

Skrivtid: 08.00-13.00. För betygen 3, 4 resp. 5 krävs 18, 25 resp. 32 poäng. Lösningarna skall vara väl motiverade. Skriv endast på ena sidan, börja ny uppgift på ny sida och använd ej rödpenna.

Tillåtna hjälpmedel: Räknedosa. Formel- och tabellsamling i matematisk statistik.

1. Det finns två vägar från Angered till Backa, två vägar från Backa till Centrum, och inga andra vägar. Varje väg snöar igen med sannolikhet p , oberoende av varje annan väg. Vad är sannolikheten att man kan ta sig från Angered till Backa, givet att man *inte* kan ta sig från Angered till Centrum? (5p)
2. Vid en undersökning av en kontinuerlig slumpvariabel X har man kommit fram till att täthetsfunktionen bör ha formen

$$f(x) = a(2x - x^2), \quad 0 \leq x \leq 2.$$

- (a) Bestäm konstanten a . (1p)
 - (b) Beräkna väntevärde och varians för slumpvariabeln. (2p)
 - (c) Bestäm $P(X > 0.5)$. (2p)
3. Låt X , Y och Z vara oberoende slumpvariabler, sådana att $X \sim N(0.3, 0.6)$, $Y \sim N(-1, 0.2)$ och $Z \sim N(0.5, 0.3)$. Beräkna 0.025-kvantilen för medelvärdet av X , Y och Z . (5p)
 4. För Sam Weller är tiden för att borsta ett par skor kontinuerligt fördelad med väntevärde 10 min och standardavvikelse 3 min. Vid ett tillfälle har Sam 30 par att borsta samtidigt som han hoppas kunna vara på puben *The Magpie and Stump* om fyra timmar och femtio minuter. Vilken är sannolikheten för att han kommer i tid? (Bortse från tiden det tar att resa till puben.) (5p)
 5. I figur 1 visas ett histogram för 200 observationer $x_1, \dots, x_{200}$ av en slumpvariabel X vars fördelning är okänd. Från data har man funnit

$$\sum_{i=1}^{200} x_i = 498, \quad \sum_{i=1}^{200} (x_i - \bar{x})^2 = 234.82.$$

Gör lämpliga antaganden (gärna utifrån histogrammet) och beräkna ett 95% konfidensintervall för $\mu = E[X]$. (5p)

6. Tillförlitligheten hos datorsystem måste beaktas vid utvecklingsarbetet av nya lastbilsmodeller, där elektroniska system spelar en allt större roll. En ny komponent av ett visst slag förväntas hålla 1000 drifttimmar.

Vid planeringen av fältexperiment uppkommer den viktiga frågan: hur många komponenter måste testas? Ett 95% konfidensintervall med bredden 0.02 för andelen komponenter med drifttid längre än 1000 timmar är önskvärt (specifikationskrav). Från tidigare experiment anses det känt att andelen som uppfyller kravet är 0.89, vilket ska användas i beräkningarna. Utifrån det ställda kravet, hur många komponenter måste testas? (5p)

Var god vänd!

7. Överhöjning är ibland en kritisk kvalitetsegenskap hos monteringsfärdiga betongelement. Man ville undersöka om det fanns någon skillnad mellan element från två fabriker, A och B. Därför togs slumpmässigt ut 9 resp. 16 betongelement ur produktionen från A resp. B. Observationerna kan anses vara stickprov från oberoende stokastiska variabler X och Y som är $N(\mu_A, \sigma^2)$ resp. $N(\mu_B, \sigma^2)$. Följande värden erhöles:

$$\begin{array}{lll} \text{A:} & \bar{x} = 18.1 & s_1 = 5.0 \quad n_1 = 9 \\ \text{B:} & \bar{y} = 14.6 & s_2 = 7.1 \quad n_2 = 16 \end{array}$$

- (a) Beräkna ett 99% konfidensintervall för $\mu_A - \mu_B$. (4p)
- (b) Använd ditt intervall för att uttala dig om en eventuell skillnad i överhöjning mellan A och B. (1p)
8. Betrakta följande observationer:

$$\begin{array}{cccccccccc} x & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ y & 2.5 & 2.2 & 2.1 & 1.9 & 1.7 & 1.8 & 1.6 & 1.2 & 1.1 \end{array}$$

Man önskar införa en sedvanlig modell för enkel linjär regression, dvs.

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$$

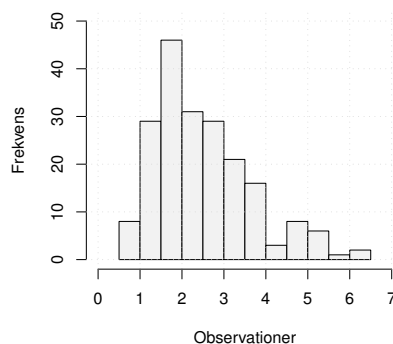
där $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ är oberoende slumpvariabler.

- (a) Finn punktskattningar av α och β . Räknehjälp:

$$\sum_{i=1}^9 (x_i - \bar{x})^2 = 6, \quad \sum_{i=1}^9 (y_i - \bar{y})^2 = 1.649, \quad \sum_{i=1}^9 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = -2.9. \quad (2p)$$

- (b) Beräkna ett 95% konfidensintervall för β . (3p)

Lycka till!



Figur 1: Histogram (problem 5).