UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Gunnar Berg
Tel. 471 32 75

Prov i matematik
Algebra 1
Diverse program
Typtenta

Skrivtid: Nej. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Räknedosa. Poäng: Varje uppgift ger maximalt 5 poäng. Betygsgränserna är: för 3, 18p, för 4, 25p och för 5, 32p. Häri inräknas ev. bonuspoäng från redovisningsuppgifter. Kom även ihåg att helhetsintrycket spelar en roll, så SKRIV SNYGGT OCH TYDLIGT och motivera dina räkningar.

1. Visa *med induktion* att om n är ett naturligt tal så gäller att talet $4^n + 2$ är delbart med 3.

2. Bestäm basen n så att $(253)_n = (114)_{11}$.

3. a) Konstruera en injektion från mängden $\mathbf{Z}_+$, de positiva heltalen till mängden $M = \{q \,\epsilon \mathbf{Q}; 0 \leq q \leq 1\}$.
   b) Konstruera en surjektion från M till $\mathbf{Z}_+$.

4. Visa att mängden av reella tal ej är numrerbar.

5. Visa att den diofantiska ekvationen $x^2 - 5\,y^2 = 3$ saknar lösningar.

6. Polynomekvationen
$$x^4 - 6\,x^2 + 8\,x + 24 = 0$$
har en dubbelrot. Lös den fullständigt.

7. Låt p och q vara primtal. Visa att då gäller att $p \cdot q + 1$ är kvadraten på ett heltal om och endast om p och q är *primtalstvillingar,* dvs. ligger på avståndet 2 från varandra.

8. Man vet att ekvationen $x^3 + ax^2 + bx + 90 = 0$, där a och b är reella tal och $a < 0$, har en heltalsrot och en komplex rot på formen $m + mi$ där m är ett heltal som dessuton är större än 1. Lös ekvationen fullständigt.

LYCKA TILL OCH TREVLIG LUCIA!