

Lösning, 302

Inför X = "Längd av rektangelns bas". Enligt uppgift är $X \sim \text{Re}(0, 2)$.

Rektangelns area A kan tecknas $A = x(2 - x)$ och sökt sannolikhet är

$$\begin{aligned} p &= P(A < 0.5) = P(X(2 - X) < 0.5) \\ &= P(2X - X^2 < 0.5) = P(X^2 - 2X + 0.5 > 0) \\ &= 1 - P(X^2 - 2X + 0.5 \leq 0). \end{aligned}$$

Vi löser ekvationen

$$x^2 - 2x + 0.5 = 0$$

och finner $x = 1 \pm \sqrt{1 - 0.5} = 1 \pm \sqrt{0.5}$. Det följer att

$$\begin{aligned} p &= 1 - P(X^2 - 2X + 0.5 \leq 0) \\ &= 1 - P(1 - \sqrt{0.5} < X < 1 + \sqrt{0.5}) = 1 - \frac{2\sqrt{0.5}}{2} \\ &= 1 - \sqrt{0.5} \doteq 0.29. \end{aligned}$$

□

Lösning, 304

Inför slumpvariablerna X_A = "Livslängd för glödlampa, typ A" och X_B = "Livslängd för glödlampa, typ B", samt X = "Livslängden hos av Erik plockad lampa".

Från texten har vi $X_A \sim \text{Exp}(1/100)$, $X_B \sim \text{Exp}(1/200)$. Då gäller att

$$P(X_A > 200) = e^{-2}, \quad P(X_B > 200) = e^{-1}.$$

Inför händelserna A = "Erik väljer lampa av typ A", B = "Erik väljer lampa av typ B" samt C = "Vald glödlampa har livslängd längre än 200 timmar". Från texten får vi $P(A) = 3/4$, $P(B) = 1/4$ och vidare kan följande betingade sannolikheter anges:

$$P(C|A) = P(X_A > 200), \quad P(C|B) = P(X_B > 200).$$

Händelserna A och B är oförenliga och deras union utgör hela utfallsrummet i val-situationen. Satsen om total sannolikhet ger därför

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A)P(C|A) + P(B)P(C|B) \\ &= P(A)P(X_A > 200) + P(B)P(X_B > 200) \\ &= \frac{3}{4}e^{-2} + \frac{1}{4}e^{-1}. \end{aligned}$$

Sökt sannolikhet ges av Bayes formel

$$\begin{aligned} P(A|C) &= \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{P(C|A)P(A)}{P(C)} \\ &= \frac{P(A)P(X_A > 200)}{P(X > 200)} = \frac{(3/4)e^{-2}}{(3/4)e^{-2} + (1/4)e^{-1}} \\ &\doteq 0.53. \end{aligned}$$

□

Lösning, 306

Givet: Simultan täthetsfunktion

$$f_{X,Y}(x,y) = c(x+y)^2, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1.$$

(a) Konstanten c skall normera fördelningen:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^1 \int_0^1 f_{X,Y}(x,y) \, dx dy = c \int_0^1 \left(\int_0^1 (x+y)^2 dy \right) dx \\ &= c \int_0^1 \left[\frac{(x+y)^3}{3} \right]_0^1 dx = c \int_0^1 \frac{(x+1)^3}{3} - \frac{x^3}{3} dx \\ &= c \left[\frac{(x+1)^4}{12} - \frac{x^4}{12} \right]_0^1 = c \left(\frac{16}{12} - \frac{1}{12} - \frac{1}{12} + 0 \right) = c \cdot \frac{14}{12} = \frac{7}{6}c. \end{aligned}$$

Härur följer $c = 6/7$.

(b) Marginalfördelningen för Y :

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_0^1 f_{X,Y}(x,y) \, dx = \int_0^1 \frac{6}{7}(x+y)^2 dx \\ &= \left[\frac{6}{7} \frac{(x+y)^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{7}((y+1)^3 - y^3) \\ &= \frac{2}{7}(3y^2 + 3y + 1), \quad 0 < y < 1. \end{aligned}$$

Pga. symmetri följer $f_X(x) = f_Y(x)$, dvs.

$$f_X(x) = \frac{2}{7}(3x^2 + 3x + 1), \quad 0 < x < 1.$$

□