UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Inger Sigstam, tel: 471 3223

Tentamen i matematik
ALGEBRA 1
2008-05-21

Skrivtid: 8-13. Inga hjälpmedel tillåtna. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. Varje uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3 (4) (5) krävs minst 18 (25) (32) poäng, inklusive ev bonuspoäng.

1. a) Låt A och B vara mängder i ett universum U. Visa att $(A \cup B^*)^* = A^* \cap B$, där A^* är komplementet till A, dvs $A^* = U \setminus A$.

   b) Låt p, q och r vara utsagor. Utsagan $p \Rightarrow q \Rightarrow r$ är en förkortning av

   $$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r). \tag{1}$$

   Avgör om (1) är ekvivalent med

   $$(p \Rightarrow q) \wedge \big((p \wedge q) \Rightarrow r\big). \tag{2}$$

   Bevisa ditt påstående!

2. Låt A vara mängden av heltal som ger resten 1 vid division med 3. Konstruera en bijektion från A till mängden $B = \{x \in \mathbf{Q} : \; 0 < x \leq 1\}$.

3. a) Bestäm samtliga lösningar till den diofantiska ekvationen $2x - 5y = 9$.
   b) Visa att den diofantiska ekvationen $2x^2 - 5y^2 = 9$ saknar lösningar.

4. Vilken är den minsta ickenegativa rest som kan fås då talet 5757^{321} divideras med 13?

5. Visa att $\sqrt[3]{4}$ är irrationell.

6. Visa med induktion att

   $$1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + \cdots + n \cdot 3^n = \frac{(2n-1)3^{n+1} + 3}{4}$$

   för alla heltal $n \geq 1$.

7. Ekvationen $z^4 - 4z^3 + 24z^2 - 40z + 100 = 0$ har minst en multipelrot. Lös ekvationen fullständigt.

8. På mängden $\mathbf{Z}^+$ av positiva heltal definierar vi relationen S genom

   $$a\,S\,b \iff \exists n \in \mathbf{Z}^+ \, (ab = n^2).$$

   Visa att S är en ekvivalensrelation på $\mathbf{Z}^+$.
   Bestäm ekvivalensklasserna [1], [2] och $[p]$, där p är ett primtal.
   Hur många tal ingår i varje ekvivalensklass?
   Hur många (olika) ekvivalensklasser finns det?
   (*Notation:* Ekvivalensklassen som innehåller talet a betecknas $[a]$.)

LYCKA TILL !

Korta svar:

1. a) Rita t. ex. Venndiagram. b) De är inte ekvivalenta. Motexempel: p och r falska, q sann. Då är (1) falsk och (2) är sann.

2. Räkna upp $A = \{3n+1 : n \in \mathbf{Z}\}$ genom att använda heltalen n i följande ordning: 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, osv. Denna uppräkning av A ger följande uppräkning av A: $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = -2$, $a_4 = 7$, $a_5 = -5$, $a_6 = 10$, $a_7 = -8$, osv. Gör nu en slinga i talparsmängden
$$\{(p,q) : 0 < p \leq q \text{ och } \ p, q \in \mathbf{Z}^+\}$$
så: $(1,1)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$, $(1,4)$, $(2,4)$, $(3,4)$, $(1,5)$, $(2,5)$, $(3,5)$, $(4,5)$, $(1,6), \ldots$ Låt $f(a_1) = 1$, $f(a_2) = \frac{1}{2}$, $f(a_3) = \frac{1}{3}$, $f(a_4) = \frac{2}{3}$, $f(a_5) = \frac{1}{4}$, $f(a_6) = \frac{3}{4}$, osv. Vi tar alltså $f(a_i) = \frac{p}{q}$ där (p,q) är den första i slingan som ännu inte använts och som har $\mathrm{SGD}(p,q) = 1$.

3. a) $x = 2 + 5n$, $y = -1 + 2n$, $n \in \mathbf{Z}$.
b) Om lösning finns, är $2x^2 = 9 + 5y^2$, dvs vi måste ha $2x^2 \equiv 4 \pmod 5$. Med falluppdelning (5 fall) visas detta omöjligt.

4. $5757 \equiv 11 \equiv -2 \pmod{13}$. Räkneregler medför att talet är kongruent med $(-2)^{321}$ (mod 13). $2^6 = 64 = 65 - 1 \equiv -1 \pmod{13}$. Vi har
$$2^{321} = 2^{6\cdot 53+3} = (2^6)^{53} \cdot 2^3 \equiv (-1)\cdot 8 = -8 \equiv 5 \pmod{13},$$
Men $(-2)^{321} = -2^{321} \equiv -5 \equiv 8 \pmod{13}$. **SVAR:** 8.

5. Härma beviset att $\sqrt{2}$ är irrationellt. Om talet är rationellt, så finns heltal p och q så att $\sqrt[3]{4} = \frac{p}{q}$ och $\mathrm{SGD}(p,q) = 1$. Då är $4 = \frac{p^3}{q^3}$. Visa först att p är jämn och sedan också att q är jämn. Motsägelse.

6. Glöm ej bas, induktionsantagande, induktionssteg samt slutkläm.

7. Använd Euklides algoritm för att finna en SGD till $f(z)$ och $f'(z)$. Multipelrötter måste vara nollställen till SGD.
Alternativt: Sök först nollställena till $f'(z)$, och pröva dessa i $f(z)$. (Ett multipelnollställe till $f(z)$ måste vara ett nollställe till $f'(z)$.) **SVAR:** Det finns två dubbelrötter: $1 \pm 3i$.

8. S är reflexiv, ty för varje positivt heltal a gäller att $a \cdot a = n^2$ för något pos. heltal n, $(n = a)$. S är symmetrisk, för om $ab = n^2$ så är ju $ba = n^2$. Transitivitet: Antag att $ab = n^2$ och $bc = m^2$, där a, b, n, m är positiva heltal. Då blir $ac = (\frac{nm}{b})^2$, vi behöver visa att $\frac{nm}{b}$ är ett heltal. Låt $nm = p_1 p_2 \cdot \cdots \cdot p_h$ och $b = q_1 q_2 \cdot \cdots \cdot q_j$ de entydiga primtalsfaktoriseringarna av nm och b resp. Eftersom $(\frac{nm}{b})^2$ är heltal, så kan alla primtal i nämnaren förkortas bort. Efter ev omnumrering kan vi alltså anta att $p_1 = q_1$, $p_2 = q_2$, $\ldots, p_j = q_j$. (Och vi har $j \leq h$.) Vi får alltså skriva $ac = (\frac{nm}{b})^2 = p_{j+1}^2 \cdot \cdots \cdot p_h^2$, vilket ger att talet $\frac{nm}{b} = p_{j+1} \cdot \cdots \cdot p_h$ är ett positivt heltal. (Om $j = h$ har vi talet $ac = 1$.) Alltså är S transitiv.
Ekvivalensklasserna: Vi har $[1] = \{b \in \mathbf{Z}^+ : \exists n \in \mathbf{Z}^+ (b = n^2)\} = \{n^2 : n \in \mathbf{Z}^+\}$, och $[2] = \{b \in \mathbf{Z}^+ : \exists n \in \mathbf{Z}^+ (2b = n^2)\} = \{2k^2 : k \in \mathbf{Z}^+\}$. (Om $2b = n^2$, så måste $2|n$, så $n = 2k$ för något heltal k. Då blir $b = \frac{n^2}{2} = \frac{4k^2}{2} = 2k^2$.) På samma sätt visas att $[p] = \{pk^2 : k \in \mathbf{Z}^+\}$, om p är ett godtyckligt primtal. Vi ser att dessa ekvivalensklasser är uppräkneligt oändliga. Om p och q är två olika primtal, så ser vi att $[p] \neq [q]$, och alltså måste det finnas oändligt (men uppräkneligt) många ekvivalensklasser.