UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Vera Koponen

PROV I MATEMATIK
Algebra I
2008-12-15

Tillåtna hjälpmedel: Inga, annat än pennor, radergum och papper (det sista tillhandahålles).
Poängsättning: Varje a-del ger maximalt 3 poäng och varje b-del ger maximalt 3 poäng.
Betygsättning: För betyg 3 krävs minst två poäng på varje a-del; för betyg 4 måste kravet för betyg 3 ha uppnåtts och minst 26 poäng sammanlagt; för betyg 5 måste kravet för betyg 3 ha uppnåtts och minst 36 poäng sammanlagt.
Tillgodoräknande från duggan: Om minst två poäng har uppnåtts på a-delen till uppgift n på duggan, där $n \in \{1, 2, 3, 4\}$, så behöver uppgift n inte göras, och poängen för uppgift n på ordinarie tentan blir densamma som på duggan. I detta fall skall en kommentar göras på försättsbladet till tentamen att uppgiften i fråga kan tillgodoräknas. Vill man ändå göra uppgiften igen för att eventuellt höja betyget så går det bra.
Tillgodoräknande av redovisningsuppgift: Den som blivit godkänd på redovisningsuppgiften om induktion behöver inte göra uppgift 5 och får automatiskt 6 poäng för den uppgiften.
Lösningarna måste innehålla relevanta förklaringar och uträkningar, och *skriv tydligt.*

1. (a) Avgör med sanningsvärdestabell, som skall ingå i lösningen, vilka av följande tre påståenden som är ekvivalenta:

$$(\neg A) \wedge B \qquad\qquad A \wedge (\neg B) \qquad\qquad \neg(A \to B)$$

(b) Låt $f : A \to B$ vara en funktion vars domän är A och vars målmängd/kodomän är B. Låt P vara påståendet: $\forall x \in A : \forall y \in A : x \neq y \to f(x) \neq f(y)$. Formulera negationen av P på ett sådant sätt att den börjar "$\exists x \in A \ldots$ " och bevisa att om A och B är ändliga och A innehåller fler element än vad B gör, så är negationen av P sann.

2. (a) Låt X vara mängden av alla studenter vid Uppsala universitet, och låt

$$A = \{x \in X : x \text{ är registrerad på kursen Algebra I}\}$$
$$B = \{x \in X : x \text{ är minst 20 år gammal}\}.$$

Beskriv mängden $A \cup (X \setminus B)$ med ord, så enkelt som möjligt, **och** med ett Venn-diagram.
(b) Bevisa att mängden av alla oändliga följder av nollor och ettor inte är uppräknelig. (Varje sådan följd har formen $a_0 a_1 a_2 \ldots$ där a_n är en etta eller nolla för varje $n \in \mathbb{N}$.)

3. (a) Skriv $(27)_{tio}$ i basen 2.
(b) För någon bas $B \geq 2$ gäller att $(142)_B = (1202)_{tre}$. Vilken är basen B?

4. (a) Finn, med hjälp av Euklides algoritm och återsubstitution, en heltalslösning till ekvationen $45x + 56y = 1$ om sådan finns.
(b) Finn en lösning till $45x \equiv 1 \pmod{56}$ som uppfyller att $5000 < x < 6000$.
Ledning: Lös först $45x + 56y = 1$.

5. (a) En talföljd definieras rekursivt genom: $a_0 = 1$, $a_{n+1} = 5a_n + 4$. Bevisa med induktion att $a_n = 2 \cdot 5^n - 1$ är en sluten formel för talföljden.
(b) I en skog har bina följande beteende. Under sommar nummer ett finns bara en enda bidrottning i skogen (och inga andra bin). Alla bin dör efter varje sommars slut, men varje bidrottning lägger 102 ägg som "kläcks" i början av efterföljande sommar. För varje bidrottning gäller att av dess 102 ägg utvecklas 2 till nya bidrottningar och de resterande 100 utvecklas till nya arbetsbin. Ange en sluten formel för antalet bin i skogen under sommar nummer n, för $n \geq 2$, efter att alla ägg har "kläckts".

Fortsätter på nästa sida

6. (a) Vad blir resten då $22^2 - 15^{100}$ delas med 7 ?
(b) Bevisa att för varje $n \in \mathbb{N}$ så är $n^2 - 2$ *inte* delbart med 4.

7 (a) Beräkna en största gemensam delare till

$$x^3 - 3x^2 + 4x - 2 \quad \text{och} \quad x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2x - 4.$$

(b) Antag att $n > 1$ är ett heltal, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ och låt $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x$. Bevisa att om $m \in \mathbb{Z}$ och $p(m) = 0$ så $m = 0$ eller $m | a_1$.

8. (a) Finn alla lösningar till ekvationen $x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2x - 4 = 0$.
Ledning: man kan använda lösningen till 7(a), eller ledtråden att $x = 1 + i$ är en lösning.
(b) Ange ett reellt polynom $f(x)$ med heltalskoefficienter och grad 4 sådant att ekvationen $f(x) = 0$ bland annat har lösningarna $1 + 2i$ och $1 + \sqrt{2}$ och skriv $f(x)$ som en produkt av reellt irreducibla polynom.

Lycka till!