Övningsuppgifter kring Chebychevs olikhet. Lösningar

3.5.9

Givet $\mu = \mathsf{E}[Y] = 0$, $\sigma^2 = \mathsf{V}[Y] = 4$ söks en övre gräns för $\mathsf{P}(|Y| > 4)$. Chebychevs olikhet (Sats 3.8) ger att

$$\mathsf{P}(|Y - \mu| \geq 4) \leq \frac{\sigma^2}{4^2} = \frac{4^2}{4} = \frac{1}{4}.$$

Eftersom Y är kontinuerlig och $\mu = 0$ följer att $\mathsf{P}(|Y| > 4) = 1/4$. $\square$

3.11.1

Variablerna $X_1, X_2, \ldots$ är oberonde och likafördelade med $\mathsf{E}[X_i] = 10$, $\mathsf{D}[X_i] = 1.5$.

(a) En uppskattning av sannolikheten $\mathsf{P}(|\bar{X}_{20} - 10| > 0.5)$ ges av Chebychevs olikhet:

$$\mathsf{P}(\bar{X}_{20} - 10| > 0.5) \leq \frac{\sigma^2}{n \cdot 0.5^2} = \frac{1.5^2}{20 \cdot 0.5^2} = 0.45.$$

(b) Hur många variabler behövs för att motsvarande sannolikhet inte överstiger 0.1? Olikheten ger

$$\frac{\sigma^2}{n \cdot 0.5^2} \leq 0.1 \Leftrightarrow \frac{\sigma^2}{0.1 \cdot 0.5^2} \leq n,$$

så med $\sigma = 1.5$ följer $n \geq 90$. $\square$

3.11.2

Variablerna $X_1, X_2, \ldots$ är oberoende och likafördelade Be(0.4), dvs. Bin(1, 0.4). Med Y lika med antal lyckade försök utav $n = 20$ följer för $Y = \sum_{j=1}^{20} X_i$ att $Y \sim \mathrm{Bin}(20, 0.4)$ (additionssats för oberoende binomialvariabler). Inför nu $\bar{X}_{20} = Y/20$.

(a) Sökt sannolikhet:

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(|\bar{X}_{20} - 0.4| \geq 0.2) &= \mathsf{P}(|Y - 8| \geq 4) = \mathsf{P}(Y - 8 \geq 4) + \mathsf{P}(Y - 8 \leq -4) \\
&= \mathsf{P}(Y \geq 12) + \mathsf{P}(Y \leq 4) = 1 - F_Y(11) + F_Y(4) \\
&= 1 - 0.9435 + 0.0510 = 0.1075.
\end{aligned}$$

(b) Chebychevs olikhet:

$$\mathsf{P}(|\bar{X}_{20} - 0.4| \geq 0.2) \leq \frac{p(1-p)}{20 \cdot 0.2^2} = \frac{0.4 \cdot 0.6}{20 \cdot 0.2^2} = 0.3$$

vilket är en övre gräns — jämför med sannolikheten beräknad exakt i (a). $\square$