UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Gunnar Berg
Tel. 471 32 75

Prov i matematik
Algebra 1
Diverse program
Typtenta 2

Skrivtid: Nej. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon. Räknedosa. Poäng: Varje uppgift ger maximalt 5 poäng. Betygsgränserna är: för 3, 18p, för 4, 25p och för 5, 32p. Häri inräknas ev. bonuspoäng från redovisningsuppgifter. Kom även ihåg att helhetsintrycket spelar en roll, så SKRIV SNYGGT OCH TYDLIGT och motivera dina räkningar.

1. Visa *med induktion* formeln
$$\sum_{k=1}^{n}(k^2-k)=\frac{n^3-n}{3}.$$

2. Visa att för varje heltal $m>3$ gäller $(101)_m\cdot(102)_m=(132)_{m^2}$.

3. a) Vi definierrar en relation R på de positiva heltalen genom att säga att $mRn \Leftrightarrow$ "$m+n$ är inte ett primtal". Undersök R med avseende på reflexivitet, symmetri och transitivitet.
b) Konstruera en bijektion mellan intervallen [0,1] och [0,2].

4. Formulera och bevisa faktorsatsen.

5. Lös fullständigt den diofantiska ekvationen
$$337\,x-271\,y=2.$$

6. Bestäm de värden på den komplexa konstanten a för vilka ekvationen
$$z^3+12\,z+a=0$$
har en multipelrot och lös ekvationen för dessa värden på a.

7. Visa att de två talen $7\,k+16$ och $3\,k+7$ är relativt primiska (dvs. har största gemensamma delare 1) för alla $k\epsilon\mathbf{N}$.

8. Bestäm de reella konstanterna a och b så att ekvationen
$$z^4-6\,z^3+a\,z^2+b\,z+100=0$$
har en icke-reell rot z_0 sådan att även $2\,z_0$ är en rot. Bestäm därefter samtliga rötter till ekvationen.

LYCKA TILL!