UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Vera Koponen

PROV I MATEMATIK
Algebra I
2009-04-16

Skrivtid: 8-13. *Tillåtna hjälpmedel:* Inga, annat än pennor, radergum och papper (det sista tillhandahålles). *Poängsättning:* Varje a-del ger maximalt 3 poäng och varje b-del ger maximalt 3 poäng. *Betygsättning:* För betyg 3 krävs minst två poäng på varje a-del; för betyg 4 måste kravet för betyg 3 ha uppnåtts och minst 26 poäng sammanlagt; för betyg 5 måste kravet för betyg 3 ha uppnåtts och minst 36 poäng sammanlagt.
Lösningarna måste innehålla relevanta förklaringar och uträkningar, och *skriv tydligt.*

1. (a) Avgör med sanningsvärdestabell, som skall ingå i lösningen, vilka av följande tre påståenden som är ekvivalenta:

$$A \to B \qquad\qquad A \vee (\neg B) \qquad\qquad (\neg B) \to (\neg A)$$

(b) Låt $f : A \to B$ vara en funktion vars domän är A och vars målmängd/kodomän är B. Låt P vara påståendet: $\forall y \in B : \exists x \in A : f(x) = y$. Formulera negationen av P på ett sådant sätt att den börjar "$\exists y \in B \ldots$" och bevisa att om A och B är ändliga och B innehåller fler element än vad A gör, så är negationen av P sann.

2. (a) Låt $A = (2, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : 2 < x\}$, $B = (-\infty, -2) = \{x \in \mathbb{R} : x < -2\}$ och $C = [-3, 5] = \{x \in \mathbb{R} : -3 \leq x \leq 5\}$. Markera på en tallinje, som representerar de reella talen, mängden $(A \cup B) \cap C$. Det skall framgå om eventuella ändpunkter är med i $(A \cup B) \cap C$ eller inte.
(b) Antag att A och B är uppräkneliga mängder. Bevisa att $A \times B$ är uppräknelig.

3. (a) Skriv $(54)_{elva}$ i basen 3.
(b) Bestäm den bas b för vilken gäller att $(30)_b \cdot (43)_b = (2340)_b$.

4. (a) Finn, med hjälp av Euklides algoritm och återsubstitution, en heltalslösning till ekvationen $67x + 23y = 1$ om sådan finns.
(b) Finn en lösning till $67x \equiv 2 \pmod{23}$ som uppfyller att $200 < x < 300$.
Ledning: Lös först $67x + 23y = 1$.

5. (a) En talföljd definieras rekursivt genom: $a_0 = 3$, $a_{n+1} = 4a_n - 3$. Bevisa med induktion att $a_n = 2^{(2n+1)} + 1$ är en sluten formel för talföljden.
(b) Antag att ett golv skall täckas med kvadratiska kakelplattor, som är svarta eller vita, på sådant sätt att en vit platta alltid har svarta plattor på alla sina fyra sidor och en svart platta alltid har vita plattor på alla sina fyra sidor. Antag att plattorna har dimensionen 1 dm × 1 dm. Bevisa med induktion att ett rektangulärt golv med dimensionerna n dm × m dm alltid kan täckas med svarta och vita kakelplattor på ovan beskrivna sätt.

6. (a) Vad är sista siffran om $9^{2001} \cdot 193$ skrivs i basen 10 ? (Ledning: Vad blir resten vid division med 10 ?)
(b) Bevisa att om $a \equiv b \pmod{m}$ och $c \equiv d \pmod{m}$ så $ac \equiv bd \pmod{m}$.

Fortsätter på nästa sida

7 (a) Beräkna en största gemensam delare till

$$x^3 - 2x^2 + 2x - 1 \quad \text{och} \quad 4x^4 + x^2 + 3x + 1.$$

(b) Antag att $n > 1$ är ett heltal, $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$ och att a_0 är ett primtal. Visa att om α är ett primtal och en rot till ekvationen

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x^1 + a_0 = 0$$

så gäller att $\alpha = a_0$ och alla andra rationella rötter (om de överhuvudtaget finns) är antingen 1 eller -1.

8. (a) Finn alla lösningar till ekvationen $4x^4 + x^2 + 3x + 1 = 0$.
Ledning: man kan använda lösningen till 7(a), eller ledtråden att $x = -1/2$ är en dubbelrot.
(b) Skriv $4x^4 + x^2 + 3x + 1$ som en produkt av reellt irreducibla polynom.

Lycka till!