UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Inger Sigstam, tel: 471 3223

Tentamen i matematik
ALGEBRA 1
2010-01-08

Skrivtid: 14-19. Inga hjälpmedel tillåtna. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. Varje uppgift ger högst 5 poäng. För betygen 3 (4) (5) krävs minst 18 (25) (32) poäng, inklusive ev bonuspoäng.

1. (a) Avgör om några av följande tre utsagor är ekvivalenta, genom att använda sanningsvärdestabell.
   (i) $(p \vee q) \wedge (\neg(p \wedge q))$
   (ii) $(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$
   (iii) $\neg p \longrightarrow \neg q$

   (b) Låt A och B vara mängder. Visa mängdlikheten $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, (där komplementet till en mängd X har betecknats X^c).

2. Visa att $\sqrt{6}$ är ett irrationellt tal.

3. Bestäm den minsta ickenegativa resten som fås då 4314^{321} delas med 13.

4. Ekvationen $z^4 + 2z^2 - 8z + 5 = 0$ har en dubbelrot. Lös ekvationen fullständigt!

5. På mängden av par av reella tal, $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, definierar vi en relation S genom

$$(a,b)S(c,d) \iff \exists p, q \in \mathbf{Q}\,(a - c = p \text{ och } b - d = q)\,,$$

   där $\mathbf{Q}$ som vanligt betecknar de rationella talen. Visa att S är en ekvivalensrelation på $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.
   Ekvivalensklassen som innehåller paret (a, b) betecknas $[(a, b)]$.
   Vilka par ingår i ekvivalensklassen $[(1, 2)]$?

6. Visa med induktion att $6|(8^n - 2^n)$ för alla naturliga tal n.

7. Låt $\mathbf{N}$ vara mängden av naturliga tal, och $\mathbf{U}$ mängden av udda naturliga tal. Konstruera fyra funktioner f_1, f_2, f_3 och f_4 från $\mathbf{N}$ till $\mathbf{U}$ med följande egenskaper:
   (i) $f_1 : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{U}$ är injektiv men inte surjektiv;
   (ii) $f_2 : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{U}$ är surjektiv men inte injektiv;
   (iii) $f_3 : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{U}$ är varken surjektiv eller injektiv.
   (iv) $f_4 : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{U}$ är bijektiv;

8. Bestäm det reella talet a så att ekvationen $x^3 - x^2 + ax + 5 = 0$ får en icke-reell rot med realdelen 1. Lös ekvationen fullständigt.

LYCKA TILL !

Korta svar till Algebra 1, 2010-01-08:

1. (a) Ställ upp sanningsvärdestabell, de två första formlerna är ekvivalenta.
   (b) Rita t ex Venn-diagram.

2. Man kan använda liknande bevis som motsvarande för $\sqrt{2}$. (Det behöver modifieras lite).

3. Minsta icke-negativa resten blir 8.

4. Dubbelroten är $z = 1$, övriga rötter är $z = -1 \pm 2i$.

5. Visa att S är reflexiv, symmetrisk och transitiv. Man får sedan $[(1,2)] = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ eftersom $(a,b)S(1,2)$ om och endast om både a och b är rationella tal.

6. Bassteg: $n = 0$. Induktionsantagande: Det finns heltal A så att $6A = 8^p - 2^p$. Induktionssteget: Visa att $8^{p+1} - 2^{p+1}$ kan skrivas som $6B$ för något heltal B. Dra sedan slutsats enligt induktionsaxiomet.

7. T.ex följande: $f_1(n) = 2n + 3$. Ej surjektiv, ty blir aldrig 1. Injektiv ty tar olika till olika.
   $f_2(0) = f_2(1) = 1$, $f_2(n) = 2n - 1$ för $n \geq 2$. Ej injektiv, ty $f_2(0) = f_2(1)$. Surjektiv ty alla udda naturliga tal fås.
   $f_3(n) = 4$ (konstantfunktion). Ej injektiv ty t ex $f_3(0) = f_3(1)$. Ej surjektiv, ty t ex $f_3(n) \neq 7$ för alla n.
   $f_4(n) = 2n + 1$. Både surjektiv och injektiv.

8. $a = 3$. Rötterna är $x = 1 \pm 2i$ och $x = -1$.