

Exempel: Lognormalfördelning

En ofta använd fördelning är *lognormalfördelningen*. En slumpvariabel X är lognormalfördelad om $\ln X \sim N(\mu, \sigma^2)$. För väntevärdet och variansen gäller följande:

$$E[X] = e^{\mu + \sigma^2/2}, \quad V[X] = e^{2\mu}(e^{2\sigma^2} - e^{\sigma^2}).$$

För en slumpvariabel X kan variationskoefficienten definieras som $D[X]/E[X]$. För en lognormalfördelad variabel kan det visas att $D[X]/E[X] = \sqrt{e^{\sigma^2} - 1}$.

För en viss bro har man funnit att betongens tryckhållfasthet kan anses vara lognormalfördelad med väntevärdet 47.5 MPa och variansen 7.6 MPa.

- (a) Beräkna parametrarna μ och σ i lognormalfördelningen. *Ledning.* Utnyttja variationskoefficienten.
- (b) Beräkna sannolikheten för en tryckhållfasthet lägre än 45 MPa.

LÖSNING

- (a) Variationskoefficienten $\sqrt{7.6}/47.5 \doteq 0.058$ leder till ekvationen

$$0.058 = \sqrt{e^{\sigma^2} - 1}$$

varur följer $\sigma = \sqrt{\ln(1 + 0.058^2)} \doteq 0.058$. Uttrycket för väntevärdet leder till ekvationen $47.5 = \exp(\mu) \exp(\sigma^2/2)$, med lösningen

$$\mu = \ln(47.5 e^{-\sigma^2/2}) \doteq 3.86.$$

- (b) Sökt sannolikhet:

$$P(X \leq 45) = P(\ln X \leq \ln 45) = \Phi((\ln 45 - 3.86)/0.058) \doteq 0.18.$$