UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Gunnar Berg
Tel. 471 32 75

Prov i matematik
Algebra 1

IT, Kand.Data.o. Mat.
Fristående kurs
2007-12-21

Skrivtid: 8-13. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon, räknedosa. Poäng: Varje uppgift ger maximalt 5 poäng. För Godkänd krävs minst 18p, för betyget fyra minst 25p och för betyget fem minst 32p. Här inräknas ev. poäng från redovisningsuppgifter. Kom även ihåg att helhetsintrycket spelar en roll, så SKRIV SNYGGT OCH TYDLIGT och motivera dina räkningar.

1. Visa följande formel med induktion:
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

2. Bestäm det naturliga talet m som uppfyller
$$(114)_m + (1011)_2 = (153)_7.$$

3. Vad blir resten vid division av 17^{17} med 7 ?

4. Bevisa att mängden $\mathbf{R}$ av reella tal inte är uppräknelig.

5. Lös fullständigt den diofantiska ekvationen
$$463\,x + 1005\,y = 1.$$

6. Beräkna en största gemensam delare till de båda polynomen $x^4 + 8\,x^2 + 16$ och $x^3 - 8\,x^2 + 4\,x - 32$. Bestäm därefter samtliga nollställen till polynomen.

7. a) Visa att funktionen
$$f(n) = \begin{cases} 2\,n, & \text{om } \; n \,\epsilon\, \mathbf{N}, \\ 2|n| - 1, & \text{om } \; n \,\epsilon\, \mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}, \end{cases}$$
är en bijektion. (Här betyder $\mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}$ mängden av element i $\mathbf{Z}$**,** som ej ingår i $\mathbf{N}$**.**)
b) Definiera en relation R på $\mathbf{Z}$ genom att säga att $mRn \Leftrightarrow n|m$ eller $m|n$. Undersök R med avseende på reflexivitet, symmetri och transitivitet.

8. Om polynomet $z^4 - 4z^3 + az^2 + bz + c$ vet man att det har reella koefficienter, att dess nollställen bildar en kvadrat i det komplexa talplanet samt att två av dem ligger på imaginära axeln. Bestäm samtliga rötter.

LYCKA TILL!