

## Storräkneövning: Sannolikhetslära (lösningar)

1. Inför händelserna  $A = \text{"Vald dag är helgdag"}$ ,  $B = \text{"På väg inom fem minuter"}$ . Från texten följer  $P(A) = 2/7$ ,  $P(B|A) = 0.90$ ,  $P(B|A^*) = 0.95$ . Sökt är  $P(B)$ , vilken följer ur satsen om total sannolikhet:

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^*)P(A^*) = 0.90 \cdot \frac{2}{7} + 0.95 \cdot \frac{5}{7} = 0.94.$$

2. Först måste täthetsfunktionen normeras så den verkligen blir en täthet, dvs. vi bestämmer  $a$ :  $1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = \int_{90}^{100} ax dx = [\frac{ax^2}{2}]_{90}^{100} = 950a$   
 $\Rightarrow a = 1/950$ . Integrering ger  $0.90 = \int_{90}^{x_{0.90}} f_X(x) dx \Rightarrow x_{0.90} = 99.1$ .
3. (a) Inför  $X = \text{"Betjäningstid (minuter) för en kund"}$ , med täthetsfunktionen

$$f_X(x) = \frac{1}{20}e^{-x/20}, \quad x > 0.$$

Det följer att

$$P(X > 40) = 1 - P(X \leq 40) = 1 - \int_0^{40} \frac{1}{20}e^{-x/20} dx = 1 - (1 - e^{-2}) = 0.135.$$

- (b) Låt  $Y = \text{"Antal inkomna kunder vars betjäningstid överstiger 40 minuter"}$ . Då gäller  $Y \in \text{Bin}(5, p)$  med  $p = 0.135$  enligt (a). Sökt sannolikhet:

$$P(Y \geq 4) = P(Y = 4) + P(Y = 5) = 0.0015.$$

4. Låt  $X = \text{"Antal bilar i ett hushåll"}$ . Sannolikhetsfunktionen ges av

|        |     |     |     |
|--------|-----|-----|-----|
| $x$    | 0   | 1   | 2   |
| $p(x)$ | 0.4 | 0.5 | 0.1 |

Man finner  $E[X] = 0 \cdot 0.4 + 1 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.1 = 0.7$ ,  $V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = 0^2 \cdot 0.4 + 1^2 \cdot 0.5 + 2^2 \cdot 0.1 - 0.7^2 = 0.41$ . Inför totala antalet bilar  $Y = Y_1 + \dots + Y_{1000}$ , där  $E[Y] = 1000 \cdot 0.7 = 700$ ,  $V[Y] = 1000 \cdot 0.41 = 410$ . Centrala gränsvärdesatsen ger att approximativt  $Y \in N(700, \sqrt{410})$  och den sökta sannolikheten följer som  $P(Y \leq 725) = \Phi((725 - 700)/\sqrt{410}) = \Phi(1.23) = 0.89$ .

5. För oberoende slumpvariabler  $X_1, \dots, X_n$  med  $D[X] = \sigma$  gäller för

$$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$$

det välkända resultatet  $V[\bar{X}] = \sigma^2/n$ , dvs.  $D[\bar{X}] = \sigma/\sqrt{n}$ . Vi skall alltså lösa  $0.002 = 0.01/\sqrt{n}$ , vilket ger  $n = 25$ .

6.  $X + Y$  och  $X - Y$  är båda normalfördelade med varians 8. Skriv  $x = E[X]$  och  $y = E[Y]$ . Då är  $(X + Y - (x + y))/\sqrt{8}$  och  $(X - Y - (x - y))/\sqrt{8}$  standard normalfördelade. Eftersom 0.1-kvantilen är 1.28 följer att  $(60 - (x + y))/\sqrt{8} = 1.28$  och  $(40 - (x - y))/\sqrt{8} = 1.28$ . Detta ger att  $y = 10$  och  $x = 46.38$ . (Obs! I boken står tvärtom.)
7. Inför  $X =$  Antal defekta A-skivor,  $Y =$  Antal defekta B-skivor. Det följer att  $X \sim \text{Bin}(50, 0.05)$ ,  $Y \sim \text{Bin}(50, 0.01)$ . Approximation möjlig:  $X \approx \text{Po}(2.5)$ ,  $Y \approx \text{Po}(0.5)$ . Då  $X$  och  $Y$  antas oberoende gäller  $X + Y \approx \text{Po}(2.5 + 0.5) = \text{Po}(3)$  och därmed  $P(X + Y > 5) = 1 - P(X + Y \leq 5) \approx 1 - F_{\text{Po}(3)}(5) = 1 - 0.91608 \doteq 0.084$ .
8. Inför  $X =$  Antal patienter som går ut under en kväll,  $X \sim \text{Bin}(52, 1/13) \approx \text{Po}(4)$ .
- (a)  $P(X > 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - (12/13)^{52} \doteq 0.9844$
- (b)  $P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - F_{\text{Po}(4)}(5) \doteq 1 - 0.785 = 0.215$   
 Inför  $Y = X_1 + \dots + X_7 \sim \text{Bin}(364, 1/13) \approx N(28, 28 \cdot 12/13)$ .
- (c)  $P(X_1 > 0) \dots P(X_7 > 0) = (P(X > 0))^7 \doteq 0.9844^7 \doteq 0.896$
- (d)  $P(Y \leq 25) = P(Y < 25.5) \approx \Phi((25.5 - 28)/(28 \cdot 12/13)) \doteq \Phi(-0.49) \doteq 1 - 0.6879 \doteq 0.312$ .