

Lösning, 338

Inför variabeln X = "Antal set Per vinner (av 5)". Från förutsättningarna har man att $X \sim \text{Bin}(5, p)$ där $p = 0.6$.

- (a) Inför händelsen A = "Per vinner matchen" som kan formuleras $A = \{X \geq 3\}$. Sökt sannolikhet är $P(A)$:

$$P(A) = P(X \geq 3) = \binom{5}{3} 0.6^3 0.4^2 + \binom{5}{4} 0.6^4 0.4 + \binom{5}{5} 0.6^5 = 0.683.$$

- (b) Inför händelsen B = "Per vinner första set", med $P(B) = 0.6$. Sökt sannolikhet (Bayes formel):

$$p = P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)}.$$

Inför slumpvariabeln Y = "Antal set Per vinner" (av 4, set 2 – 5), $Y \sim \text{Bin}(4, 0.6)$. Man finner

$$P(A|B) = P(Y \geq 2) = 1 - P(Y \leq 1) = 1 - 0.4^4 - 4 \cdot 0.6 \cdot 0.4^3 = 0.821.$$

Den sökta sannolikheten kan nu beräknas:

$$p = \frac{0.6 \cdot 0.82}{0.683} = 0.72.$$

□

Lösning, 339

Inför händelserna A = "Sexa i bägge kasten", B = "Samma sida upp i bägge kasten". Då gäller att $P(B) = 1/6$ (välbalanserad tärning) och sökt är $P(A)$. Satsen om total sannolikhet:

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} = \frac{11}{216}.$$

Alternativ lösning: Inför slumpvariabeln X = "Antal sidor med 6 prickar", $X \sim \text{Bin}(6, 1/6)$. Satsen om total sannolikhet:

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{j=0}^6 P(X=j)P(A|X=j) = \sum_{j=0}^6 \binom{6}{j} \left(\frac{1}{6}\right)^j \left(\frac{5}{6}\right)^{6-j} \left(\frac{j}{6}\right)^2 \\ &= \frac{1}{36} \sum_{j=0}^6 j^2 P(X=j) = \frac{1}{36} E[X^2] = \frac{1}{36} (V[X] + (E[X])^2) \\ &= \frac{5/6 + 1}{36} = \frac{11}{216}. \end{aligned}$$

□