Övningsuppgifter kap. 7.
Lösningar

7.2.3
$x = 4$ är en obs. av $X \sim \text{Bin}(n, p)$ där $\mathsf{E}[X] = np$. Momentmetoden: $np = x$ ger $p^* = x/n = 4/10 = 0.4$. $\square$

7.2.4
$x = 20$ är en obs. av $X \sim \text{ffg}(p)$ där $\mathsf{E}[X] = 1/p$. Momentmetoden: $1/p = x$ ger $p^* = 1/x = 1/20 = 0.05$. $\square$

7.2.5
$x_1 = 3$, $x_2 = 5$ är ober. obs. av $X \sim \text{Bin}(n, p)$ där $\mathsf{E}[X] = np$, $\mathsf{V}[X] = np(1-p)$. Momentmetoden:

$$\begin{cases} np = \bar{x} = 4 \\ np(1-p) = s^2 = 2 \end{cases}$$

Vi finner $1 - p = s^2/\bar{x}$, dvs. $p^* = 1 - s^2/\bar{x} = 1/2$. Med $n = \bar{x}/p$ följer $n^* = 4/(1/2) = 8$. $\square$

7.2.17
$n_1 = 5$, $\bar{x} = 14.72$, $s_x^2 = 2.85$ från $\text{N}(\mu_1, \sigma^2)$.
$n_2 = 9$, $\bar{x} = 18.36$, $s_y^2 = 3.525$ från $\text{N}(\mu_2, \sigma^2)$.
$S_{xx} = 4s_x^2 = 11.4$, $S_{yy} = 8s_y^2 = 28.2$. Sammanvägd variansskattning:

$$s_p^2 = \frac{S_{xx} + S_{yy}}{n_1 + n_2 - 2} = 3.30.$$

7.3.1
$X \sim \text{Po}(\mu)$, $I_\mu = [0.8, 2.0]$. Med $p = \mathsf{P}(X = 0) = \mathrm{e}^{-\mu}$ följer intervallet $I_p = [\mathrm{e}^{-2.0}, \mathrm{e}^{-0.8}]$. $\square$

7.6.2
$n = 10$, $\sum x_i = 5.28$ ger $\bar{x} = 0.528$. Varians: $s_x^2 \approx 0.0377$, standardavvikelse: $s_x \approx 0.1942$.

(a) Ensidigt med konfidensgrad 0.99, övre gräns: $\bar{\mu} = \bar{x} + t_{0.01}(9)s_x/\sqrt{10} \approx 0.701$.

(b) Ensidigt med konfidensgrad 0.99, undre gräns: $\bar{\mu} = \bar{x} - t_{0.01}(9)s_x/\sqrt{10} \approx 0.355$.

(c) Tvåsidigt med konfidensgrad 0.99: $I_\mu = [\bar{x} \pm t_{0.005}(9)s_x/\sqrt{10}] \approx [0.3284,\ 0.7276]$ och därmed $I_{2\mu} = [0.657,\ 1.455]$.

$\square$

7.6.6
$n_1 = 8$, $I_{\mu_1} = [\bar{x} \pm 1.96\sigma_1/\sqrt{8}] = [4.36, 6.32] = [5.34 \pm 0.98]$, dvs. $\bar{x} = 5.34$, $\sigma_1/\sqrt{8} = 0.5$.
$n_2 = 5$, $I_{\mu_2} = [\bar{y} \pm 1.96\sigma_2/\sqrt{5}] = [7.22, 11.14] = [9.18 \pm 1.96]$, dvs. $\bar{y} = 9.18$, $\sigma_2/\sqrt{5} = 1.0$.

(a) $I_{\mu_1+\mu_2} = [\bar{x} + \bar{y} \pm 1.96\sqrt{\sigma_1^2/8 + \sigma_2^2/5}] = [12.33,\ 16.71]$

(b) $I_{\mu_1-\mu_2} = [\bar{x} - \bar{y} \pm 1.96\sqrt{\sigma_1^2/8 + \sigma_2^2/5}] = [-6.03,\ -1.65]$

(c) $I_{2\mu_1-\mu_2} = [2\bar{x} - \bar{y} \pm 1.96\sqrt{4\sigma_1^2/8 + \sigma_2^2/5}] = [-1.27,\ 4.27]$.

$\square$

7.6.10
(a) Övre gräns: $\bar{\Delta} = \bar{z} + t_{0.05}(7)s_z/\sqrt{8} = 0.525 + 1.8946 \cdot \sqrt{0.825/4}/\sqrt{8} = 0.756$.
$\square$

7.6.11
Modell: Stickprov i par. Differenser $z_i = x_i - y_i$, $i = 1, \ldots, 10$:

$$11, \quad ,15, \quad ,0, \quad 5, \quad ,2, \quad 6, \quad -6, \quad 6, \quad -5, \quad 14$$

Modell: $Z_1, \ldots, Z_{10}$ ober. obs av $\mathrm{N}(\Delta, \sigma^2)$. Man finner $\bar{z} = 4.8$, $s_z = 7.254$. Övre gräns i ensidigt konfidensintervall:

$$\bar{z} - t_{0.05}(9)s_z/\sqrt{10} = 0.595$$

Förkasta hypotes om $\Delta = 0$ till förmån för $\Delta > 0$. $\square$

7.6.13
$n = 80$, $\sum x_i = 1122.0$ ger $\bar{x} = 14.025$. Här är $\mathsf{E}[X] = \mu = \mathsf{D}[X]$, så $\bar{X} \approx \mathrm{N}(\mu/\sqrt{\mu})$ (tillräckligt stort stickprov för normalapproximation). Intervall med 95% approximativ konfidensgrad:

$$I_\mu = [\bar{x} \pm 1.96\bar{x}/\sqrt{80}] = [10.95,\ 17.10].$$

$\square$

7.6.16
Punktskattning: $p^* = 160/200 = 0.8$. Normalapproximation OK enligt tumregel, ty vi har här $np^*(1-p^*) = 32 > 5$. Intervall med 95% approximativ konfidensgrad:

$$I_p = [p^* \pm \lambda_{0.025}\sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{200}}] = [0.745,\ 0.855].$$

$\square$

7.6.18

(a) $n = 15$, $\sum x_i = 30$ ger $\bar{x} = 3.0$. Vi har $X \sim \text{Po}(\mu)$ och enligt additionssats för Poissonfördelningen i kap. 3, $\sum_{i=1}^{15} X_i \sim \text{Po}(15\mu)$. Normalapproximation ger $\sum_{i=1}^{15} X_i \approx \text{N}(15\mu, 15\mu)$ och det följer att $\bar{X} \approx \text{N}(\mu, \mu/15)$.

En skattning av μ är $\mu^* = 2.0$ och ett intervall följer som

$$I_\mu = [\mu^* \pm 1.96 \cdot \sqrt{\mu^*/15}] = [1.284,\ 2.716].$$

(b) Man har att $\mathsf{P}(X = 0) = \mathrm{e}^{-\mu}$. Konfidensintervall:

$$I_{\mathrm{e}^{-\mu}} = [0.066,\ 0.277].$$

□