UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Inger Sigstam, tel: 471 3223

Tentamen i matematik
ALGEBRA 1
2009-01-15

Skrivtid: 14-19. Inga hjälpmedel tillåtna. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. Varje uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3 (4) (5) krävs minst 18 (25) (32) poäng.

1. a) Gör en sanningsvärdestabell för att visa att utsagan

$$(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg p \vee q)$$

är en tautologi, där p och q är utsagor.

b) Visa att $x^2 \not\equiv 3 \pmod 5$ för alla heltal x.

c) Visa att $(441)_n$ är kvadraten av ett heltal, för alla heltal $n \geq 5$.

2. Vilken blir (den minsta ickenegativa) resten då 19^{341} delas med 7?

3. Visa med induktion att $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} < 3 - \frac{n}{2^{n-2}}$ för alla heltal $n \geq 3$.

4. Låt J vara mängden av alla jämna naturliga tal, och låt $A = \{q \in \mathbf{Q} : \; 0 \leq q \leq 1\}$.

a) Konstruera en injektion från J till A.

b) Konstruera en surjektion från A till J.

5. Formulera och bevisa faktorsatsen.

6. Ekvationen $x^4 - 3x^3 + x^2 + 4 = 0$ har en dubbelrot. Lös ekvationen.

7. På mängden A av reella polynom (i en variabel x) definierar vi relationen R genom

$$f(x)\, S\, g(x) \Longleftrightarrow x|(f(x) - g(x)).$$

Visa att R är en ekvivalensrelation på A.
Bestäm ekvivalensklassen $[p(x)]$ som innehåller polynomet $p(x) = 7x^2 - 3x + 5$. Beskriv samtliga ekvivalensklasser.

(*Notation:* Ekvivalensklassen som innehåller a betecknas $[a]$.)

8. Antag att p, $p + 2n$ och $p + 4n$ är primtal, där n är ett positivt heltal och $p > 3$. Visa att n är delbart med 3. (Ledning: Indirekt bevis.)

LYCKA TILL !