\text{längden av } v) = 0, \quad \text{alltså}$$

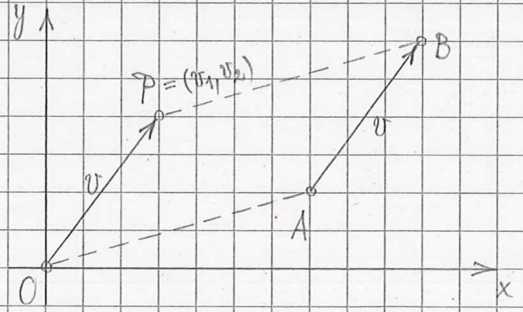
$$\boxed{\underbrace{0}_{\text{skalär}}\underbrace{v}_{\text{vektor}} = \underbrace{0}_{\text{vektor}}}$$

Hur räknar man med vektorer i praktiken? Antag att ett koordinatsystem i planet är givet.

Då finns det för varje vektor $v = \overrightarrow{AB}$ exakt en punkt $P = (v_1, v_2)$ så att $v = \overrightarrow{OP}$.

Då vektorn $v = \overrightarrow{OP}$ och punkten $P = (v_1, v_2)$ bestämmer varandra, skriver man

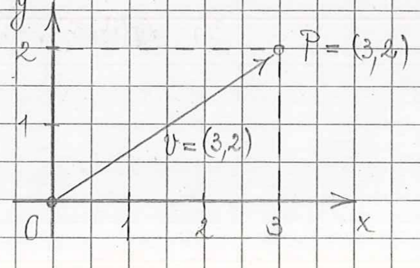
$$\boxed{v = \overrightarrow{OP} = (v_1, v_2)}$$



Terminologi. Talparet $(3,2)$ betecknar både

punkten $P = (3,2)$ med koordinaterna $(3,2)$ och

vektorn $v = \overrightarrow{OP} = (3,2)$ med komponenterna $(3,2)$.



Addition av vektorer definierades geometriskt, genom pilar och trianglar. Vad betyder den då algebraiskt, dvs. för vektorernas komponenter? Svaret är synnerligen enkel.

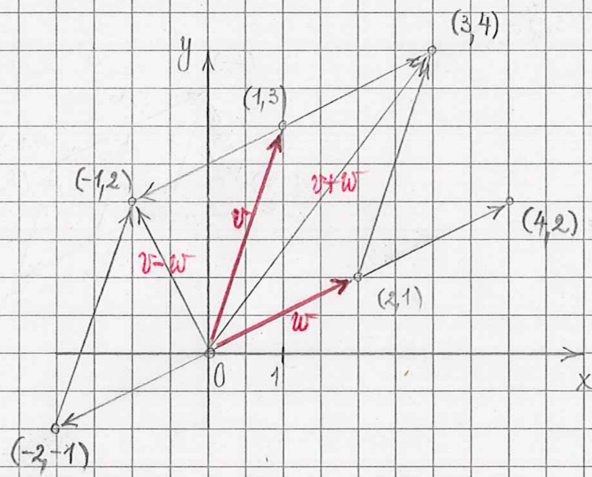
$$v + w = (v_1, v_2) + (w_1, w_2) = (v_1 + w_1,\ v_2 + w_2)$$
$$v - w = (v_1, v_2) - (w_1, w_2) = (v_1 - w_1,\ v_2 - w_2)$$
$$cv = c(v_1, v_2) = (cv_1,\ cv_2)$$

Alla tre geometriskt definierade operationer för vektorer utförs algebraiskt alltså genom de motsvarande operationerna för komponenterna, dvs. genom räkning med tal.

Ex. $(1,3) + (2,1) = (3,4)$

$(1,3) - (2,1) = (-1,2)$

$2(2,1) = (4,2)$

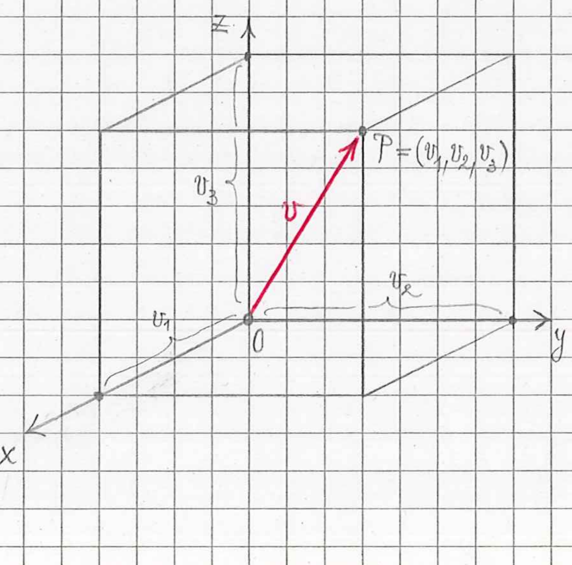


Analogt ligger det till för vektorer i rymden. Antag att ett koordinatsystem i rymden är givet. Då finns det för varje vektor v exakt en punkt $P = (v_1, v_2, v_3)$ så att $v = \overrightarrow{OP}$.

Då vektorn $v = \overrightarrow{OP}$ och punkten $P = (v_1, v_2, v_3)$ bestämmer varandra, skriver man

$$\boxed{v = \overrightarrow{OP} = (v_1, v_2, v_3)}$$

och kallar talen v_1, v_2, v_3 för v:s komponenter, samtidigt som de är P:s koordinater.



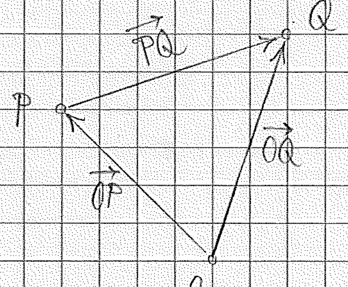
Även för vektorer i rymden utförs de tre räknesätten komponentvis.

Ex. Om $v = (0,1,2)$ och $w = (3,4,5)$ är vektorer i rymden, då är

$$v + w = (0,1,2) + (3,4,5) = (3,5,7),$$
$$v - w = (0,1,2) - (3,4,5) = (-3,-3,-3),$$
$$6v = 6\,(0,1,2) = (0,6,12).$$

Problem 1. Givet två punkter $P = (v_1, v_2, v_3)$ och $Q = (w_1, w_2, w_3)$ i rymden, bestäm komponenterna för vektorn $\overrightarrow{PQ}$.

Lösning.
$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ}$$
$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$$
$$= (w_1, w_2, w_3) - (v_1, v_2, v_3)$$



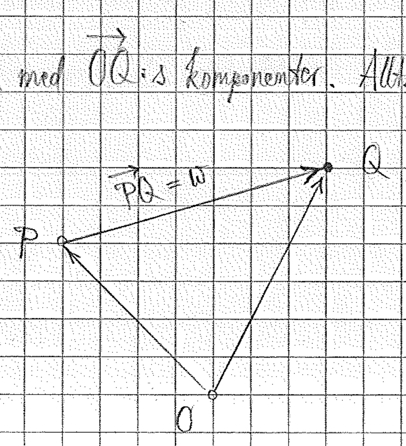
Minnesregel. Vektorn $\overrightarrow{PQ}$ har komponenterna $Q - P$.

Ex. 3.1.7.(b) Låt $P = (5,-2,1)$ och $Q = (2,4,2)$. Då har vektorn $\overrightarrow{PQ}$ komponenterna
$$Q - P = (2,4,2) - (5,-2,1) = (-3,6,1).$$

Problem 2. Givet en punkt $P = (v_1, v_2, v_3)$ och en vektor $w = (w_1, w_2, w_3)$ i rymden, bestäm punkten Q så att $\overrightarrow{PQ} = w$.

Lösning. Obs. att Q:s koordinater, $Q = (q_1, q_2, q_3)$, är lika med $\overrightarrow{OQ}$:s komponenter. Alltså är

$$(q_1, q_2, q_3) = \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}$$
$$= \overrightarrow{OP} + w$$
$$= (v_1, v_2, v_3) + (w_1, w_2, w_3)$$



Minnesregel. Startar man i punkten $P = (v_1, v_2, v_3)$ och går längs vektorn $w = (w_1, w_2, w_3)$, så hamnar man i punkten $Q = (v_1, v_2, v_3) + (w_1, w_2, w_3) = P + w$. ("punkt + vektor = punkt")

Ex. 3.1.9. (b) Punkten $B = (3,-1,0)$ och vektorn $u = (1,2,2)$ är givna. Då gäller $\overrightarrow{BQ} = u$ för punkten

$$Q = B + u = (3,-1,0) + (1,2,2) = (4,1,2).$$

Följande räkneregler gäller för alla vektorer u, v, w och för alla skalärer $c, d \in \mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{lrcl} (1) & v + w & = & w + v \\ (2) & (u+v)+w & = & u + (v+w) \\ (3) & v + 0 & = & v \\ (4) & v + (-v) & = & 0 \end{array}\right\} \text{ addition av vektorer}$$

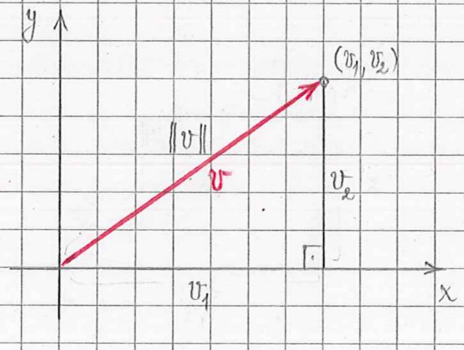
$$\left.\begin{array}{lrcl} (5) & c(dv) & = & (cd)v \\ (6) & c(v+w) & = & cv + cw \\ (7) & (c+d)v & = & cv + dv \\ (8) & 1v & = & v \end{array}\right\} \text{ multiplikation av vektorer med skalärer}$$

Obs. att alla regler (1)–(8) även gäller för matriser U, V, W av samma storlek $m \times n$!

Längden (= normen) av en vektor $v = (v_1, v_2)$ i planet betecknas $\|v\|$, och beräknas som

$$\boxed{\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}},$$

enligt Pythagoras sats.

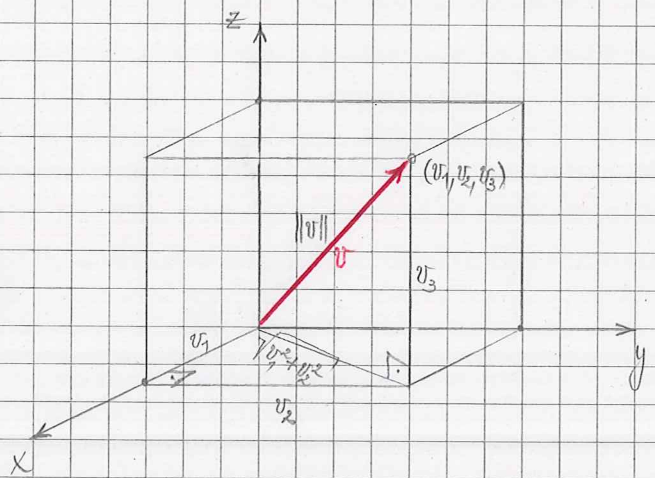


$$\|v\|^2 = v_1^2 + v_2^2$$

<u>Längden</u> av en vektor $v = (v_1, v_2, v_3)$
i <u>rymden</u> betecknas $\|v\|$, och beräknas som

$$\boxed{\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}},$$

enligt Pythagoras sats.



$$\|v\|^2 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}^{\,2} + v_3^2$$
$$= v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$$

<u>Avståndet</u> mellan två punkter P och Q betecknas $d = d(P,Q)$, och definieras enligt

$$\boxed{d(P,Q) := \|\overrightarrow{PQ}\|}.$$

Om $P = (v_1, v_2)$ och $Q = (w_1, w_2)$ är punkter i planet, då är $\overrightarrow{PQ} = (w_1 - v_1, w_2 - v_2)$, alltså

$$\boxed{d(P,Q) = \sqrt{(w_1 - v_1)^2 + (w_2 - v_2)^2}}.$$

Om $P = (v_1, v_2, v_3)$ och $Q = (w_1, w_2, w_3)$ är punkter i rymden, då är $\overrightarrow{PQ} = (w_1 - v_1, w_2 - v_2, w_3 - v_3)$, alltså

$$\boxed{d(P,Q) = \sqrt{(w_1 - v_1)^2 + (w_2 - v_2)^2 + (w_3 - v_3)^2}}.$$

<u>Räkneregel för längden av en vektor v.</u> För alla $c \in \mathbb{R}$ gäller $\boxed{\|cv\| = |c|\,\|v\|}$.

<u>Bevis.</u> $\|cv\| = \|c(v_1, v_2)\| = \|(cv_1, cv_2)\| = \sqrt{(cv_1)^2 + (cv_2)^2} = \sqrt{c^2 v_1^2 + c^2 v_2^2} =$

$$= \sqrt{c^2 (v_1^2 + v_2^2)} = \sqrt{c^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2} = |c|\,\|v\|. \qquad \square$$